REPRESENTACIONES DE SITUACIONES ADITIVAS

UNIDAD DE APRENDIZAJE

UNIDADES PARA LA FORMACIÓN INICIAL DOCENTE EN MATEMÁTICA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE
CMMEdu
CONICYT Ministerio de Educación Gobierno de Chile
FONDEF Fondo de Fomento al Desarrollo Científico y Tecnológico
Ministerio de Educación Gobierno de Chile
CPEIP Ministerio de Educación Gobierno de Chile

Este material fue elaborado en el marco del Proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119 (2017-2019): Metodologías innovadoras para la formación inicial de profesores de Educación Básica: Modelo basado en prácticas efectivas de aula y tecnologías de la información.

Esta unidad de aprendizaje fue probada en cursos de carreras de Pedagogía en Educación Básica como parte del proceso de elaboración. Agradecemos a la profesora María Teresa Fajardo de la Universidad de Atacama y a sus estudiantes por sus valiosas contribuciones al desarrollo de esta unidad. También, agradecemos a Macarena Müller de la Universidad del Desarrollo, quien colaboró en el proceso de ajuste final del material.

Equipo de creación:

Camila Brito P. CMM, Universidad de Chile.
Flavio Guiñez A. CMM, Universidad de Chile.
María Victoria Martínez V. CIAE, Universidad de Chile.
Paula Olguín L. CMM, Universidad de Chile.
Rodrigo Ulloa S. Universidad Católica de la Santísima Concepción.

Equipo de edición:

Pablo Dartnell R. CIAE-CMM, Universidad de Chile.
Alejandro López C. Universidad Andrés Bello.
Salomé Martínez S. CMM, Universidad de Chile.
Daniela Rojas B. CMM, Universidad de Chile.
Ricardo Salinas P. CMM, Universidad de Chile.

ÍNDICE

MATERIAL PARA EL FORMADOR 5

VISIÓN GLOBAL DE LA UNIDAD 7

PLANIFICACIONES DE CLASES 17

PLANIFICACIÓN CLASE 1 19

PLANIFICACIÓN CLASE 2 53

MATERIAL PARA LOS ESTUDIANTES 83

MATERIAL
PARA EL FORMADOR

VISIÓN
GLOBAL

UNIDAD
REPRESENTACIONES DE SITUACIONES ADITIVAS

UNIDAD

REPRESENTACIONES DE SITUACIONES ADITIVAS

El propósito de esta unidad es caracterizar las distintas formas de representar una situación aditiva para utilizarlas de manera pertinente en los procesos de aprendizaje. Para ello, se analizan y sistematizan las distintas características de representaciones manipulativas y gráficas que se usan en nuestro sistema educativo. Además, se estudian los aspectos didácticos que propician el uso de una representación por sobre otra para una situación aditiva, lo que permite que los futuros profesores obtengan herramientas para construir secuencias de aprendizaje que promuevan un uso adecuado de los distintos tipos de representaciones.

1. Fundamentación del tema

De acuerdo con las Bases Curriculares de Matemática para Educación Básica (Mineduc, 2012, 2013), las representaciones juegan un rol clave en el proceso de aprendizaje, y capacitan al estudiante la posibilidad para que construyan sus propios conceptos matemáticos. Una de las cuatro habilidades que el currículo considera fundamentales para la actividad matemática y el aprendizaje de esta disciplina es la de representar, pues permite: (1) relacionar el conocimiento intuitivo con una explicación formal de las situaciones al ligar diferentes niveles de representación (concreto, pictórico y simbólico), (2) potenciar la comprensión de las operaciones, relaciones y conceptos matemáticos, y (3) brindarles a las expresiones matemáticas un significado cercano.

Pero ¿qué entendemos cuando hablamos de una representación? En palabras simples, es cualquier configuración de caracteres, imágenes u objetos concretos que se usa para dar cuenta de otra cosa. (Goldin, 1998; Kaput, 1985). Históricamente, las personas desarrollan y utilizan representaciones para interpretar, recordar o comunicar sus experiencias. En matemática, expresiones simbólicas, dibujos, palabras escritas, números, gráficos y diagramas son representaciones de conceptos. Representar, entonces, no es solo copiar lo que uno ve; por el contrario, implica inventar o adaptar las convenciones de un sistema de representación para el propósito que se tenga (Grosslight, Unger y Smith, 1991; Olson, 1994). Por tanto, cuando hablamos de representación desde una perspectiva escolar, nos referimos tanto al **proceso** de capturar un concepto o relación matemática de alguna forma, como al **producto** o resultado que se obtiene (NCTM, 2000).

Se han realizado diversas clasificaciones de estos procesos o productos. La más conocida, debida al trabajo que Jerome Bruner desarrolló durante la década de los sesenta, señala que las personas representan ideas en tres formas: (a) **enactiva**, o a través de acciones; por ejemplo, cuando usamos materiales manipulativos; (b) **icónica**, es decir, a través de la producción e interpretación de imágenes o diagramas, y, (c) **simbólica**, es decir, usando palabras, lenguaje y símbolos escritos (Bruner, 1966).

Las Bases Curriculares recogen estas ideas y proponen un enfoque sobre cómo secuenciar el estudio matemático incorporando representaciones, estableciendo que los alumnos deben ser capaces de transitar fluidamente desde representaciones concretas hacia las pictóricas, para más

tarde avanzar progresivamente hacia un lenguaje simbólico (Mineduc, 2012; Mineduc, 2013). Además, el currículo promueve el manejo de una variedad de representaciones matemáticas para un mismo concepto, así como el tránsito fluido entre ellas. Cabe destacar que los Objetivos de Aprendizaje mantienen permanentemente esa progresión de lo concreto a lo pictórico (icónico) y a lo simbólico (abstracto), y que este tránsito se promueve en ambos sentidos (Mineduc, 2012).

Numerosas investigaciones han relevado que las representaciones son herramientas poderosas para el aprendizaje de los estudiantes (Cuoco y Curcio, 2001; Flevares y Perry, 2001; Goldin y Shteingold, 2001; Kilpatrick, Swafford, y Findell, 2001; Veloo y López-Real, 1994, Veloo, 1996), pudiendo ser utilizadas para la adquisición de nuevos conceptos matemáticos y también para clarificar las confusiones de los estudiantes (Flevares y Perry, 2001; Parmjit, 2004).

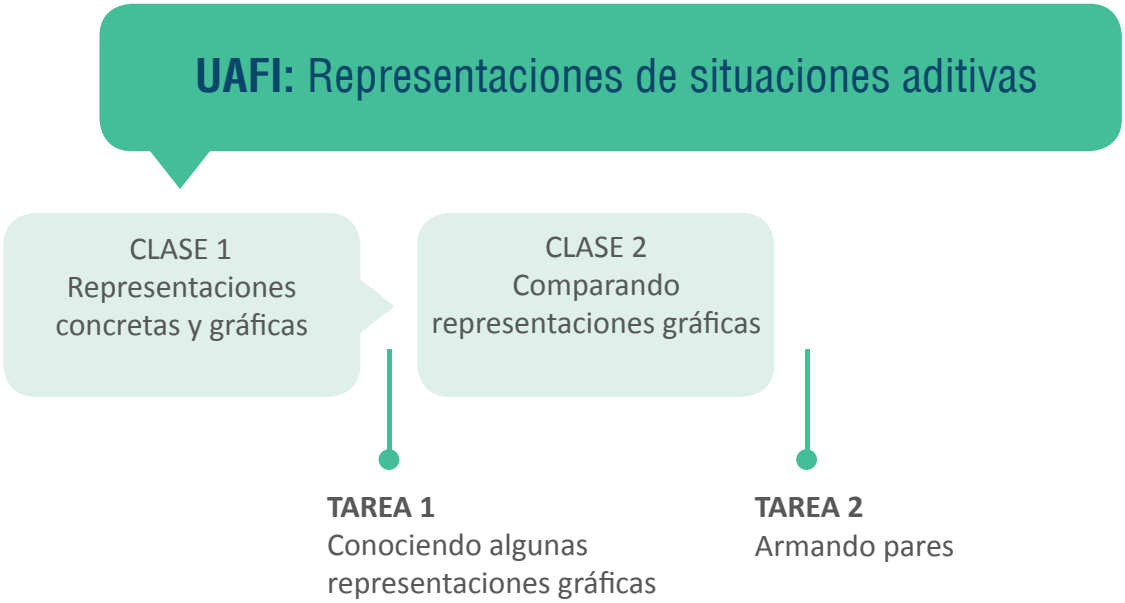
Sin embargo, para poder aprovecharlas, el docente necesita elegir las que sean apropiadas para conseguir que los significados sean claros para los alumnos, de modo que ellos sean capaces de construir el conocimiento con precisión. Representaciones seleccionadas cuidadosamente ayudan al docente a mostrar a los alumnos las matemáticas que está tratando de enseñar (Veloo & Parmijt, 2017).

Al momento de seleccionar una representación, el docente se debe preguntar por qué es importante su uso en un determinado propósito formativo, cómo debería ser utilizada y qué necesitan saber los estudiantes para aprender a emplearla. Tales preguntas respecto al uso de las representaciones ayudan a los profesores a pensar acerca de lo que los estudiantes podrían "ver" en una representación.

Para entender un concepto matemático que es transmitido por una representación (un diagrama de barra, una recta numérica, etc.), el alumno tiene que procesarlo y conectarlo internamente con las ideas y conceptos matemáticos que dispone para formar las estructuras o esquemas de conocimiento (Piaget, 1970; Skemp, 1979). El hecho de que el alumno no establezca esta conexión da lugar, a menudo, a concepciones distorsionadas que se manifiestan, por ejemplo, en la forma de errores de cálculo o dificultades en la comprensión o uso de ciertas representaciones gráficas (Olivier, 1989; Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990). Una de las razones que podrían explicar las dificultades de los estudiantes puede ser el hecho de que las representaciones por lo general se enseñan y aprenden como si fueran un fin en sí mismas, (Goldin, 2002; Eisenberg y Dreyfus, 1994; Greeno & Hall, 1997; NCTM, 2000), lo que limita su poder y utilidad como herramientas flexibles para aprender y hacer matemáticas.

Por lo anterior, es crucial el estudio de representaciones en la formación inicial docente, profundizando no solo en el conocimiento matemático asociado a cada tipo, sino que reflexionando sobre su elección e incorporación en el estudio de diversos temas.

2. Estructura de la UAFI



La unidad está compuesta por dos clases. En la primera se aborda el uso de recursos manipulativos para representar situaciones aditivas caracterizando y analizando sus elementos. También se estudian los aspectos didácticos que propician el paso desde el uso de representaciones manipulativas a representaciones gráficas. La segunda se focaliza en las representaciones gráficas, como diagramas de barras o recta numérica. Se evalúa el uso de ellas considerando como criterio su pertinencia en función de las características del problema aditivo, y se formulan problemas a partir de representaciones dadas.

En esta unidad también se incorporan dos actividades para que los futuros profesores profundicen, después de la clase, los temas abordados. Posterior a la primera clase, se espera que desarrollen la Tarea 1: “Conociendo algunas representaciones gráficas”, en la que deben identificar la acción, los datos y la incógnita de tres representaciones gráficas. Luego, al finalizar la segunda clase, se espera que desarrollen la Tarea 2: “Armando pares”, en la que los estudiantes deben escoger la representación más adecuada a un problema dado.

3. Profundización de los contenidos

En muchos casos, el acceso a ideas y conceptos matemáticos abstractos solo se puede conseguir mediante sus representaciones, por ejemplo, a través de diagramas, tablas y símbolos (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001). Del mismo modo, Duval (2002) señala que a los objetos matemáticos, a diferencia de la mayoría de los objetos físicos, solo se puede acceder también a través de sus representaciones. Por lo anterior, estas cumplen un rol fundamental en el aprendizaje de la matemática.

Las representaciones en el aprendizaje y la enseñanza de la matemática

Para comprender el papel que cumplen las representaciones en el aprendizaje, es conveniente considerar que estas ocupan distintos ámbitos durante el fenómeno del aprendizaje (Goldin y Shteingold, 2001). Las **representaciones externas** implican el uso de modelos concretos, diagramas, TIC y representaciones simbólicas para ejemplificar e ilustrar conceptos matemáticos, y, tal como su nombre lo sugiere, se ubican en el mundo externo. Las **representaciones internas o mentales** se refieren a cómo se construye y representa una idea matemática en la mente del estudiante mediante sistemas de notación personal, lenguaje natural, imágenes visuales y estrategias para resolver problemas. Típicamente, el aprendizaje es mediado a través de un proceso denominado andamiaje, que, de acuerdo con Vygotsky (1978), ocurre cuando el tutor, es decir, un docente o una persona con más conocimiento, realiza acciones tales como dar instrucciones, hacer preguntas o dibujar un diagrama al niño para facilitarle que se mueva a un estado en el que pueda construir sus propias representaciones internas, las que no pueden ser manipuladas por el profesor. El docente solo puede generar oportunidades para que el aprendiz construya, adapte o modifique sus representaciones mentales por medio de la presentación de una diversidad de representaciones externas.

Varias investigaciones han demostrado que el uso combinado de más de un tipo de representación podría ayudar a los estudiantes a lograr una comprensión más amplia, flexible y robusta de los conceptos matemáticos (Ainsworth, Bibby y Wood, 1997; Elia, Gagatsis & Demetriou, 2007).

En el aula, el acto de representar toma sentido desde el contexto, y las representaciones se usan como herramientas para entender conceptos matemáticos y también como medios de comunicación de dichos conceptos. Así, el trabajo con representaciones para las interacciones en el aula cumple dos funciones principales:

1. **Compartir el resultado de un proceso de resolución**. En este caso las representaciones tienen un carácter más bien estático, y corresponden a herramientas de comunicación informales entre pares como a medios más formales; por ejemplo, al presentar las soluciones a toda una clase.

2. **Negociar y co-construir significado**. La representaciones pueden ser herramientas que ayudan a discutir y establecer una comprensión común de los conceptos y problemas, lo que corresponde a un uso más dinámico de ellas.

Particularmente, un trabajo que predomina en el estudio de las matemáticas es la resolución de problemas, en la que las representaciones cumplen varios roles que resultan fundamentales durante el proceso (Stylianou, 2010).

Roles de las representaciones en la resolución de problemas

Entre las funciones que cumplen las representaciones durante la actividad matemática individual destacamos las siguientes:

1. **Comprender la información**. Las representaciones se usan como herramientas para analizar los elementos de un problema matemático, y visualizar cómo interactúan o se relacionan estos elementos. Esto constituye una función importante de la representación, ya que, a menudo, no todos los aspectos de una situación problemática son accesibles de forma inmediata (Schoenfeld, 1985).

2. **Registrar la información**. Las representaciones se usan como herramientas que permiten combinar toda la información disponible, en lugar de tratar de mantenerla en la cabeza. Así, proporcionan una manera compacta y eficiente para registrar esta información en un medio externo, simplificando el enunciado original de un problema (Newell y Simon, 1972).

3. **Explorar conceptos y problemas**. Las representaciones son dispositivos flexibles que permiten la indagación sobre conceptos y problemas. Entre otras cosas, ayudan a obtener más información, descubrir regularidades, establecer propiedades y hacer generalizaciones (Stylianou & Silver, 2004).

4. **Monitorear y evaluar el progreso**. Las representaciones contribuyen a evaluar el progreso en la resolución de problemas (Izsák, 2003). Una representación se puede usar como una forma de controlar el progreso en la resolución de problemas y tomar decisiones informadas al seleccionar objetivos y mantener o revisar los planes actuales.

4. Referencias bibliográficas

Ainsworth, S., Bibby, P., & Wood, D. (1997). Evaluating principles for multi-representational learning environments. Paper presented at the 7th European Conference for Research on Learning and Instruction, August 1997. Athens.

Bruner, J. (1966). Towards a theory of instruction. Cambridge, MA: Harvard University Press.
Cuoco, A. A., & Curcio, F. R. (Eds.). (2001). The roles of representation in school mathematics. Reston, VA: NCTM.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1(2), 1-16.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1994). On understanding how students learn to visualize. Research in Collegiate Mathematics Education, 1, 45-68.

Elia, I; Gatasis, A; Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems. Learning and Instruction, 17, 658-672.

Flevares, L. M., & Perry, M. (2001). How many do you see? The use of non-spoken representations in first-grade mathematics lessons. Journal of Educational Psychology, 93(2), 330-345.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. Journal of Mathematical Behavior, 17(2), 137-165.

Goldin, G. A., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), The roles of representation in school mathematics (pp. 1-23). Reston, VA: NCTM.

Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), Handbook of research in mathematics education (pp. 197-218). Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Greeno, J., & Hall, R. (1997). Practicing representation. Phi Delta Kappan, 78(5), 361-368.

Grosslight, L., Unger, E. J., & Smith, C. (1991). Understanding models and their use in science. Journal of Research in Science Teaching, 28(9), 799-822.

Izsák, A. (2003). “We want a statement that is always true”: Criteria for good algebraic representations and the development of modeling knowledge. Journal for Research in Mathematics Education, 34(3), 191.

Kaput, J. (1985). Representation and problem solving: Methodological issues related to modelling. In E. A. Silver (Ed.), Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives (pp. 381-398). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academy Press.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. Review of Educational Research, 60(1), 1-64.

Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual models in applied mathematical problem solving research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes (pp. 263-343). New York: Academic Press.

Mineduc (2012). Bases curriculares de Matemática para Educación Básica (1º a 6º básico).

Mineduc (2013). Bases curriculares de Matemática para 7º básico a 2º medio.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston: NCTM.

Newell, A., & Simon, H. A. (1972). Human problem solving (Vol. 104, n° 9). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Olivier, A. (1989). Handling pupils' misconceptions. Presidential address delivered at the Thirteenth National Convention on Mathematics, Physical Science and Biology Education, Pretoria, 3-7 July 1989.

Olson, D. (1994). The world on paper. Cambridge: Cambridge University Press.

Parmjit, S. (2004). Gaps in Children's Mathematical Learning: Additive and multiplicative. In C. Irene, H.S Dhinsa, I.J Kyeleve & O. Chukwu (Eds.), Globalisation Trends in Science, Mathematics and Technical Education, pp.127-136, Brunei: University Brunei Darussalam.

Piaget, J. (1970). Genetic Epistemology. Chicago. University of Chicago Press.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical problem solving. Academic Press, Inc: Florida.

Skemp, R. (1979). Intelligence, Learning and Action. New York. John Wiley & Sons.

Stylianou, D. A., & Silver, E. A. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. Mathematical thinking and learning, 6(4), 353-387.

Stylianou, D. (2010). An examination of middle school students' representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: Towards an organizing scheme. Educational Studies in Mathematics, 76, 265-280.

Veloo, P. K., & Lopez-Real, F. (1994). Drawing diagrams and solving word problems: A study of a sample of Bruneian primary and secondary school children. In G. Bell, B. Wright, N. Leeson & J. Geake (Eds.), Challenges in mathematics education: Constraints on construction (pp. 667-674). Lismore: Australia.

Veloo. P. K. (1996). Teaching children to draw diagrams in solving word problems: An exploratory study. In P.C. Clarkson (Ed.), Technology in mathematics education, (pp. 580-587). Melbourne: Australia.

Veloo, P. & Parmijt, S. (2017). Using Representations to Develop Mathematical Thinking. En Empowering Mathematics Learners. Yearbook 2017, Association of Mathematics Educators. pp. 249-269.

Vygotsky, L.S. (1978). Mind in Society. Cambridge, MA: Harvard University Press.

PLANIFICACIONES

UNIDAD

REPRESENTACIONES DE SITUACIONES ADITIVAS

PLANIFICACIÓN
CLASE 1

UAFI: Representaciones de situaciones aditivas

CLASE 1
Representaciones concretas y gráficas

CLASE 2
Comparando representaciones gráficas

TAREA 1
Conociendo algunas representaciones gráficas

TAREA 2
Armando pares

CLASE 1: REPRESENTACIONES CONCRETAS Y GRÁFICAS

RESUMEN DE LA CLASE

Meta de la clase	Al finalizar la clase se espera que los futuros profesores[1] sean capaces de representar situaciones aditivas con recursos manipulativos y gráficos, caracterizando y analizando sus elementos, y además puedan evaluar la pertinencia de una forma de representar en función de la situación aditiva.
Descripción de la clase	Esta clase comienza con una actividad de exploración en la que los estudiantes deben representar problemas aditivos con tres tipos de materiales concretos, evaluando las dificultades de este proceso. Continúa con una actividad en la que deben identificar los datos, la incógnita y el tipo de situación aditiva a partir de una representación. Esto, con el fin de analizar y sistematizar las características de estos recursos manipulativos. Posteriormente, se modifican las condiciones de los problemas aditivos, lo que motiva el tránsito de la representación manipulativa a la gráfica. La clase finaliza con una actividad de sistematización en la que se establecen las ideas centrales respecto del uso de representaciones para problemas aditivos.

[1] Respecto del uso de lenguaje inclusivo: Con el propósito de no provocar una saturación gráfica que dificulte la comprensión de la lectura, en este documento no se considera el uso de “los/las” u “o/a” para hacer referencia a ambos géneros de manera conjunta. En su lugar, se utilizan términos como “el futuro profesor”, “el estudiante” y “el profesor” y sus respectivos plurales para aludir de manera inclusiva a hombres y mujeres. Sin embargo, durante la gestión de la clase se sugiere la utilización de lenguaje inclusivo que invite a los y las estudiantes a involucrarse activamente en las actividades.

Aprendizajes esperados	Al finalizar la clase se espera que el estudiante: • Represente problemas aditivos con recursos manipulativos y gráficos. • Describa características de las representaciones manipulativas. • Reconozca los datos, la incógnita y el tipo de situación aditiva en representaciones manipulativas y gráficas. • Identifique características de problemas aditivos que motivan el tránsito desde representaciones manipulativas a gráficas. • Evalúe la pertinencia de una representación en función de la situación aditiva.
Conocimientos previos	Tipos de situaciones aditivas: composición, cambio y comparación.
Materiales	Estudiantes • Hojas de trabajo del estudiante. • Material manipulativo: piezas (que no se puedan apilar, como bolitas o porotos), cubos unitarios, cinta numerada. Profesor • Computador. • Proyector. • Link animación 1: *http://www.sumaysigue.cmm.uchile.cl/FONDEF/recursos/ANIMACION_01.html* • Link animación 2: *http://www.sumaysigue.cmm.uchile.cl/FONDEF/recursos/ANIMACION_02.html*
Tiempo total estimado	85 min.

ESQUEMA DE LA CLASE

Tipo de actividad	Actividades	Tiempo (T) Modalidad (M)
Introducción	**Introducción a la unidad y al modelo de trabajo** El formador lee la introducción de la unidad y describe la modalidad de trabajo.	T: 5 min
Exploración	**Actividad 1: Representando situaciones aditivas con material concreto** Con esta actividad se busca que los futuros profesores representen problemas aditivos con distintos materiales concretos (piezas, cubos unitarios y cinta numerada), evaluando qué tan adecuados son para los distintos problemas e identificando las dificultades que se presentan.	T: 15 min M: En parejas y de curso completo
Construcción y profundización	**Actividad 2: Identificando los datos y la incógnita** Con esta actividad se busca que los futuros profesores señalen si es posible visualizar los datos, la incógnita y la relación que se establece entre estas cantidades (acción) en la representación concreta de problemas aditivos.	T: 15 min M: Individual y de curso completo
Sistematización	**Actividad 3: Caracterizando los tipos de material concreto** En esta actividad se caracterizan los tipos de materiales concretos utilizados (cubos unitarios, piezas y cinta numerada) para analizar sus diferencias y su competencia para cumplir ciertos propósitos.	T: 15 min M: En parejas y de curso completo
Construcción y profundización	**Actividad 4: Dibujando representaciones de problemas aditivos** Esta actividad está centrada en que los futuros profesores reconozcan algunas condiciones del trabajo con problemas aditivos que motivan el paso desde representaciones manipulativas a gráficas.	T: 20 min M: Individual y de curso completo
Sistematización	**Actividad 5: Revisando lo aprendido en la clase** Con esta actividad se busca que los futuros profesores sistematicen las ideas centrales respecto del uso de representaciones para problemas aditivos.	T: 15 min M: De curso completo

Introducción a la unidad y al modelo de trabajo	**Tiempo**
La unidad “Representaciones de situaciones aditivas” está compuesta por 2 clases en las que estudiaremos el uso de representaciones concretas y gráficas para modelar los distintos tipos de situaciones aditivas. Nos enfocaremos en analizar sus características y evaluar su pertinencia en cada caso. Estas clases están diseñadas siguiendo un modelo basado en: • la resolución de problemas. • la construcción colaborativa de conocimientos. • actividades que promueven la reflexión y discusión respecto de los conocimientos matemáticos necesarios para enseñar. Te invitamos a aprender de tus propios descubrimientos, así como de los de tus compañeros. Para ello, te recomendamos que: • participes activamente en la solución de los problemas propuestos. • compartas tus ideas, estrategias y resultados. • te esfuerces por entender lo que expresan tus compañeros. • aportes en la construcción colectiva de ideas y conocimientos.	5 min

Representando situaciones aditivas con material concreto

Exploración

Tiempo: 15 min.
Modalidad: En parejas y de curso completo.
Materiales: Hoja de la actividad 1. Piezas (que no se puedan apilar, como bolitas o porotos; 20 por pareja), cubos unitarios (20 por pareja) y cinta numerada (del 1 al 20; una por pareja).

PROPÓSITO

Con esta actividad se busca que los futuros profesores representen problemas aditivos con diferentes materiales manipulativos (piezas, cubos unitarios y cinta numerada), evaluando qué tan adecuados son para los distintos tipos de problemas e identificando las dificultades que se presentan.

Fecha: _____

Nombre: _____

Unidad de Aprendizaje Representaciones de Situaciones Aditivas
Hojas de trabajo - Clase 1

Actividad 1

Trabajo en parejas
Usando los materiales que se les proporcionaron (piezas, cubos y cinta), representen la situación descrita en cada uno de los problemas.

1. En la tabla, indiquen el tipo de situación aditiva que corresponde a cada uno de los problemas. Marquen con qué materiales pudieron representar cada problema y, si es el caso, indiquen las dificultades que se les presentaron.

Problema	Tipo de situación	Material con que se puede representar	Dificultades
Para su cumpleaños, Ema adquirió 5 botellas de bebida, y como consideró que no le iban a alcanzar, compró 4 más. ¿Cuántas botellas de bebida tiene ahora?		○ Piezas	
		○ Cubos unitarios	
		○ Cinta numerada	
Para su cumpleaños, Ema invitó a 5 amigas y a 4 amigos. ¿Cuántos invitados tuvo en su fiesta?		○ Piezas	
		○ Cubos unitarios	
		○ Cinta numerada	
Ema recogió 9 dulces de la piñata y Joaquín 4. ¿Cuántos dulces más que Joaquín recogió Ema?		○ Piezas	
		○ Cubos unitarios	
		○ Cinta numerada	

2. ¿Qué tipo de materiales les parecen más adecuados para representar cada problema? Justifiquen.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Se requiere preparar material concreto. En particular, las fichas no deben ser apilables.

VER MÁS +

Revise previamente con cuál de los materiales es posible representar cada problema.

VER MÁS +

En la puesta en común tenga presente que no hay una única respuesta correcta. Revise la gestión sugerida.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Entregue solo la hoja de esta actividad junto con los materiales. Solicite que aborden un problema a la vez, y luego que respondan la pregunta 2.
- Deje que los estudiantes experimenten dificultades al intentar representar los problemas.
- Durante el monitoreo observe cómo los estudiantes representan con la cinta numerada el segundo problema, que corresponde a una situación de composición.
- También observe cómo representan el tercer problema con las piezas, ya que no son apilables y deben representar una comparación.

VOLVER

COMPARTIR RESULTADOS (5 min)

Para la puesta en común, puede serle útil considerar las siguientes sugerencias de gestión:

- Invite a algunos estudiantes a mostrar con el material sus formas de representación para los distintos problemas. Tenga presente que en esta actividad no hay una única respuesta correcta.
- En la representación del problema 2 con la cinta numerada, hágales notar que la dificultad tiene que ver con que las situaciones de composición requieren representar las cantidades como trozos de cinta, y no como posiciones en ella. Para ello puede preguntar: *¿es posible representar una situación de composición en la cinta numerada? Si es así, ¿de qué manera? ¿se pueden representar cantidades cardinales en la cinta numerada? Si es así, ¿de qué forma?*
- En la representación del problema 3 con las piezas, es importante hacer notar a los estudiantes que, para una comparación, las piezas deben estar ordenadas de tal manera que se pueda hacer una correspondencia uno a uno. Puede preguntar: *¿podemos representar el problema poniendo las piezas de manera desordenada, ¿cómo se deben disponer las piezas para representar este problema?*

VOLVER

SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS (5 min)

Como síntesis puede destacar lo siguiente: no todos los materiales manipulativos permiten representar situaciones de composición, transformación o comparación. Hay algunos más adecuados que otros. Para motivar la reflexión, se sugiere preguntar: *¿pudieron hacer todas las representaciones pedidas?, ¿en cuál tuvieron dificultades?, ¿por qué?*

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad, comente los puntos que se indican a continuación (puede usar la diapositiva 6):

- En esta actividad trabajamos con tres tipos de materiales concretos para representar situaciones aditivas.
- Frente a un problema aditivo, hay materiales concretos que resultan más adecuados que otros para representarlo.
- El conocimiento trabajado en esta actividad es fundamental para la labor docente. Sin embargo, no se pretende que esta actividad sea replicada con estudiantes de Educación Básica.

VOLVER

LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

En la actividad siguiente se analizará qué representaciones permiten visualizar los datos, la incógnita y la relación que se establece entre ellos en distintos problemas aditivos (puede usar la diapositiva 7).

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Es importante que las “piezas” no se puedan apilar porque los estudiantes podrían usarlas de la misma manera que los cubos y no distinguir las características de cada tipo de material. Se aconseja usar porotos, bolitas, etc.

- En general, los estudiantes podrían representar el resultado de la operación más que la situación asociada al problema.

- En el primer problema, algunas parejas podrían señalar que no es adecuado representar “5 amigas” como una posición, dado que este número corresponde a un cardinal.

- Es posible que en el segundo problema los estudiantes presenten dificultades para representarlo mediante la cinta numerada.

- Se espera que exista variabilidad en las respuestas a la pregunta 2. En la discusión, podría ocurrir que:

    - en el segundo problema no se mencione la cinta numerada como la representación más adecuada.

    - en el tercer problema aparezcan con mayor frecuencia los cubos y la cinta numerada.

- Es probable que algunas parejas consideren que todos los materiales son igualmente adecuados para representar los problemas. Esto no es un inconveniente en esta etapa, ya que en actividades posteriores se abordará esta problemática.

Identificando los datos y la incógnita

Construcción y profundización

Tiempo: 15 min.
Modalidad: Individual y de curso completo.
Materiales: Hoja de la actividad 2.
Videos animados de uso del material concreto.
Link animación 1: http://www.sumaysigue.cmm.uchile.cl/FONDEF/recursos/ANIMACION_01.html
Link animación 2: http://www.sumaysigue.cmm.uchile.cl/FONDEF/recursos/ANIMACION_02.html

PROPÓSITO

Con esta actividad se busca que los futuros profesores señalen si es posible visualizar los datos, la incógnita y la relación que se establece entre estas cantidades (acción) en la representación concreta de problemas aditivos.

Fecha: _____

Nombre: _____

Unidad de Aprendizaje Representaciones de Situaciones Aditivas
Hojas de trabajo - Clase 1

Actividad 2

Trabajo individual

Observa las siguientes animaciones, las que muestran representaciones con distinto material de dos de los problemas anteriores. Luego, responde lo que se te indica a continuación:

1. Marca sobre cada imagen las cantidades involucradas (datos e incógnita) en el problema:

Para su cumpleaños, Ema invitó a 5 amigas y a 4 amigos. ¿Cuántos invitados tuvo en su fiesta?

Representación 1

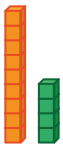
Representación 2

2. ¿Está representada la relación entre las cantidades en cada caso?, ¿de qué manera?

3. Marca sobre cada imagen las cantidades involucradas (datos e incógnita) en el problema:

Ema recogió 9 dulces de la piñata y Joaquín 4. ¿Cuántos dulces más que Joaquín recogió Ema?

Representación 1



Representación 2

4. ¿Está representada la relación entre las cantidades en cada caso?, ¿de qué manera?

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Esta actividad requiere mostrar animaciones desde dos *links* distintos. Pruébelos con antelación.

VER MÁS +

Para esta actividad es importante identificar algunas respuestas durante el monitoreo. Revise la gestión propuesta.

VER MÁS +

Es posible que los estudiantes intenten forzar el uso de las representaciones. Revise la gestión sugerida.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Explique que en la actividad deben observar atentamente dos videos animados. De ser necesario, se pueden proyectar más de una vez (usar link a videos).
- En el primer problema, observe si los estudiantes son capaces de discernir que la cinta numerada no permite representar una situación de composición. Ponga atención en la estrategia que usan aquellos que señalan que es posible hacerlo.
- Para el segundo problema, fíjese si hay estudiantes que indican que se puede representar con las piezas, la acción de comparar. Observe la estrategia que ellos utilizan.

VOLVER

DISCUSIÓN DE CURSO COMPLETO (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar la discusión:

- Invite a los estudiantes que encontraron una estrategia para representar el problema de composición en la cinta numerada y el de comparación con las piezas, a que le expliquen al resto del curso cómo lo hicieron. Como apoyo, pueden usar material concreto o dibujar en la pizarra.
- Para discutir sobre las estrategias mostradas puede plantear preguntas como las siguientes: *¿estás utilizando la representación tal como se plantea en la animación?, ¿es posible visualizar los datos, la incógnita y la acción al mismo tiempo en tu representación?*

VOLVER

CONCLUSIÓN DE LA DISCUSIÓN (5 min)

Como conclusión se sugiere considerar las siguientes ideas:

- Una buena representación de un problema aditivo debe permitir, al menos, identificar las tres cantidades involucradas (los datos e incógnita) e, idealmente, visualizar el significado y la acción. Para concluir este punto, puede preguntar: *¿tuviste dificultades para identificar los datos y la incógnita en las imágenes?, ¿por qué?, ¿cuál es la representación más adecuada para cada tipo de problema?, ¿qué características tienen?*
- Aun cuando se pueda modificar una representación para forzar la aparición de ciertos elementos, estos no forman parte de la representación y pueden resultar poco intuitivos para los niños. Para concluir este aspecto, puede hacer referencia a lo que ocurre con la cinta numerada en el primer problema o con las piezas en el segundo.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad comente los puntos que se indican a continuación (puede usar las diapositivas 14 y 15):

- En esta actividad pudimos observar, a través de una animación, las dificultades que se pueden presentar al tratar de representar un problema aditivo con un material que no es el adecuado.
- Para ello, estudiamos cómo mediante dos representaciones concretas distintas, estaba representado el modelo de cada problema. Luego, determinamos que una resulta más apropiada que la otra gracias a la relación que se establece entre las características de las representaciones con los elementos del problema aditivo (datos e incógnita).
- Vimos que para los problemas de composición resulta poco adecuada la cinta numerada. Si bien sobre la cinta se pueden marcar los datos del problema (partes), no es posible marcar la incógnita (todo) sin recurrir a información adicional a la del enunciado. Las piezas, en cambio, resultan ser un material apropiado para representar este tipo de relación.
- Para los problemas de comparación, las piezas dispuestas de manera desordenada no permiten representar la diferencia entre las cantidades que se necesita comparar. Para que se constituyan en una buena forma de representación, sería necesario ordenarlas en filas que posibiliten hacer una correspondencia uno a uno entre las cantidades. Así, los cubos unitarios presentados en forma apilada y con el mismo inicio, resultan ser un material adecuado para representar esta relación.

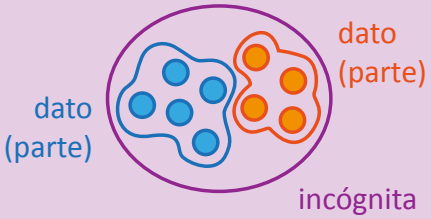
VOLVER

LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

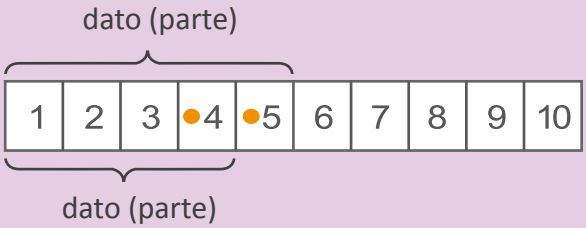
En la siguiente actividad sistematizaremos el trabajo realizado hasta el momento definiendo los tipos de materiales concretos utilizados y discutiendo su pertinencia a partir del análisis de sus características (puede usar la diapositiva 16).

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Se espera que los estudiantes identifiquen fácilmente los datos y la incógnita en la representación con piezas del primer problema. Una forma de hacerlo es encerrando cada cantidad.



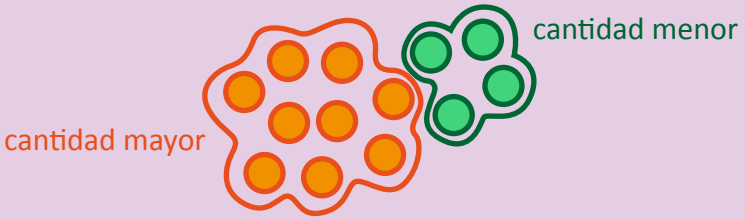
- Es probable que tengan dificultades para representar el primer problema en la cinta numerada y que solo identifiquen las dos partes del problema, pero no el todo (la incógnita).



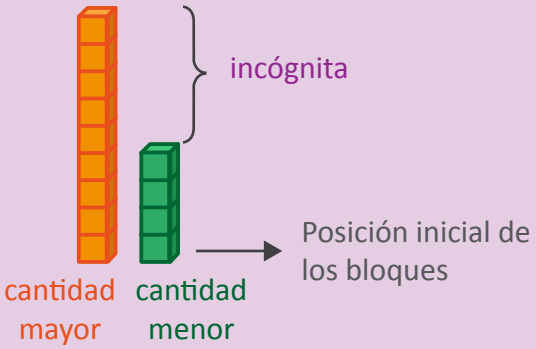
- Es posible que haya algunos que marquen el 9 en la cinta numerada para señalar la incógnita. Frente a ello puede preguntar: ¿el 9 corresponde a un dato entregado en el problema? Destaque que al marcar el 9 en la cinta, el problema ya estaría resuelto y, por lo tanto, la representación perdería sentido.

- Ante las dificultades para identificar los datos e incógnita en las imágenes, recuerde el modelo para ese tipo de problema, en que las tres cantidades son: parte, parte y todo.

- Es esperable que, para el problema de comparación, los estudiantes no logren observar la incógnita (diferencia) en la representación con piezas.



- Es probable que ellos noten que, la incógnita, se puede observar fácilmente al comparar las alturas de ambas torres y reconocer "cuánto sobra" en una torre respecto de la otra. Esto es posible gracias a que ambos conjuntos de bloques se originan a partir de una misma posición:



- Se espera que los estudiantes observen que la situación de comparación no se puede visualizar en la representación con piezas, tal como se presenta en la imagen. Si unos tratan de emparejar uno a uno los elementos de ambos conjuntos, hágales notar que eso no forma parte de la representación original.

Caracterizando los tipos de material concreto

Actividad de sistematización

Tiempo: 15 min.
Modalidad: En parejas y de curso completo.
Materiales: Hoja de la actividad 3.

PROPÓSITO

Con esta actividad se busca que los futuros profesores caractericen los tipos de materiales concretos utilizados (cubos unitarios, piezas y cinta numerada) para analizar sus diferencias y su competencia para cumplir ciertos propósitos.

Fecha: _____

Nombre: _____

Unidad de Aprendizaje Representaciones de Situaciones Aditivas
Hojas de trabajo - Clase 1

Actividad 3

Trabajo en parejas

Lean atentamente el siguiente cuadro de texto:

¿Qué entendemos por material concreto o manipulativo?

Material concreto o manipulativo es algo que existe físicamente en el entorno y que el estudiante puede manipular con el fin de representar o modelar situaciones. Durante esta clase, hemos trabajado con tres tipos de materiales manipulativos que se suelen usar para representar situaciones aditivas:

- Piezas (bolitas, porotos, otros)
- Cubos unitarios
- Cinta numerada

1. Completen la tabla, marcando con una X el material que consideran que favorece de mejor forma cada propósito planteado. Marquen solo uno por propósito.

Propósito del material	MATERIALES		
	Piezas	Cubos unitarios	Cinta numerada
Visualizar cada elemento de una cantidad.			
Apilar los elementos de una cantidad.			
Formar grupos con los elementos de una cantidad.			
Representar una posición en la secuencia numérica.			

2. ¿Por qué es importante disponer de una variedad de tipos de materiales concretos al estudiar problemas aditivos?

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Al presentar la tabla, indique que solo deben elegir un material por propósito.

VER MÁS +

Los estudiantes podrían presentar dificultades en la comprensión de “un elemento de una cantidad”. Revise las sugerencias.

VER MÁS +

Es importante formular preguntas para conducir la conclusión de la discusión. Revise la propuesta.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Lea junto con sus estudiantes el cuadro que describe lo que se entiende por material concreto.
- Luego indique claramente que al completar la tabla solo deben elegir un material por propósito.
- Identifique a aquellos estudiantes que marcan la cinta numerada en la primera y tercera fila.

VOLVER

DISCUSIÓN DE CURSO COMPLETO (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar la discusión:

- Explique que, si bien en sus hojas de trabajo marcaron un solo material, un mismo propósito puede corresponder a más de uno. Por lo tanto, en la discusión grupal se marcarán todos los materiales que respondan al mismo propósito.
- Invite a los estudiantes a compartir sus respuestas construyendo una tabla en la pizarra.
- Al completar la primera fila, pida al o los estudiantes que marcaron la cinta numerada que argumenten su decisión. Puede preguntar: *¿cómo se puede visualizar cada elemento de una cantidad, por ejemplo 5 manzanas, en la cinta numerada?* Si nadie consideró este material pregunte por qué no lo hicieron.
- Cuando se completa en la segunda y cuarta fila, haga preguntas para asegurarse de que todos los estudiantes hayan marcado los cubos unitarios y la cinta numerada, respectivamente.
- Para la tercera fila, es importante que los estudiantes que marcaron la cinta numerada expliquen sus razones. Puede representar, a modo de ejemplo, la acción de juntar un grupo de 5 y otro de 3 elementos en la misma cinta. Les puede preguntar: *¿es posible visualizar los 5 elementos y los 3 elementos al mismo tiempo?*
- Como argumento para el punto anterior, puede destacar que la forma de representar una cantidad en la cinta numerada es posicionándose en el cardinal correspondiente. Por este motivo no se puede visualizar en la cinta la acción de juntar dos cantidades, ya que al posicionarse sobre los cardinales, la cantidad menor queda contenida en la mayor.

VOLVER

CONCLUSIÓN DE LA DISCUSIÓN (5 min)

Como conclusión se aconseja considerar las siguientes ideas:

- Oriente la discusión para que los estudiantes comprendan que en el estudio de problemas aditivos es importante usar una variedad de materiales para visualizar distintos aspectos. Puede preguntar: *¿consideran que los distintos materiales permiten visualizar las mismas características para cada tipo de problema? Si los cubos son útiles para apilar elementos de una cantidad, ¿para qué tipo de situaciones aditivas es más adecuado ese material?* Si la cinta permite representar una posición, *¿para qué tipo de situaciones aditivas es más apropiado este material?*
- Concluya la discusión destacando el alcance y las limitaciones de los distintos tipos de materiales respecto de los problemas aditivos de composición, cambio o comparación. En caso de que aún observe dudas o respuestas muy diversas, puede utilizar el material concreto para mostrar sus alcances y limitaciones.
- La piezas, los cubos unitarios y la cinta numerada permiten visualizar cada elemento de una cantidad. Sin embargo, solo los dos primeros pueden manipularse.
- Solo con los cubos unitarios es posible apilar los elementos de una cantidad, mientras que únicamente la cinta numerada permite representar una posición en la secuencia numérica.
- Por último, las piezas y los cubos unitarios, al ser manipulables, dan la posibilidad de formar grupos.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad, comente los puntos que se indican a continuación (puede usar la diapositiva 21):

- Las características de un tipo de material concreto permiten visualizar u ocultar distintos aspectos de las cantidades y de las relaciones matemáticas que se pueden construir con ellas. Esto justifica estudiar cada material con un sentido pedagógico.
- Un material concreto puede ser más o menos conveniente para representar las distintas situaciones aditivas, lo que dependerá de las características de cada material.
- Dado que algunos materiales concretos no son tan adecuados para representar ciertos tipos de problemas, es necesario disponer de una variedad de ellos. En particular, ciertas representaciones no permiten visualizar los datos, la incógnita y la relación entre las cantidades de un problema.
- El uso de un material concreto en el aula es un apoyo para el estudio de problemas aditivos, y no constituye un aprendizaje en sí mismo.

VOLVER

LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

En la siguiente actividad se analizarán algunos elementos que motivan el paso desde representaciones manipulativas a gráficas (puede usar la diapositiva 22).

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Es probable que los estudiantes tengan dificultades para comprender lo que significa un elemento de una cantidad. Si esto sucede, puede explicar que es una forma general para referirse a un objeto de una colección. Por ejemplo, un elemento de una cantidad es una silla en una colección de 10 sillas.

- En la primera fila de la tabla los tres materiales pueden aparecer dentro de las respuestas de los estudiantes, ya que en todos ellos es posible visualizar cada elemento de una cantidad.

- En la segunda fila, se espera que exista mayor consenso respecto a los cubos, ya que solo estos pueden apilarse (según el uso que hemos propuesto).

- En la tercera fila es posible que los estudiantes marquen tanto las piezas como los cubos. Asimismo, se espera que haya consenso para descartar la cinta numerada debido a que sus unidades no son manipulables.

- En la última fila la cinta numerada debería aparecer en la mayoría de las respuestas.

- En la segunda pregunta, es probable que se limiten a dar razones pedagógicas, tales como que los estudiantes de esos niveles son más concretos. En caso de que los estudiantes mencionen esto, hágales notar que esa razón respalda el uso de material concreto, pero no justifica el uso de una variedad de materiales.

Dibujando representaciones de problemas aditivos

Actividad de construcción y profundización

Tiempo: 20 min.
Modalidad: Individual y de curso completo.
Materiales: Hojas de la actividad 4.

PROPÓSITO

Esta actividad está centrada en que los futuros profesores reconozcan algunas condiciones del trabajo con problemas aditivos que motivan el paso desde representaciones manipulativas a gráficas.

Fecha: _____

Nombre: _____

Unidad de Aprendizaje Representaciones de Situaciones Aditivas
Hojas de trabajo - Clase 1

Actividad 4

Trabajo individual
Lee el siguiente problema:

Ana María salió muy temprano para renovar la revisión técnica de su automóvil. Cuando llegó, contó 4 vehículos en la fila, incluyendo el de ella. Para cuando la planta abrió sus puertas, habían llegado 2 más. ¿Cuántos autos tiene la fila en el momento en que la planta de revisión técnica comenzó a atender al público?

1. Haz una representación con cubos que permita visualizar la situación.

2. Supón que se aumenta el ámbito numérico del problema, de modo tal que inicialmente había 15 vehículos esperando, incluyendo el de ella, y que cuando la planta abrió habían llegado 80 más. ¿Qué dificultades aparecerán al momento de representar el problema?

3. ¿Qué modificaciones harías a tu representación, de modo que cubra las dificultades previstas y se visualice de forma eficiente el problema? Dibuja la nueva representación.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Para esta actividad es importante identificar algunas respuestas durante el monitoreo. Revise la gestión.

VER MÁS +

Revise posibles dificultades en las representaciones cuando se modifican ciertos aspectos de los problemas.

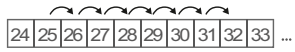
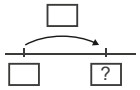
VER MÁS +

Actividad 4

Lee atentamente el siguiente texto:

> La introducción de otras representaciones se produce a partir de problemas que motiven su uso. Así, por ejemplo, cambios específicos en las características de los problemas trabajados (relación entre las cantidades, ámbito numérico, naturaleza de los datos, etc.) promueven la modificación de las representaciones conocidas, o bien la necesidad de incorporar otras. Este proceso debe ser reflexivo, es decir, sobre la base de una discusión que conduzca al desarrollo del pensamiento matemático. Si, por el contrario, no es reflexivo y es impuesto por el profesor, la nueva representación aparece como un fin y no como un medio para la comprensión.

4. A continuación, se presentan dos problemas con su representación. Modifica cada problema formulando uno nuevo que se ajuste a la nueva condición y pueda ser representado como se propone en la tabla.

Problema 1: Amelia y Víctor son hermanos. Ella tiene 3 manzanas y él tiene 2. ¿Cuántas manzanas tienen en total?	**Representación**:
Nueva condición: Aumento del ámbito numérico.	
Nuevo problema:	**Representación**: diagrama de barras.
Problema 2: En un molino se produjeron 25 sacos de harina durante la mañana, y 7 más durante la tarde. ¿Cuántos sacos de harina se elaboraron ese día en el molino?	**Representación**: 
Nueva condición: Modificación de la naturaleza de los datos (de lo discreto a lo continuo).	
Nuevo problema:	**Representación**: Recta numérica. 

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Es importante que quede claro que las nuevas formas de representación deben surgir; no se deben imponer.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Trabaje en las preguntas 1, 2 y 3. Haga una puesta en común de las respuestas, luego lea el texto y pida que desarrollen la pregunta 4.
- Observe las dificultades que plantean los estudiantes al representar con los cubos el mismo problema, pero en un ámbito numérico mayor. Fíjese en las soluciones que utilizan para superar esta dificultad.
- En la pregunta 4 observe si al formular un nuevo problema con la modificación del Problema 2, los estudiantes varían la naturaleza de los sacos de harina (discreta) por una medida continua, como kilogramos, gramos, etc.
- Resguarde que al formular los problemas, los estudiantes mantengan los contextos dados para no desviar la discusión al momento de compartir los resultados.

VOLVER

DISCUSIÓN DE CURSO COMPLETO (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar la discusión:

- Invite a los estudiantes a compartir sus respuestas a las preguntas 1, 2 y 3. Se sugiere pedir que algunos dibujen en la pizarra la representación que elaboraron y la expliquen.
- Oriente la discusión para que los estudiantes contrasten los dibujos que propusieron con el cambio de las condiciones, de manera que comprendan el rol del aumento del ámbito numérico en la producción de representaciones más eficientes.
- Al revisar las producciones de los estudiantes en la pregunta 3 no es el momento de discutir si el diagrama de barras o la recta numérica están bien construidos, ya que estas representaciones se trabajarán posteriormente con mayor profundidad. Lo importante es que las modificaciones propuestas logren incorporar el nuevo ámbito numérico.
- Para la discusión de la pregunta 4, puede preguntar: *¿cómo se ve reflejada la nueva condición en el problema que plantearon?*
- Guíe la discusión para que los estudiantes establezcan que un cambio en las condiciones del problema propicia el tránsito de un tipo de representación a otro. Para ello, puede preguntar, *¿cómo podemos propiciar el paso de una representación concreta a una abstracta?, ¿qué lo motiva?*

VOLVER

CONCLUSIÓN DE LA DISCUSIÓN (5 min)

Como conclusión se sugiere considerar las siguientes ideas:

- Vimos que al aumentar el ámbito numérico, los cubos ya no son eficientes para representar la situación aditiva. Fue necesario construir una nueva forma de representación: usando barras o la recta numérica.

- En general, la modificación de las condiciones de un problema aditivo permite transitar de un tipo de representación a otro. Por ejemplo: al aumentar el ámbito numérico, pasamos de cubos a barras, o al cambiar la naturaleza de los datos pasamos de cinta numerada a recta numérica.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad, comente los puntos que se indican a continuación (puede usar la diapositiva 30):

- En esta actividad nos vimos enfrentados a analizar cómo una representación gráfica de un problema debe modificarse al cambiar algunas de sus variables, tales como el ámbito numérico o la naturaleza de los datos.

- Así, el uso de una nueva forma de representación surge como respuesta a las limitaciones que presentan otras representaciones al hacer un cambio en las condiciones de un problema.

VOLVER

LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

En la última actividad de esta clase vamos a establecer las principales ideas trabajadas respecto al uso del material concreto y su relación con las representaciones manipulativas y gráficas (puede usar la diapositiva 31).

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- En la primera parte se espera que los estudiantes logren representar con facilidad el problema. Una posible representación es la siguiente:

- Al analizar las dificultades que se generan en la representación de un problema cuando aumentamos el ámbito numérico, los estudiantes podrían mencionar que representarlo con cubos se vuelve tedioso o poco práctico, debido a que se tendrían que dibujar muchos cubos.

- Al proponer una nueva forma de representar un problema después de aumentar el ámbito numérico, se espera que los estudiantes se acerquen a una representación de barra (no dibujando cada uno de los cubos) o a una recta numérica (por ejemplo, representando 15 en una posición y 80 como un salto en la recta).

- En el Problema 2 de la pregunta 4 es posible que los estudiantes tengan dificultades para formular el nuevo problema cuando deben modificar la naturaleza de los datos. En este caso, podría preguntar: *¿qué información nos entregan los datos del primer problema?, ¿cómo se cuantifica la harina inicialmente?, ¿cómo podemos modificar estos datos para trabajar con medidas continuas?*

Revisando lo aprendido en la clase

Actividad de sistematización

Tiempo: 15 min.
Modalidad: De curso completo.
Materiales: Hoja de la actividad 5. Ficha de sistematización.

PROPÓSITO

Con esta actividad se busca que los futuros profesores sistematicen las ideas centrales respecto del uso de representaciones para problemas aditivos.

Fecha: _____

Nombre: _____

Unidad de Aprendizaje Representaciones de Situaciones Aditivas
Hojas de trabajo - Clase 1

Actividad 5

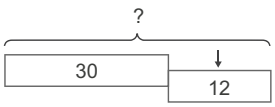
Trabajo de curso completo
Según lo trabajado en esta clase, respondan las siguientes preguntas:

1. ¿Consideran que todas las representaciones (concretas o gráficas) son igualmente adecuadas para los distintos tipos de problemas?

2. En la clase hemos trabajado con materiales concretos y con representaciones gráficas. ¿Cuál es la principal diferencia que observan al trabajar con cada una de ellas?

3. ¿Por qué creen que es necesario que los estudiantes transiten de materiales concretos a representaciones más abstractas?

4. ¿Qué podría indicar la flecha en esta representación?



Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Se espera que en las respuestas se refleje el trabajo realizado en actividades anteriores.

VER MÁS +

Incentive la argumentación de las respuestas. Revise la propuesta de gestión.

VER MÁS +

En el cierre debe considerar que esta actividad es la última de la clase. Revise los puntos sugeridos.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (5 min)

Se sugiere invitar a los estudiantes a responder en forma individual las preguntas propuestas para esta actividad, indicándoles que se trata de una actividad de cierre.

VOLVER

DISCUSIÓN DE CURSO COMPLETO (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar la discusión:

- Para comenzar, invite a los estudiantes a compartir las respuestas a las preguntas de la actividad. Se aconseja revisar cada pregunta por separado.
- Revise distintas respuestas de los estudiantes y pida que argumenten.
- En la primera pregunta motívelos a explicar y ejemplificar por qué una representación puede ser más o menos adecuada para algún tipo de situación aditiva.
- En la segunda y tercera pregunta motívelos a argumentar acerca de las ventajas y limitaciones que tiene cada uno de los materiales y representaciones trabajados en la clase.

VOLVER

CONCLUSIÓN DE LA DISCUSIÓN (5 min)

Como conclusión se aconseja considerar las siguientes ideas:

- Destaque el alcance y las limitaciones de los distintos tipos de materiales respecto de los problemas aditivos de composición, cambio o comparación.
- Una representación adecuada de un problema aditivo debe permitir, al menos, identificar las tres cantidades involucradas (los datos e incógnita) e, idealmente, visualizar la acción.
- La modificación de las condiciones de un problema aditivo permite transitar de un tipo de representación a otro. Por ejemplo: al aumentar el ámbito numérico, pasamos de cubos a barras, o al cambiar la naturaleza de los datos pasamos de cinta numerada a recta numérica.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Al finalizar la clase, entregue la ficha de sistematización y comente los puntos que se indican a continuación (puede usar las diapositivas 36 y 37):

- El material concreto o manipulativo es algo que existe físicamente en nuestro entorno y que el estudiante puede manipular. Las representaciones pictóricas no son directamente manipulables y suponen un primer paso en la abstracción. Además, son más accesibles porque solo requieren de lápiz y papel.

- Trabajar con material concreto permite realizar las acciones; en cambio, en una representación pictórica solo es posible dibujar o visualizar una imagen estática que modela una situación aditiva.

- No todas las representaciones (concretas o pictóricas) son igualmente adecuadas para modelar cualquier problema. Esto se debe a que cada representación revela y oculta distintas propiedades de los datos y de las relaciones matemáticas involucradas en los problemas.

- Cuando se realiza el tránsito entre representaciones, hay aspectos que se visibilizan mientras que otros se ocultan. Por ejemplo, al pasar de los cubos al diagrama de barra la unidad se invisibiliza, lo que permite representar situaciones con un ámbito numérico mayor. Por otra parte, el paso a representaciones gráficas allana el camino para la introducción de representaciones más abstractas.

VOLVER

LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

En la siguiente clase seguiremos profundizando el uso de representaciones para modelar situaciones aditivas. Trabajaremos con mayor énfasis las representaciones gráficas, estudiando cuáles son las más adecuadas según los datos del problemas y la relación entre ellos (puede usar la diapositiva 39).

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- En caso de disponer de poco tiempo puede realizar la actividad de forma colectiva.

- Se espera que la respuesta de los estudiantes a la primera pregunta sea que no todas las representaciones son igualmente adecuadas y den ejemplos de problemas en los que hubo materiales o representaciones gráficas que les resultaron más fáciles para modelarlos.

- En cuanto a la segunda pregunta se espera que algunas de las diferencias mencionadas por los estudiantes sean que el material concreto se puede manipular y las representaciones gráficas no, o que estas últimas permiten trabajar con problemas con un ámbito numérico mayor.

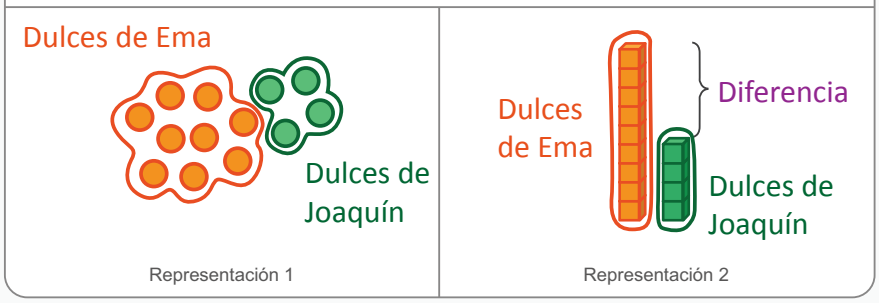
- Para la última pregunta se espera que haya variedad de respuestas, o que tiendan a ser menos precisas. Es posible que los estudiantes hagan referencia a la actividad 4 y mencionen que ampliar el ámbito numérico o modificar la naturaleza de los datos motiva el uso de nuevas representaciones gráficas.

RESPUESTAS EXPERTAS

Actividad	Respuesta experta
Actividad 1 Representando situaciones aditivas con material concreto	**1.** Al completar la tabla, los estudiantes deberían registrar la siguiente información respecto de los problemas.

Problema	Tipo de situación	Material con que se puede representar	Dificultades
Para su cumpleaños, Ema adquirió 5 botellas de bebida, y como consideró que no le iban a alcanzar, compró 4 más. ¿Cuántas botellas de bebida tiene ahora?	Cambio o transformación	○ **Piezas**	
		○ **Cubos unitarios**	
		○ **Cinta numerada**	
Para su cumpleaños, Ema invitó a 5 amigas y a 4 amigos. ¿Cuántos invitados tuvo en su fiesta?	Composición	○ **Piezas**	
		○ **Cubos unitarios**	
		○ Cinta numerada	No es posible representar las cantidades (datos) del problema y la acción, en una misma cinta numerada.
Ema recogió 9 dulces de la piñata y Joaquín 4. ¿Cuántos dulces más que Joaquín recogió Ema?	Comparación	○ **Piezas**	Para representar la diferencia (incógnita) es necesario ordenar las piezas de manera que se pueda hacer una correspondencia uno a uno entre ellas.
		○ **Cubos unitarios**	
		○ Cinta numerada	No es posible representar las cantidades (datos) del problema y la incógnita, en una misma cinta numerada.

Actividad	Respuesta experta
	2. Al analizar qué material es más adecuado para representar los problemas, los estudiantes deberían incorporar en sus respuestas algunas de las siguientes ideas: • En el primer problema las piezas, los cubos unitarios y la cinta numerada son adecuados para representar la situación aditiva, que en este caso es un cambio o transformación. Con las piezas o los cubos unitarios se puede representar la cantidad inicial, el cambio y, además, visualizar la cantidad final. En la cinta numerada es posible representar la cantidad inicial marcando el cardinal sobre ella. El cambio, en tanto, se representa avanzando desde este punto tantos espacios como lo indica la segunda cantidad. La cantidad final se puede visualizar en el espacio de la cinta al que se llega. • En el segundo problema, que corresponde a una situación de composición, los materiales más adecuados para representarlo son las piezas y los cubos unitarios. Ambos materiales permiten representar las cantidades dadas en el problema (partes) y la cantidad que se obtiene al juntarlas (todo). Se debe hacer notar que la acción relacionada con este tipo de situación se ve reflejada en el acto de juntar las partes. • En el tercer problema, que corresponde a una comparación, el material más adecuado para representarlo es el set de cubos unitarios. Con ellos es posible representar en columnas las dos cantidades que se necesita comparar, ya que al ubicarlas en un origen común, permiten visualizar la diferencia. Las piezas también pueden ser adecuadas para representar una comparación; sin embargo, será necesario ordenarlas en filas para visualizar la diferencia.
Actividad 2 Identificando los datos y la incógnita	**1.** Al marcar sobre las imágenes los datos y la incógnita, los estudiantes deberían obtener una representación como la siguiente:

Actividad	Respuesta experta
	2. En la respuesta de los estudiantes deberían estar presentes las siguientes ideas: • Con las piezas es posible marcar las cantidades involucradas (datos) y también la incógnita. Esta se puede representar encerrando las piezas que corresponden a cada cantidad en un solo grupo. Esta forma de representación permite visualizar la relación entre las cantidades, que en este caso corresponde a la acción de juntar. • Con la cinta numerada se pueden representar las cantidades involucradas (datos) marcando sobre la cinta los cardinales correspondientes a cada una; sin embargo, no es posible representar la incógnita usando la misma cinta, ya que para hacerlo sería necesario resolver el problema, con lo que se perdería el sentido del uso de una representación. La misma dificultad se manifiesta cuando se quiere representar la acción en la cinta numerada.
	1. Al marcar sobre las imágenes, los datos y la incógnita, los estudiantes deberían obtener una representación como la siguiente: **Ema recogió 9 dulces de la piñata y Joaquín 4. ¿Cuántos dulces más que Joaquín recogió Ema?** 
	2. En la respuesta de los estudiantes deberían estar presentes al menos las siguientes ideas: • Con las piezas es posible representar las cantidades que se necesita comparar (datos), pero no se puede representar la incógnita si se utiliza una distribución espacial como la que muestra la imagen. Para visualizar la incógnita y la relación entre las cantidades, sería necesario ordenar las piezas de manera que se pueda hacer una correspondencia uno a uno. • Con los cubos unitarios se pueden representar las cantidades que se requiere comparar (datos) y la incógnita: las cantidades a través de una barra formada con los cubos, en tanto la incógnita se visualiza al ubicar una barra al lado de la otra, a partir de un origen. Esta misma forma de presentación permite visualizar la relación entre los datos.

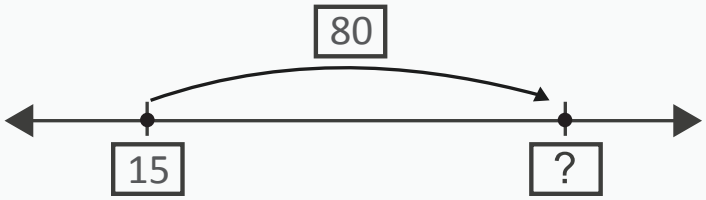
Actividad	Respuesta experta
Actividad 3 Caracterizando los tipos de material concreto	**1.** Al completar la tabla, los estudiantes deben marcar un solo material en cada fila. Esta respuesta dependerá de las apreciaciones de cada uno. Sin embargo, se espera que en la primera fila marquen cualquiera de los tres materiales; que en la segunda señalen los cubos unitarios; que en la tercera marquen las piezas o cubos unitarios, y que en la cuarta fila marquen la cinta numerada.
	2. Para justificar la importancia de disponer de una variedad de materiales concretos al estudiar los problemas aditivos, se espera que los estudiantes señalen algunas de las siguientes ideas: • Los materiales concretos permiten representar las cantidades involucradas en un problema aditivo y establecer las relaciones entre ellas. • Hay materiales concretos que son más adecuados que otros para representar un tipo de situación aditiva. • La pertinencia de un material para representar una situación aditiva depende de sus características y de sus posibilidades para representar la acción involucrada en el enunciado y la naturaleza de los datos.
Actividad 4 Dibujando representaciones de problemas aditivos	**1.** Una representación con cubos de la situación es la siguiente:
	2. Entre las dificultades que pueden señalar los estudiantes debe estar presente al menos una de las siguientes ideas: Al aumentar el ámbito numérico, se requiere una gran cantidad de cubos para representar la situación. Además, este aumento hará que el proceso de construir la representación sea más lento y tedioso.

Actividad	Respuesta experta

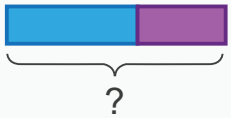
3. Los estudiantes podrían proponer distintas alternativas para representar el problema. Por ejemplo, podrían utilizar barras o una recta numérica.

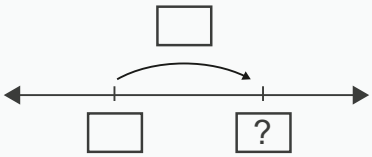
Una representación del problema usando barras es la siguiente:

Otra representación del problema usando la recta numérica es la siguiente:



4. Al formular los problemas con las nuevas condiciones, los estudiantes podrían completar las tablas de la siguiente manera:

Nueva condición: Aumento del ámbito numérico.	
Nuevo problema: Amelia y Víctor son hermanos. Amelia tiene 20 manzanas y Víctor tiene 15. ¿Cuántas manzanas tienen en total?	**Representación**: diagrama de barras. 

Nueva condición: Modificación de la naturaleza de los datos (de lo discreto a lo continuo).	
Nuevo problema: En un molino se produjeron 25 kilos de harina durante la mañana, y 7 más durante la tarde. ¿Cuántos kilos de harina se elaboraron ese día en el molino?	**Representación**: Recta numérica. 

Actividad	Respuesta experta
Actividad 5 Revisando lo aprendido en la clase	**1.** Las respuestas a la primera pregunta deben incluir algunas de las siguientes ideas: • Para representar problemas de cambio, los cubos, las piezas y la cinta numerada son materiales apropiados. • Para representar problemas de composición, los cubos y las piezas son pertinentes, mientras que la cinta numerada no permite visualizar la acción. Por lo anterior, la cinta numerada no se considera un material adecuado para representar este tipo de problema. • En cuanto a los problemas de comparación, los cubos unitarios resultan adecuados para visualizar los datos y la acción, mientras que la cinta numerada permite visualizar la diferencia entre las cantidades, pero no necesariamente cuantificarla de manera simple (sobre todo cuando la diferencia es amplia). Por otra parte, las piezas también pueden ser un material apropiado para representar este tipo de problemas cuando las piezas se encuentran ordenadas para realizar una correspondencia uno a uno y así poder visualizar la diferencia. • El diagrama de barras se utiliza cuando el ámbito numérico es mayor y se vuelve tedioso representar el problema con cubos u otro material. • La recta numérica es adecuada para representar problemas con datos de naturaleza continua. • Una representación adecuada de un problema aditivo debe permitir, al menos, identificar las tres cantidades involucradas (los datos e incógnita) e, idealmente, visualizar el significado y la acción.
	2. En cuanto a la segunda pregunta, se deben incluir las siguientes ideas: • El material concreto se puede manipular, mientras que las representaciones gráficas no. • Las representaciones gráficas permiten abordar problemas con un ámbito numérico mayor. • Se puede recurrir a las representaciones gráficas en cualquier momento; solo se necesita contar con lápiz y papel, mientras que, para trabajar con material concreto, es necesario tener el material de manera física.

Actividad	Respuesta experta
	• El hecho de poder manipular el material concreto hace que se puedan visualizar mejor y de manera más explícita los datos, la incógnita y la relación entre ellos. • El trabajo con material concreto ayuda a comprender y utilizar de manera adecuada las representaciones más abstractas. • Las representaciones gráficas son generalizables a cualquier tipo de problema aditivo.
	3. Para la última pregunta podría haber diversidad de respuestas. Algunas de ellas pueden ser: • Para tener una comprensión global de las situaciones aditivas, es necesario trabajar con los estudiantes una variedad de tipos de problemas. Para esto se deben modificar distintos aspectos de los problemas, tales como el ámbito numérico, la acción involucrada, el modelo que lo resuelve, la naturaleza de los datos, entre otros. Con el fin de poder representar esta diversidad de problemas aditivos, se debe propiciar el tránsito de representaciones concretas a otras más abstractas. • La modificación de las condiciones de un problema aditivo permite transitar de un tipo de representación a otra. Por ejemplo: al aumentar el ámbito numérico, pasamos de cubos a barras, o al cambiar la naturaleza de los datos, pasamos de cinta numerada a recta numérica.

PLANIFICACIÓN
CLASE 2

UAFI: Representaciones de situaciones aditivas

CLASE 1
Representaciones concretas y gráficas

CLASE 2
Comparando representaciones gráficas

TAREA 1
Conociendo algunas representaciones gráficas

TAREA 2
Armando pares

CLASE 2: COMPARANDO REPRESENTACIONES GRÁFICAS

RESUMEN DE LA CLASE

Meta de la clase	Al finalizar la clase se espera que los futuros profesores[1] logren evaluar el uso de ciertas representaciones, considerando como criterio su pertinencia en función de las características del problema aditivo, y formular problemas aditivos a partir de representaciones.
Descripción de la clase	La clase comienza con una actividad de exploración en la que los estudiantes deben evaluar la representación gráfica dada para un problema. Continúa con una actividad en la que tienen que identificar las características de los problemas aditivos que condicionan el uso de determinadas representaciones. Posteriormente, se propone que los futuros profesores establezcan la relación entre la naturaleza de los datos de un problema, la acción involucrada y la/s representación/es más adecuada/s. Luego, de acuerdo con este análisis deberán formular problemas aditivos a partir de representaciones dadas. Se finaliza con una actividad de sistematización en la que se establecen las ideas centrales del trabajo realizado en la clase.

[1] Respecto del uso de lenguaje inclusivo: Con el propósito de no provocar una saturación gráfica que dificulte la comprensión de la lectura, en este documento no se considera el uso de “los/las” u “o/a” para hacer referencia a ambos géneros de manera conjunta. En su lugar, se utilizan términos como “el futuro profesor”, “el estudiante” y “el profesor” y sus respectivos plurales para aludir de manera inclusiva a hombres y mujeres. Sin embargo, durante la gestión de la clase se sugiere la utilización de lenguaje inclusivo que invite a los y las estudiantes a involucrarse activamente en las actividades.

Aprendizajes esperados	Al finalizar la clase se espera que el estudiante: • Reconozca representaciones gráficas que permiten visualizar la acción de un problema aditivo. • Evalúe la pertinencia de modelar un problema con una representación dependiendo de las características de los datos y de la incógnita. • Represente problemas aditivos utilizando de manera pertinente diagramas gráficos. • Formule problemas aditivos, dada una representación gráfica, e identifique los datos, la incógnita y la acción modelada.
Conocimientos previos	• Clasificación de problemas aditivos: composición, cambio y comparación. • Distinguir en un problema aditivo la frase que modela el enunciado y la frase numérica que lo resuelve. • Modelos asociados a los problemas aditivos.
Materiales	Estudiantes • Hojas de trabajo del estudiante. Profesor • Computador. • Proyector.
Tiempo total estimado	85 min.

ESQUEMA DE LA CLASE

Tipo de actividad	Actividades	Tiempo (T) Modalidad (M)
Exploración	**Actividad 1: Representando la acción** Con esta actividad se busca que los futuros profesores analicen si una representación gráfica modela de forma adecuada la acción de un problema, y a partir de eso propongan modificarla o reemplazarla.	T: 15 min M: En parejas y de curso completo.
Construcción y profundización	**Actividad 2: Identificando los datos en las representaciones** Con esta actividad se espera que los estudiantes identifiquen características de los datos del problema, que condicionan el uso de determinadas representaciones.	T: 15 min M: En parejas y de curso completo.
Sistematización	**Actividad 3: Resumiendo** Con esta actividad se persigue que los futuros profesores asocien las características de un problema, tales como la acción y la naturaleza de los datos, con una representación adecuada de él.	T: 20 min M: En parejas y de curso completo.
Construcción y profundización	**Actividad 4: Formulando problemas** Esta actividad está centrada en que los futuros profesores formulen problemas aditivos a partir de una representación gráfica dada, identificando datos, incógnita y posible acción representada.	T: 15 min M: Individual y de curso completo.
Sistematización	**Actividad 5: Sistematizando lo aprendido** El foco de esta actividad está orientado a que los futuros profesores sistematicen las ideas trabajadas en la unidad respecto a las representaciones, sus características, su uso y su pertinencia dependiendo de la acción y la naturaleza de los datos.	T: 15 min M: De curso completo.

Representando la acción

Actividad de exploración

Tiempo: 15 min.
Modalidad: En parejas y de curso completo.
Materiales: Hoja de la actividad 1.

PROPÓSITO

Con esta actividad se busca que los futuros profesores analicen si una representación gráfica modela de forma adecuada la acción de un problema, y a partir de eso propongan modificarla o reemplazarla.

Fecha: _____

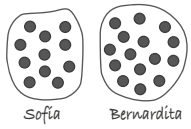
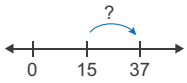
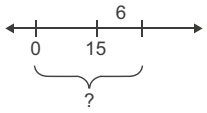
Nombre: _____

Unidad de Aprendizaje Representaciones de Situaciones Aditivas
Hojas de trabajo - Clase 2

Actividad 1

Trabajo en parejas

Establezcan si la siguiente representación les parece adecuada para visualizar la acción en cada uno de los problemas, y expliquen su respuesta. Si no fuese el caso, propongan qué modificaciones le harían o si la reemplazarían por una de otro tipo que permita comunicar de mejor forma dicha acción. Dibujen esta nueva representación.

Problemas	¿Es adecuada? ¿Por qué?	Nueva representación
Para su cumpleaños, Sofía le pidió a Bernardita que le ayudara a inflar globos. Si Bernardita infló 15 globos y la cumpleañera 11, ¿cuántos globos más infló Bernardita? 		
La señora María tiene en su parcela 37 aves entre gallinas y patos. Si son 15 gallinas, ¿cuántos patos tiene? 		
En un juego de mesa, Marcelo estaba en la casilla 15. Lanzó el dado y avanzó 6 puestos. ¿En qué posición se encuentra ahora? 		

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Observe si los estudiantes proponen una nueva representación para el primer y segundo problema.

VER MÁS +

Solicite a los estudiantes que argumenten sus representaciones preguntando si es posible visualizar la acción.

VER MÁS +

Una representación es adecuada a un tipo de problema si permite visualizar la naturaleza de los datos y la acción.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Invítelos a discutir en parejas, y a que se enfoquen en los aspectos de las representaciones que permiten visualizar las acciones de los problemas y en los que podrían estar ausentes.
- En el primer problema, fíjese si los estudiantes son capaces de modificar la representación, de manera que los elementos queden ordenados para hacer una correspondencia uno a uno, o si utilizan otro material, como cubos unitarios o barras.
- Identifique a aquellos estudiantes que en el segundo problema proponen una representación de barras o alguna en la que se distingan las partes y el todo.
- En el último problema observe si los estudiantes son capaces de modificar la representación dada, de manera de visualizar la naturaleza del dato “6 puestos” (lo que avanzó).

VOLVER

COMPARTIR RESULTADOS (5 min)

Para la puesta en común, puede serle útil considerar las siguientes sugerencias de gestión:

- En cada problema pida a los estudiantes que compartan sus respuestas. Solicite que argumenten por qué señalan que son adecuadas o no, y por qué proponen una modificación o una nueva representación.
- Analice las propuestas haciendo notar cómo estas permiten representar la acción involucrada en los problemas y la naturaleza de los datos. Puede preguntar: *¿es pertinente utilizar esta representación, dada la naturaleza de los datos del problema?, ¿es posible visualizar la acción en la representación dada en la actividad?, ¿de qué manera?, ¿por qué en la modificación que propones se puede visualizar la acción?*
- Dirija la discusión de tal forma que los estudiantes observen que una representación es más adecuada si en ella se visualiza claramente la acción del problema.

VOLVER

SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS (5 min)

Se sugiere asociar las respuestas de los estudiantes a las siguientes ideas:

- Una buena representación para un problema aditivo debe permitir que se visualice la acción involucrada en el problema y reflejar la naturaleza de los datos.
- En una comparación se debe utilizar una representación que permita visualizar la cantidad mayor, la menor y la diferencia. Por ejemplo, una representación adecuada es aquella que permite hacer una correspondencia uno a uno.
- Para los problemas de composición, una representación apropiada, debe permitir distinguir el modelo parte - parte - todo. Para ello, se requiere que considere en forma independiente cada una de las partes.
- Si bien la recta numérica es apropiada para representar problemas de cambio, es necesario introducir algún símbolo que permita visualizar la naturaleza de los datos. Por ejemplo, una flecha para indicar la cantidad que se avanza o que se agrega.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad, comente los puntos que se indican a continuación (puede usar las diapositivas 5):

- La representación de un problema aditivo debe permitir visualizar la acción involucrada en el enunciado y reflejar la naturaleza de los datos. Estas características son una herramienta para comprender el problema y facilitar su resolución.
- Así, dependiendo del tipo de situación aditiva, hay representaciones gráficas que son más adecuadas:
  - En el caso de los problemas de composición es importante que se visualice el modelo parte - parte - todo.
  - Para los problemas de cambio, se debe poder visualizar la cantidad inicial, el cambio y la cantidad final.
  - Para los problemas de comparación, es importante que la representación distinga las cantidades que se van a comparar y la diferencia.

VOLVER

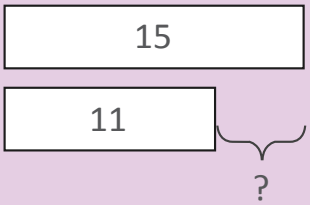
LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

En la próxima actividad complementaremos lo anterior a través del estudio de algunas características de los problemas, que hacen que algunas representaciones gráficas sean más apropiadas que otras (se sugiere usar la diapositiva 6).

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Es posible que las parejas noten que las representaciones no modelan de forma adecuada los problemas y que prefieran modificar la original sin plantearse la opción de reemplazarla por una de otro tipo. En este caso, observe las modificaciones que hacen, y si no son pertinentes, invítelos a proponer una nueva representación.

- La mayoría de las parejas debería observar que la representación del primer problema, de comparación, no es adecuada, ya que no se aprecia la diferencia. Por tanto, se espera que propongan usar otra representación, como la de barras.



- Es probable que los estudiantes consideren apropiada la recta numérica para representar el segundo problema sin notar que la flecha en la incógnita podría estar indicando la acción de avanzar, más que la de separar; es decir, está relevando el carácter dinámico del cambio. En este caso, puede preguntar: *¿qué significa la flecha en la representación del problema?, ¿qué relación tiene con la acción y naturaleza de los datos en el problema?*

- Es factible que los estudiantes consideren que la representación en la recta del último problema modela adecuadamente la acción de avanzar, sin notar que la incógnita es una posición y no una cantidad de casillas como sugiere el dibujo. En este caso, puede formular preguntas respecto de cómo se refleja la naturaleza de los datos en la representación del problema.

- Los estudiantes podrían creer que una representación es apropiada si permite resolver el problema. Hágales notar que, si bien esa es una condición deseable, además deben favorecer la comunicación de las ideas matemáticas.

- En ocasiones, la diferencia entre usar una representación u otra puede ser sutil. En particular, para el segundo problema, la recta numérica puede ser útil para representar la operación cuando ya se conoce la solución. Sin embargo, si el objetivo es ayudar a descubrir la operación que lo resuelve, la barra es más adecuada.

Identificando los datos en las representaciones

Construcción y profundización

Tiempo: 15 min.
Modalidad: En parejas y de curso completo.
Materiales: Hojas de la actividad 2.

PROPÓSITO

Con esta actividad se espera que los futuros profesores identifiquen características de los datos del problema que condicionan el uso de determinadas representaciones.

Fecha: _____

Nombre: _____

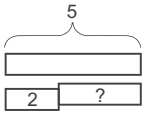
Unidad de Aprendizaje Representaciones de Situaciones Aditivas
Hojas de trabajo - Clase 2

Actividad 2

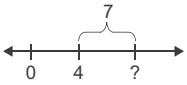
Trabajo en parejas

Para cada uno de los problemas, se proponen dos representaciones. Observen la información que se presenta en cada tabla y completen.

1. ¿Cuál creen que es la representación más adecuada? Indiquen la o las características de los datos del problema que justifican su elección.

Problema 1	Representación 1	Representación 2
El maestro Juan Carlos tiene un listón de madera de 5 m de largo. Para una construcción, cortó 2 m. ¿Cuánto mide el sobrante?		
Representación más adecuada: _____ Características de los datos del problema que justifican su elección:		

2. ¿Cuál creen que es la representación más adecuada? Indiquen la o las características de los datos del problema que justifican su elección.

Problema 2	Representación 1	Representación 2
Andrés tiene 4 toallas de baño y 7 de playa, ¿Cuántas toallas tiene en total?		
Representación más adecuada: _____ Características de los datos del problema que justifican su elección:		

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Detecte distintas respuestas para el cuarto problema, ya que ambas representaciones pueden ser adecuadas.

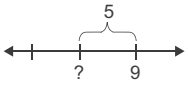
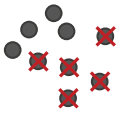
VER MÁS +

Puede ser necesario aclarar la diferencia entre cantidades discretas y magnitudes continuas.

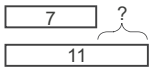
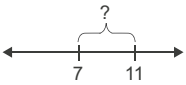
VER MÁS +

Actividad 2

3. ¿Cuál creen que es la representación más adecuada? Indiquen la o las características de los datos del problema que justifican su elección.

Problema 3	Representación 1	Representación 2
Eduardo preparó esta mañana un flan. Para que su postre repose, lo guarda en el refrigerador que está a una temperatura de 9° C. Eduardo quiere que el flan esté listo para el almuerzo, por lo que manipula el control bajando 5° C. ¿Cuál es la temperatura actual del refrigerador?		
Representación más adecuada: _____ Características de los datos del problema que justifican su elección:		

4. ¿Cuál creen que es la representación más adecuada? Indiquen la o las características de los datos del problema que justifican su elección.

Problema 4	Representación 1	Representación 2
Juan Carlos y Camila están jugando Monopoly, y en la primera jugada él llegó al casillero nº 7 y ella al casillero nº 11. ¿Cuántos casilleros más adelante se encuentra Camila que Juan Carlos?		
Representación más adecuada: _____ Características de los datos del problema que justifican su elección:		

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Para el tercer problema pueden aparecer dos tipos de argumentos, ya que ambas representaciones son apropiadas.

VER MÁS +

Destaque la naturaleza de los datos como una característica que distingue a los problemas aditivos.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Invítelos a desarrollar la actividad, destacando que deben argumentar sus elecciones.
- Monitoree el trabajo y, en caso que sea necesario, oriente a las parejas para que la justificación se centre en las características de los datos del problema y no en la acción.
- Observe las respuestas de los estudiantes en el primer problema. Fíjese en aquellos que eligen la Representación 1 y considere sus argumentos para la discusión matemática.
- En el cuarto problema ambas representaciones pueden ser adecuadas. Fíjese en las parejas que tengan distintas respuestas para considerarlas en la discusión.

VOLVER

DISCUSIÓN DE CURSO COMPLETO (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar la discusión:

- Oriente a los estudiantes para que justifiquen en función de la naturaleza de los datos, es decir, si los datos representan posiciones o cantidades, o bien si corresponden a magnitudes continuas o discretas. Pídales que argumenten por qué descartaron la otra representación.
- Si lo considera necesario, puede dedicar un momento a aclararles la diferencia entre magnitudes continuas y discretas mediante un ejemplo.
- Si en el primer problema las parejas eligen la Representación 1, hágales notar que los datos corresponden a una magnitud continua (longitud). Para guiar esta discusión puede preguntar: *¿qué representa el 5?, ¿qué pasaría si en lugar de 5 m fueran 5,5 m?*
- En el último problema ambas representaciones son adecuadas, por lo que se sugiere contrastar los argumentos de los estudiantes que escojan una u otra representación. Es usual usar barras para representar problemas de comparación, y también es adecuado representar posiciones (número de casillero) usando la recta numérica.

VOLVER

CONCLUSIÓN DE LA DISCUSIÓN (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes ideas al cierre de la discusión:

- Cuando en un problema aditivo los datos expresan medidas continuas, como metros, kilogramos, grados Celsius, las representaciones de conjuntos son poco adecuadas, ya que no permiten expresar la continuidad de las magnitudes involucradas. Aun en el caso de cantidades discretas, las representaciones de conjuntos pueden ser poco apropiadas si el ámbito numérico es muy grande.
- Para los datos que expresan una posición, las representaciones más pertinentes son aquellas que relevan el carácter ordinal de los números.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad, comente los puntos que se indican a continuación (puede usar las diapositivas 12):

- Una característica que distingue a los problemas aditivos es la naturaleza de los datos, que pueden corresponder a cantidades discretas o medidas continuas. Esta distinción hace que una representación sea más adecuada que otra para un problema aditivo.
- Esta actividad nos permitió profundizar acerca de la pertinencia de modelar un problema con una representación u otra dependiendo de las características de los datos y de la incógnita.

VOLVER

LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

En la próxima actividad sistematizaremos estas ideas estableciendo cuáles representaciones podrían ser más adecuadas para modelar determinadas acciones y tipos de datos (puede usar la diapositiva 13).

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Es posible que en el primer problema algunas parejas elijan como más adecuada la Representación 1 argumentando que los datos del problema corresponden a números naturales. Sin embargo, se espera que la mayoría opte por la Representación 2 considerando que una barra es una representación más adecuada para medidas continuas.

- Es probable que en el segundo problema las parejas elijan la Representación 1 y que argumenten que los datos del problema corresponden a cantidades (toallas) y no a posiciones. También, podrían mencionar que esta es más adecuada debido a que la acción del problema es "juntar".

- Se espera que en el tercer problema la mayoría de las parejas elijan la recta numérica justificando que la acción del problema es "retroceder" o que el dibujo de la recta es más adecuado para representar medidas continuas.

- Es probable que en el tercer problema las respuestas estén divididas. Por un lado, las parejas podrían hacer lo siguiente:

    - Elegir la Representación 1, argumentando que usar barras es más natural para representar problemas de comparación por diferencia.

    - Escoger la recta numérica y justificar que los datos del problema representan posiciones (número de casilleros).

Resumiendo
Sistematización

Tiempo: 20 min.
Modalidad: En parejas y de curso completo.
Materiales: Hoja de la actividad 3.

PROPÓSITO

Con esta actividad se persigue que los futuros profesores asocien las características de un problema, tales como la acción y la naturaleza de los datos, con una representación adecuada de él.

Fecha: _____

Nombre: _____

Unidad de Aprendizaje Representaciones de Situaciones Aditivas
Hojas de trabajo - Clase 2

Actividad 3

Trabajo en parejas
Responde las preguntas que se plantean a continuación:

1. Además del ámbito numérico, ¿qué otras características de los problemas trabajados se deben considerar al elegir una representación que sea adecuada para un problema aditivo?

2. ¿Qué tipo de representación (C = conjunto, B = diagrama de barras, R = recta numérica) les parece más apropiada para visualizar las siguientes acciones? Completa en las casillas con la letra de la representación que consideres más pertinente.

Acción	Discretas	Continuas
Juntar - Separar (cantidades)		
Agregar - Quitar (cantidades)		
Avanzar - Retroceder (posiciones)		
Comparar por diferencia (cantidades o posiciones)		

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Comente la pregunta 1 de la actividad antes de trabajar en la pregunta 2.

VER MÁS +

Si observa dificultades para identificar las representaciones más adecuadas, apoye la gestión con los ejemplos de la tabla.

VER MÁS +

Podrían haber distintas respuestas en algunas casillas de la tabla y cierto consenso en otras.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Lea en conjunto con los estudiantes la pregunta 1 y gestione **en ese momento** una discusión de curso completo, de tal forma que los estudiantes mencionen como característica la acción y la naturaleza de los datos. Debe quedar establecido que la naturaleza de los datos se refiere a dos aspectos: (1) si son cantidades o posiciones, y (2) si son magnitudes continuas o discretas.

- Luego, solicite que completen la tabla trabajando en parejas. Fíjese en las respuestas de los estudiantes, verificando en qué acciones se observa relativo consenso y en cuáles hay variedad de respuestas.

- Identifique distintos tipos de respuestas en la tabla y considérelas para el momento de discusión.

VOLVER

DISCUSIÓN DE CURSO COMPLETO (10 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar la discusión:

- Al compartir las respuestas de la tabla, dirija la discusión de tal forma que los estudiantes entreguen argumentos para cada elección. Puede completar una tabla en la pizarra con las representaciones que hayan logrado consenso.

- Gestione de modo que las argumentaciones estén focalizadas en las características de la representación que se relaciona con el problema. Puede preguntar, *¿cómo se visualiza la acción en este tipo de representación?, ¿de qué manera se refleja la naturaleza de los datos?*

- Si observa que hay dificultades para identificar las representaciones más adecuadas, plantee un ejemplo según la acción y la naturaleza de los datos. Puede utilizar los siguientes problemas:

Acción	Discretas	Continuas
Juntar - Separar (cantidades)	Laura compró en la feria 10 manzanas rojas y 10 manzanas verdes. ¿Cuántas manzanas compró en total?	Laura compró en la feria 10 kilogramos de manzanas rojas y 10 kilogramos de manzanas verdes. ¿Cuántos kilogramos de manzanas compró en total?

Acción	Discretas	Continuas
Agregar - Quitar (cantidades)	Una fábrica cuenta con 75 bidones de leche para la producción de quesos. Si durante el lunes utilizan 8, ¿cuántos bidones quedan para el siguiente día?	Una fábrica cuenta con 75 L de leche para la producción de quesos. Si durante el lunes utilizan 8 L. ¿cuántos litros de leche quedan para el siguiente día?
Avanzar - Retroceder (posiciones)	Carlos en su entrenamiento deportivo corrió durante 10 cuadras y se detuvo a tomar agua. Luego avanzó 5 cuadras más. ¿Cuántas cuadras recorrió Carlos en su entrenamiento?	Carlos en su entrenamiento deportivo corrió durante 10 km y se detuvo a tomar agua. Luego avanzó 5 km más. ¿Cuántos kilómetros recorrió Carlos en su entrenamiento?
Comparar (cantidades o posiciones)	Marta vive a 6 cuadras de distancia del colegio, y Camila, vive en la misma dirección, pero a 9 cuadras. ¿A cuántas cuadras menos del colegio vive Marta que Camila?	Marta vive a 6 km de distancia del colegio, y Camila, vive en la misma dirección, pero a 9 km. ¿A cuántos kilómetros menos del colegio vive Marta que Camila?

VOLVER

CONCLUSIÓN DE LA DISCUSIÓN (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes ideas al cierre de la discusión:

- Cuando estudiamos problemas aditivos, el uso de representaciones está condicionado por el tipo de acción que se describe en el enunciado y por la naturaleza de los datos.
- Una representación con barras es adecuada tanto para datos discretos como continuos, y permite modelar los tres tipos de situaciones aditivas.
- Las representaciones con conjuntos son apropiadas solo cuando los datos del problema corresponden a cantidades discretas. Además, permiten modelar situaciones de composición o cambio.
- La recta numérica es más adecuada para representar medidas continuas; sin embargo, también se utiliza para cantidades discretas. Esta representación permite modelar situaciones de cambio o comparación.
- En los problemas que se refieren a posiciones, generalmente se utiliza la recta numérica para representar los datos y la acción.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad, comente los puntos que se indican a continuación (puede usar las diapositivas 16):

- Esta actividad nos permitió establecer cuáles representaciones resultan más adecuadas para modelar determinadas acciones y tipos de datos.
- Por ejemplo, vimos que:
  - Cuando los datos corresponden a cantidades discretas en un problema de composición, los diagramas de conjunto suelen ser más apropiados como representación.
  - En los problemas de cambio, si los datos son medidas continuas, se suele utilizar una recta numérica. Si son cantidades discretas, se pueden usar barras o diagramas de conjunto.

VOLVER

LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

Para lanzar la siguiente actividad, puede señalar que en la próxima actividad usaremos lo aprendido para trabajar en la formulación de problemas a partir de representaciones dadas (utilice las diapositivas 17).

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- En la primera pregunta se espera que los estudiantes no tengan dificultades en reconocer que la acción y la naturaleza de los datos son características que se deben considerar al elegir una representación adecuada para un problema aditivo.

- Al completar la tabla, es posible tener una variedad de respuestas en algunas casillas y un relativo consenso en otras. A modo de ejemplo, para la acción "avanzar/retroceder", es probable que la respuesta predominante para ambas casillas sea la recta numérica. Por el contrario, en la acción de "comparar" podrían aparecer mencionadas las barras y la recta.

- Es probable que los estudiantes tengan dificultades para imaginar un problema que cumpla con las acciones y la naturaleza de los datos dados, en cada casilla de la tabla. Se sugiere plantear ejemplos como los que aparecen en la tabla propuesta en la sección de Discusión de curso completo.

- Se espera que el curso llegue al acuerdo de que en algunos casos puede haber dos representaciones igualmente adecuadas, sin que una tenga ventajas sustantivas sobre otra.

Formulando problemas

Construcción y profundización

Tiempo: 15 min.
Modalidad: Individual y de curso completo.
Materiales: Hoja de la actividad 4.

PROPÓSITO

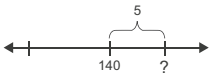
Esta actividad está centrada en que los futuros profesores formulen problemas aditivos a partir de una representación gráfica dada, identificando datos, incógnita y posible acción representada.

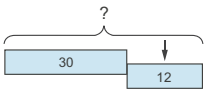
Fecha: _____

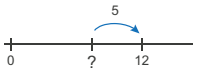
Unidad de Aprendizaje Representaciones de Situaciones Aditivas
Hojas de trabajo - Clase 2

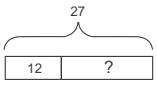
Actividad 4

Trabajo individual
Identifica una posible acción, los datos y la incógnita en la representación dada. Luego, formula un problema aditivo a partir de ella. Guíate por el ejemplo.

Representación	Acción, datos e incógnita	Problema
	**acción:** comparar por diferencia. **datos:** cantidad menor (140), diferencia (5). **incógnita:** cantidad mayor.	*En el colegio, los niños del 6° básico están siendo medidos. Juan mide 140 cm, 5 menos que su amigo Luis. ¿Cuánto mide Luis?*

Representación	Acción, datos e incógnita	Problema
		

Representación	Acción, datos e incógnita	Problema
		

Representación	Acción, datos e incógnita	Problema
		

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Si cuenta con poco tiempo, focalícese en las dos primeras representaciones.

VER MÁS +

Utilice el ejemplo para explicar lo que deben llevar a cabo los estudiantes en esta actividad.

VER MÁS +

En esta actividad no hay sola una respuesta correcta pues algunas representaciones modelan más de una acción.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Entregue la hoja y lea con los estudiantes el ejemplo, y enfatice que lo que se espera es que expresen los datos y la incógnita de acuerdo con el modelo, y no solamente sus valores numéricos.
- Invite a los estudiantes a completar la tabla de manera individual, y monitoree las respuestas que van registrando.
- En las representaciones 1 y 2 identifique a los estudiantes que tienen dificultades para reconocer que la incógnita corresponde a la cantidad inicial, y en el caso del primer problema, que la incógnita es mayor que la cantidad final.
- Fíjese si los estudiantes logran asociar las flechas de la primera y segunda representación con la acción de cambio.

VOLVER

DISCUSIÓN DE CURSO COMPLETO (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar la discusión:

- Oriente la discusión para que los estudiantes argumenten cómo completaron las casillas de la tabla. Puede focalizarse en las dos primeras representaciones, que generalmente presentan más dificultad para los estudiantes.
- Pregunte por la acción, datos e incógnita de las representaciones, y pida a los estudiantes que argumenten sus respuestas. Para motivar la discusión, puede preguntar: *según la representación con barras, ¿es mayor la cantidad inicial o la cantidad final?*
- Pida a algunos estudiantes escribir los problemas que formularon en la pizarra e invite a otros a analizar dichos problemas en función de la acción, datos e incógnita determinadas en la representación. Para argumentar los análisis que realizan, puede pedirles que subrayen información en el enunciado del problema.

VOLVER

CONCLUSIÓN DE LA DISCUSIÓN (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes ideas al cierre de la discusión:

- Puede preguntar, *¿de qué manera se refleja la acción en las representaciones?, ¿cómo se identifican los datos?*
- En las representaciones de una situación de cambio (dinámica) generalmente se utilizan flechas para indicar la transformación. Esto permite determinar la cantidad inicial, el cambio y la cantidad final, que son cruciales para formular un problema asociado a la representación.
- En las representaciones de una situación de composición la acción se representa con la unión de conjuntos o barras. Cada conjunto o barra corresponde a una parte, y el todo a la unión de ellas. Esta información permite formular problemas aditivos de composición, independiente de si la incógnita es una parte o el todo.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad comente los puntos que se indican a continuación (puede usar las diapositivas 21):

- En esta actividad pusimos a prueba los aprendizajes adquiridos en esta clase. Trabajamos en la formulación de problemas, que suele ser una tarea compleja, pero fundamental en la formación docente. Notemos que esta tarea planteada es inversa a la de representar un problema, lo cual enriquece el aprendizaje de este tema.
- Para formular problemas aditivos a partir de una representación gráfica, es fundamental identificar en ella la acción, los datos y la incógnita.
- Parte esencial del estudio de problemas aditivos es formular problemas. Esta tarea se puede desarrollar otorgando: parte de la información del problema, la pregunta del problema o una representación de él.

VOLVER

LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

En la próxima actividad se hará el cierre de la unidad sistematizando las ideas centrales sobre los tipos de representaciones y su pertinencia para los problemas aditivos (utilice la diapositiva 22).

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Se espera que de manera individual los estudiantes sean capaces de identificar los datos, la incógnita y la acción. En algunos casos se pueden presentar diferencias como las siguientes:
  - En la primera representación no debieran presentarse problemas para identificar la acción (quitar) por el sentido de la flecha. Sin embargo, pueden tener dificultades para reconocer que la incógnita corresponde a la cantidad inicial y que es mayor que la cantidad final.
  - En la segunda representación se podrían presentar respuestas distintas en cuanto a la acción. Por una parte se visualiza la acción de "avanzar", expresada con la flecha, aunque algunos estudiantes también la podrían relacionar con "agregar".
  - En la última representación, en la que se visualiza la acción de separar, algunos estudiantes también podrían considerar que representa la acción de "quitar".
- Tenga presente que en esta actividad no hay una única respuesta correcta, ya que algunas representaciones pueden modelar más de una acción. Sin embargo, deje claro que hay acciones que difícilmente se pueden visualizar en algunas de las representaciones. Puede preguntar: *¿Qué acciones se pueden visualizar en cada representación?, ¿por qué en la primera y la última representación no se visualiza la acción de comparar?*
- Los estudiantes podrían tener dificultades al formular los problemas porque piensan en la frase que lo resuelve, más que en la frase que lo modela.

Sistematizando lo aprendido

Sistematización

Tiempo: 15 min.
Modalidad: De curso completo.
Materiales: Hoja en blanco y ficha de sistematización.

PROPÓSITO

El foco de esta actividad está orientado a que los futuros profesores sistematicen las ideas trabajadas en la unidad respecto a las representaciones, sus características, su uso y su pertinencia dependiendo de la acción y la naturaleza de los datos.

Fecha: _____

Nombre: _____

Unidad de Aprendizaje Representaciones de Situaciones Aditivas
Hojas de trabajo - Clase 2

Actividad 5

Trabajo de curso completo
Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el rol que cumplen las representaciones (concretas o gráficas) en un problema aditivo?

2. ¿Por qué es importante disponer de distintos tipos de representaciones?

3. ¿Por qué es importante evolucionar de representaciones concretas a otras más abstractas?

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Esta actividad permite evaluar formativamente el aprendizaje de los estudiantes.

VER MÁS +

Recalque la posibilidad de usar representaciones concretas no solo en niveles iniciales, sino cuando el estudiante lo requiera.

VER MÁS +

El cierre de la clase se puede gestionar con la ficha de sistematización.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (5 min)

Invite a los estudiantes a responder en forma individual las preguntas propuestas para esta actividad. Indíqueles que se trata de una actividad de cierre.

VOLVER

DISCUSIÓN DE CURSO COMPLETO (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar la discusión:

- Para comenzar la discusión, invite a los estudiantes a compartir las respuestas a las preguntas de la actividad. Se sugiere revisar cada pregunta por separado.
- Considere distintas respuestas de los estudiantes y pida que argumenten.
- En la primera y segunda pregunta motívelos a explicar a través de ejemplos el rol de una representación, y por qué es importante disponer de distintos tipos.
- En la tercera pregunta motívelos a argumentar con más de una razón por qué es necesario transitar entre las representaciones concretas y abstractas.

VOLVER

CONCLUSIÓN DE LA DISCUSIÓN (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes ideas al cierre de la discusión:

- Destaque con los estudiantes que una representación permite comprender las relaciones entre los datos, la incógnita y la acción descrita en el enunciado del problema.
- La representación de un problema aditivo es una herramienta que hace posible comprenderlo y resolverlo. Representar es una habilidad matemática que se desarrolla y no un conocimiento que se debe memorizar.
- No todas las representaciones (concretas o pictóricas) son igualmente adecuadas para cualquier problema. Esto se debe a que cada representación revela y oculta distintas características de los datos y relaciones matemáticas involucradas en los problemas. Por este motivo, se hace necesario disponer de una variedad de representaciones.
- La amplia gama de contextos sobre los que se puede formular un problema aditivo conlleva una modificación de las condiciones en que se plantea. Por ejemplo: aumento del ámbito numérico o cambio en la naturaleza de los datos. Este aspecto limita el uso de representaciones concretas y algunas representaciones pictóricas, propiciando el tránsito a representaciones más abstractas.

- Los problemas en que la acción descrita en el enunciado no se corresponde directamente con la expresión aritmética que lo resuelve son difíciles de comprender para los estudiantes, quienes tienen dificultades para resolverlos. En este caso, transitar desde una representación gráfica a una concreta es una alternativa de gestión pedagógica que facilita el aprendizaje de los estudiantes.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Al finalizar comente los puntos que se indican a continuación (puede usar las diapositivas 25 y 26):

- Las representaciones son fundamentales en el trabajo matemático, ya que ayudan a **comprender** conceptos y procedimientos matemáticos complejos, a **resolver problemas** y a **comunicar** ideas a otros.

- Desarrollar la habilidad de representar requiere conocer distintos tipos de representaciones manipulativas y gráficas, y además tener la capacidad para **transitar** de manera flexible entre unas y otras.

- Disponer de distintos tipos de representaciones:
  - Enriquece la comprensión de conceptos y hace más cercano y accesible el contenido matemático para todo tipo de estudiantes.
  - Visibiliza y oculta distintas características de los objetos matemáticos. Esto permite planificar y gestionar procesos de enseñanza y aprendizaje de manera completa y progresiva.
  - Es indispensable para **evolucionar** desde representaciones más concretas hacia otras más simbólicas, ya sea por las propias condiciones del problema, como el ámbito numérico, por el nivel de abstracción de los estudiantes o por algún propósito pedagógico que se quiera conseguir.

- No existe una única manera de representar un problema aditivo. La elección de una representación depende de distintos factores, por ejemplo, los propósitos pedagógicos, el nivel de los estudiantes, el tipo de situación aditiva y la naturaleza de los datos, entre otros. En algunos casos, incluso puede haber dos representaciones igualmente adecuadas para el mismo problema.

Para finalizar la clase entregue la ficha de sistematización y lea con los estudiantes el recapitulemos. Puede comentar las ideas que aparecen en las diapositivas de la 28 a la 31.

VOLVER

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

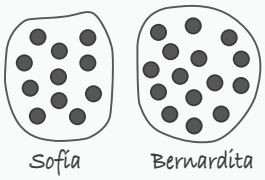
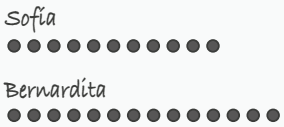
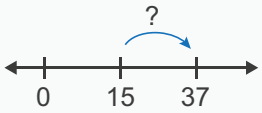
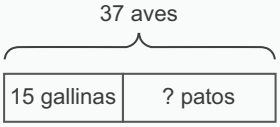
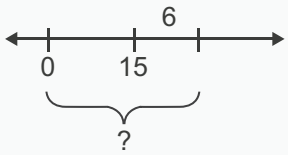
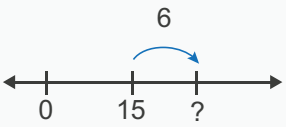
- En la primera pregunta, los estudiantes podrían argumentar que las representaciones facilitan la resolución del problema y que además ayudan a comunicar ideas matemáticas.

- Es posible que en la segunda pregunta, los estudiantes mencionen que la importancia radica en que las representaciones ocultan y visibilizan distintas características de un problema aditivo. Aunque se trabajó en clases, podrían mencionar que es importante contar con distintos tipos de representaciones porque hace más entretenido y motivador el aprendizaje.

- En la tercera pregunta es probable que los estudiantes argumenten que las representaciones concretas son útiles en los primeros años de escolaridad y que a medida que la matemática se vuelve más formal, es necesario trabajar con representaciones más abstractas. En este caso, se sugiere plantear como posibilidad que aunque se esté trabajando con representaciones gráficas, se pueden utilizar representaciones concretas cuando un estudiante lo requiera.

RESPUESTAS EXPERTAS

Actividad	Respuesta experta
Actividad 1 Representando la acción.	**1.** Al completar la tabla los estudiantes deberían registrar las siguientes ideas.

Problemas	¿Es adecuada? ¿Por qué?	Nueva representación
Para su cumpleaños, Sofía le pidió a Bernardita que le ayudara a inflar globos. Si Bernardita infló 15 globos y la cumpleañera 11, ¿cuántos globos más infló Bernardita?  	No es adecuada. El problema es de comparación y la representación de conjuntos no permite visualizar la diferencia entre las cantidades que se comparan, que en este caso corresponde a la incógnita.	Ajustar la representación dada ordenando los elementos de los conjuntos.  También, se puede usar barras para representar el problema.
La señora María tiene en su parcela 37 aves entre gallinas y patos. Si son 15 gallinas, ¿cuántos patos tiene?  	No es adecuada. El problema es de composición y la recta numérica no permite visualizar el modelo asociado a este tipo de acción: parte - parte todo.	Se puede usar barras o conjuntos para representar en forma adecuada el problema. Por ejemplo, si se utilizan barras se obtiene la siguiente figura. 
En un juego de mesa, Marcelo estaba en la casilla 15. Lanzó el dado y avanzó 6 puestos. ¿En qué posición se encuentra ahora?  	No es adecuada. Si bien para un problema de cambio la recta numérica es una representación adecuada, en este caso no se visualiza el significado del dato 6 puestos. Por otra parte, la forma de presentar la incógnita puede confundir a quien observa la representación.	Ajustar la representación incluyendo una flecha sobre el 6 que permita visualizar el significado de este dato. También se sugiere quitar la llave que representa la incógnita e incluir el signo de interrogación en la posición correspondiente 

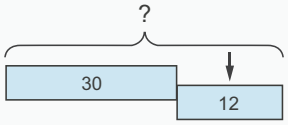
Actividad	Respuesta experta
Actividad 2 Identificando los datos en las representaciones.	**1.** En las respuestas se espera que estén presentes las siguientes ideas. • La representación más adecuada es la **2**. • Los datos del problema corresponden a medidas de longitud. La longitud es una magnitud continua, por tanto, es más apropiado representarla usando barras.
	2. Entre las respuestas se espera que estén presentes las siguientes ideas. • La representación más adecuada es la **1**. • Es un problema de composición cuyos datos corresponden a cantidades discretas: "cantidad de toallas". Por tanto, es más apropiado representarla usando conjuntos, en este caso cada elemento corresponde a un toalla.
	3. Entre las respuestas se espera que estén presentes las siguientes ideas. • La representación más adecuada es la **1**. • Los datos del problema corresponden a medidas de temperatura. La temperatura es una magnitud continua, por tanto, es más apropiado representarla usando una recta numérica.
	4. Entre las respuestas se espera que estén presentes las siguientes ideas. • Ambas representaciones son adecuadas. • Los datos del problema corresponden a posiciones. Si bien la recta numérica permite expresar de mejor forma la característica ordinal de los números naturales, las barras también pueden ser una buena representación para este tipo de datos.
Actividad 3 Resumiendo.	**1.** Entre las características se espera que mencionen: • La naturaleza de los datos, que se refiere a dos aspectos: (1) si son cantidades o posiciones, y (2) si son magnitudes continuas o discretas. • También podrían mencionar la acción descrita en el enunciado o tipo de problema aditivo: composición, cambio o comparación.

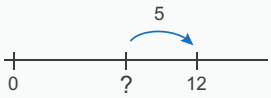
Actividad	Respuesta experta

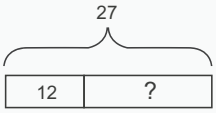
2.

Acción	Discretas	Continuas
Juntar - Separar (cantidades)	**C ó B**	**B**
Agregar - Quitar (cantidades)	**C ó B ó R**	**B ó R**
Avanzar - Retroceder (posiciones)	**B ó R**	**B ó R**
Comparar por diferencia (cantidades o posiciones)	**B ó R**	**B ó R**

Actividad 4
Formulando problemas.

Representación	Acción, datos e incógnita	Problema
	**acción:** quitar. **datos:** cambio (12), cantidad final (30). **incógnita:** cantidad inicial.	*Claudia colecciona conchitas de mar y los guarda en un frasco. De las conchitas que tenía guardadas regaló 12 y le quedaron 30 en el frasco. ¿Cuántas conchitas tenía Claudia inicialmente en el frasco?*

Representación	Acción, datos e incógnita	Problema
	**acción:** avanzar. **datos:** avance (5), posición final (12). **incógnita:** posición inicial	*Carlos corrió durante algunos kilómetros y se detuvo a tomar agua. Luego avanzó 5 kilómetros más. Si finalmente corrió 12 kilómetros, ¿cuántos kilómetros había recorrido Carlos antes de tomar agua?*

Representación	Acción, datos e incógnita	Problema
	**acción:** separar. **datos:** todo (27), parte (12). **incógnita:** parte.	*En un canasto hay 27 manzanas rojas y verdes. Si hay 12 manzanas rojas, ¿cuántas son verdes?*

Actividad	Respuesta experta
Actividad 5 Sistematizando lo aprendido.	**1.** En el rol que cumplen las representaciones (concretas o gráficas) en un problema aditivo, deben estar presente las siguientes ideas: • Una representación permite comprender las relaciones entre los datos, la incógnita y la acción descrita en el enunciado del problema. • Las representaciones son una herramienta que permite comprender y resolver un problema aditivo.
	2. Entre los argumentos de la importancia de disponer distintas representaciones, deben estar presentes las siguientes ideas: • No todas las representaciones (concretas o pictóricas) son igualmente adecuadas para cualquier problema. • Cada representación revela y oculta distintas características de los datos y relaciones matemáticas involucradas en los problemas, lo que se ajusta más a un tipo de representación que otra. • Permite evolucionar de representaciones más concretas a otras más abstractas, ya sea por un cambio de condiciones en el problema (ámbito numérico o naturaleza de los datos) o por características de los estudiantes.
	3. Entre los argumentos de la importancia de evolucionar de representaciones concretas a otras más abstractas, deben estar presentes las siguientes ideas: • El uso de representaciones concretas puede verse limitado cuando aumentamos el ámbito numérico y, por tanto, se requiere evolucionar a representaciones más abstractas. • El uso de representaciones concretas puede verse limitado cuando trabajamos con medidas continuas, requiriendo evolucionar a representaciones más abstractas.

MATERIAL PARA LOS ESTUDIANTES

MATERIAL

CLASE 1

Actividad 1

Trabajo en parejas

Usando los materiales que se les proporcionaron (piezas, cubos y cinta), representen la situación descrita en cada uno de los problemas.

1. En la tabla, indiquen el tipo de situación aditiva que corresponde a cada uno de los problemas. Marquen con qué materiales pudieron representar cada problema y, si es el caso, indiquen las dificultades que se les presentaron.

Problema	Tipo de situación	Material con que se puede representar	Dificultades
Para su cumpleaños, Ema adquirió 5 botellas de bebida, y como consideró que no le iban a alcanzar, compró 4 más. ¿Cuántas botellas de bebida tiene ahora?		○ Piezas	
		○ Cubos unitarios	
		○ Cinta numerada	
Para su cumpleaños, Ema invitó a 5 amigas y a 4 amigos. ¿Cuántos invitados tuvo en su fiesta?		○ Piezas	
		○ Cubos unitarios	
		○ Cinta numerada	
Ema recogió 9 dulces de la piñata y Joaquín 4. ¿Cuántos dulces más que Joaquín recogió Ema?		○ Piezas	
		○ Cubos unitarios	
		○ Cinta numerada	

2. ¿Qué tipo de materiales les parecen más adecuados para representar cada problema? Justifiquen.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Actividad 2

Trabajo individual

Observa las siguientes animaciones, las que muestran representaciones con distinto material de dos de los problemas anteriores. Luego, responde lo que se te indica a continuación:

1. Marca sobre cada imagen las cantidades involucradas (datos e incógnita) en el problema:

Para su cumpleaños, Ema invitó a 5 amigas y a 4 amigos. ¿Cuántos invitados tuvo en su fiesta?

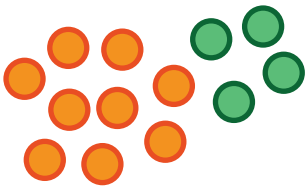
Representación 1

Representación 2

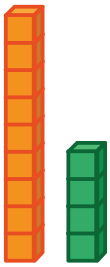
2. ¿Está representada la relación entre las cantidades en cada caso?, ¿de qué manera?

3. Marca sobre cada imagen las cantidades involucradas (datos e incógnita) en el problema:

Ema recogió 9 dulces de la piñata y Joaquín 4. ¿Cuántos dulces más que Joaquín recogió Ema?



Representación 1



Representación 2

4. ¿Está representada la relación entre las cantidades en cada caso?, ¿de qué manera?

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Actividad 3

Trabajo en parejas

Lean atentamente el siguiente cuadro de texto:

¿Qué entendemos por material concreto o manipulativo?

Material concreto o manipulativo es algo que existe físicamente en el entorno y que el estudiante puede manipular con el fin de representar o modelar situaciones. Durante esta clase, hemos trabajado con tres tipos de materiales manipulativos que se suelen usar para representar situaciones aditivas:

- Piezas (bolitas, porotos, otros)
- Cubos unitarios
- Cinta numerada

1. Completen la tabla, marcando con una X el material que consideran que favorece de mejor forma cada propósito planteado. Marquen solo uno por propósito.

Propósito del material	**MATERIALES**		
	Piezas	**Cubos unitarios**	**Cinta numerada**
Visualizar cada elemento de una cantidad.			
Apilar los elementos de una cantidad.			
Formar grupos con los elementos de una cantidad.			
Representar una posición en la secuencia numérica.			

2. ¿Por qué es importante disponer de una variedad de tipos de materiales concretos al estudiar problemas aditivos?

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Actividad 4

Trabajo individual

Lee el siguiente problema:

Ana María salió muy temprano para renovar la revisión técnica de su automóvil. Cuando llegó, contó 4 vehículos en la fila, incluyendo el de ella. Para cuando la planta abrió sus puertas, habían llegado 2 más. ¿Cuántos autos tiene la fila en el momento en que la planta de revisión técnica comenzó a atender al público?

1. Haz una representación con cubos que permita visualizar la situación.

2. Supón que se aumenta el ámbito numérico del problema, de modo tal que inicialmente había 15 vehículos esperando, incluyendo el de ella, y que cuando la planta abrió habían llegado 80 más. ¿Qué dificultades aparecerán al momento de representar el problema?

3. ¿Qué modificaciones harías a tu representación, de modo que cubra las dificultades previstas y se visualice de forma eficiente el problema? Dibuja la nueva representación.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

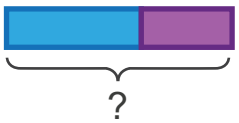
Actividad 4

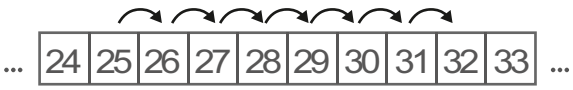
Lee atentamente el siguiente texto:

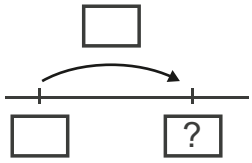
La introducción de otras representaciones se produce a partir de problemas que motiven su uso. Así, por ejemplo, cambios específicos en las características de los problemas trabajados (relación entre las cantidades, ámbito numérico, naturaleza de los datos, etc.) promueven la modificación de las representaciones conocidas, o bien la necesidad de incorporar otras. Este proceso debe ser reflexivo, es decir, sobre la base de una discusión que conduzca al desarrollo del pensamiento matemático. Si, por el contrario, no es reflexivo y es impuesto por el profesor, la nueva representación aparece como un fin y no como un medio para la comprensión.

4. A continuación, se presentan dos problemas con su representación. Modifica cada problema formulando uno nuevo que se ajuste a la nueva condición y pueda ser representado como se propone en la tabla.

Problema 1:	**Representación**:
Amelia y Víctor son hermanos. Ella tiene 3 manzanas y él tiene 2. ¿Cuántas manzanas tienen en total?	

Nueva condición: Aumento del ámbito numérico.	
Nuevo problema:	**Representación**: diagrama de barras. 

Problema 2:	**Representación**:
En un molino se produjeron 25 sacos de harina durante la mañana, y 7 más durante la tarde. ¿Cuántos sacos de harina se elaboraron ese día en el molino?	

Nueva condición: Modificación de la naturaleza de los datos (de lo discreto a lo continuo).	
Nuevo problema:	**Representación**: Recta numérica. 

Actividad 5

Trabajo de curso completo

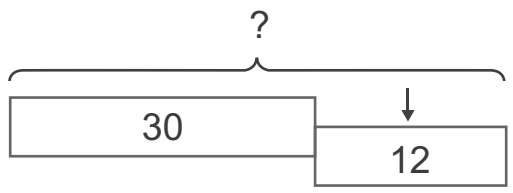
Según lo trabajado en esta clase, respondan las siguientes preguntas:

1. ¿Consideran que todas las representaciones (concretas o gráficas) son igualmente adecuadas para los distintos tipos de problemas?

2. En la clase hemos trabajado con materiales concretos y con representaciones gráficas. ¿Cuál es la principal diferencia que observan al trabajar con cada una de ellas?

3. ¿Por qué creen que es necesario que los estudiantes transiten de materiales concretos a representaciones más abstractas?

4. ¿Qué podría indicar la flecha en esta representación?



Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

FICHA DE SISTEMATIZACIÓN

Unidad de aprendizaje
Representaciones de situaciones aditivas

Clase 1
Representaciones concretas y gráficas

Meta de la clase
Al finalizar la clase se espera que hayas logrado representar situaciones aditivas con recursos manipulativos y gráficos, caracterizando y analizando sus elementos. Y, además, distinguir la pertinencia de una forma de representar en función de la situación aditiva.

Palabras clave
Representaciones, problema aditivo, material concreto.

Preguntas que ahora puedes responder

- ¿Qué tipo de representaciones son útiles para modelar un problema aditivo?
- ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de las distintas representaciones?

Recapitulemos

- El material concreto o manipulativo es algo que existe físicamente en nuestro entorno y que el estudiante puede manipular. Las representaciones pictóricas, en cambio, no son directamente manipulables y suponen un primer paso en la abstracción. Además, son más accesibles porque solo requieren de lápiz y papel.
- Trabajar con material concreto permite realizar las acciones; en cambio, en una representación pictórica solo es posible dibujar o visualizar una imagen estática que modela una situación aditiva.
- No todas las representaciones (concretas o pictóricas) son igualmente adecuadas para modelar cualquier problema. Esto se debe a que cada representación revela y oculta distintas propiedades de los datos y de las relaciones matemáticas involucradas en los problemas.
- Cuando se realiza el tránsito entre representaciones, hay aspectos que se visibilizan mientras que otros se ocultan. Por ejemplo, al pasar de los cubos al diagrama de barra, la unidad se invisibiliza, lo que permite representar problemas con un ámbito numérico mayor. Por otra parte, el paso a representaciones gráficas allana el camino para la introducción de representaciones más abstractas.

Para profundizar

Te sugerimos revisar las siguientes referencias:

Fuson, K. C. (1992). *Research on whole number addition and subtraction. In D. A. Grouws* (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics.* (pp. 243-275). New York: Macmillan.

Lewin, R., López, A., Martínez, S., Rojas, D., & Zanocco, P. (2014). *REFIP Matemática: Números para futuros profesores de Educación Básica*. Santiago: Ediciones SM. Capítulo 2, Sección 3 (p. 107).

Rico, L. (2009). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática*. pp., 4(1), 1-14.

Suma y Sigue. *Trabajando con el sistema de numeración decimal y las situaciones aditivas*. Taller 4.

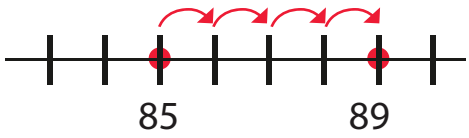
Unidad didáctica LEM 2° básico, 4° Unidad “Problemas aditivos con números hasta 1000”.

Unidad didáctica LEM 3° básico, 3° Unidad “Estudiando problemas aditivos simples y combinados”.

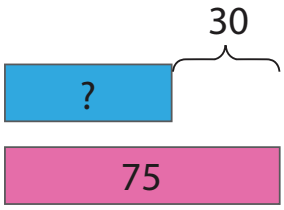
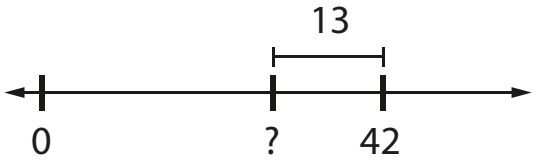
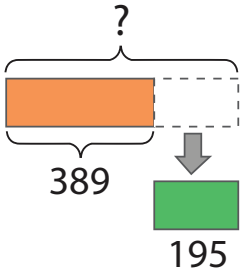
Tarea 1: Conociendo algunas representaciones gráficas

Trabajo individual

Para cada una de las representaciones, identifica las cantidades y la incógnita del problema e indica, además, qué tipo de acción podría estar representando, tal como se muestra en el ejemplo:

Ejemplo:	
Recta numérica 	Posible acción: avanzar. Datos: posición inicial (85) y posición final (89). Incógnita: transformación (lo que avanzó).

1. Completa la tabla.

	Posible acción: Datos: Incógnita:
	Posible acción: Datos: Incógnita:
	Posible acción: Datos: Incógnita:

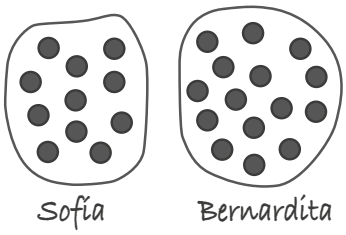
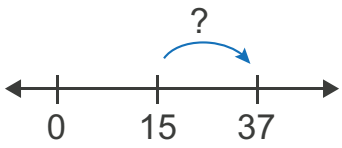
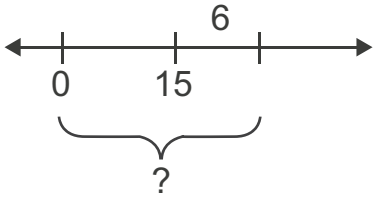
MATERIAL

CLASE 2

Actividad 1

Trabajo en parejas

Establezcan si la siguiente representación les parece adecuada para visualizar la acción en cada uno de los problemas, y expliquen su respuesta. Si no fuese el caso, propongan qué modificaciones le harían o si la reemplazarían por una de otro tipo que permita comunicar de mejor forma dicha acción. Dibujen esta nueva representación.

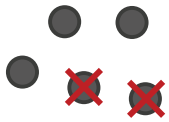
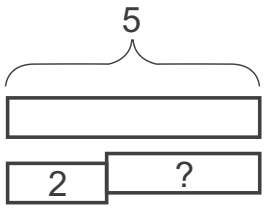
Problemas	¿Es adecuada? ¿Por qué?	Nueva representación
Para su cumpleaños, Sofía le pidió a Bernardita que le ayudara a inflar globos. Si Bernardita infló 15 globos y la cumpleañera 11, ¿cuántos globos más infló Bernardita? 		
La señora María tiene en su parcela 37 aves entre gallinas y patos. Si son 15 gallinas, ¿cuántos patos tiene? 		
En un juego de mesa, Marcelo estaba en la casilla 15. Lanzó el dado y avanzó 6 puestos. ¿En qué posición se encuentra ahora? 		

Actividad 2

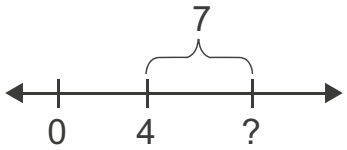
Trabajo en parejas

Para cada uno de los problemas, se proponen dos representaciones. Observen la información que se presenta en cada tabla y completen.

1. ¿Cuál creen que es la representación más adecuada? Indiquen la o las características de los datos del problema que justifican su elección.

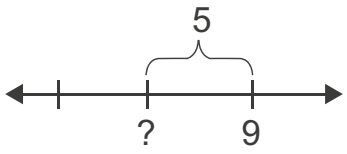
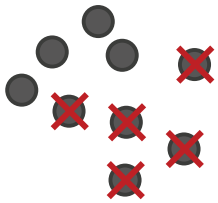
Problema 1	Representación 1	Representación 2
El maestro Juan Carlos tiene un listón de madera de 5 m de largo. Para una construcción, cortó 2 m. ¿Cuánto mide el sobrante?		
Representación más adecuada: _____ Características de los datos del problema que justifican su elección:		

2. ¿Cuál creen que es la representación más adecuada? Indiquen la o las características de los datos del problema que justifican su elección.

Problema 2	Representación 1	Representación 2
Andrés tiene 4 toallas de baño y 7 de playa, ¿Cuántas toallas tiene en total?		
Representación más adecuada: _____ Características de los datos del problema que justifican su elección:		

Actividad 2

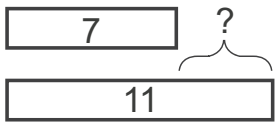
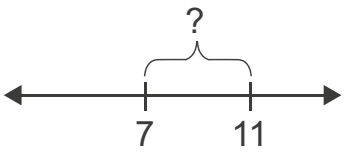
3. ¿Cuál creen que es la representación más adecuada? Indiquen la o las características de los datos del problema que justifican su elección.

Problema 3	Representación 1	Representación 2
Eduardo preparó esta mañana un flan. Para que su postre repose, lo guarda en el refrigerador que está a una temperatura de 9° C. Eduardo quiere que el flan esté listo para el almuerzo, por lo que manipula el control bajando 5° C. ¿Cuál es la temperatura actual del refrigerador?		

Representación más adecuada: _____

Características de los datos del problema que justifican su elección:

4. ¿Cuál creen que es la representación más adecuada? Indiquen la o las características de los datos del problema que justifican su elección.

Problema 4	Representación 1	Representación 2
Juan Carlos y Camila están jugando Monopoly, y en la primera jugada él llegó al casillero nº 7 y ella al casillero nº 11. ¿Cuántos casilleros más adelante se encuentra Camila que Juan Carlos?		

Representación más adecuada: _____

Características de los datos del problema que justifican su elección:

Actividad 3

Trabajo en parejas

Responde las preguntas que se plantean a continuación:

1. Además del ámbito numérico, ¿qué otras características de los problemas trabajados se deben considerar al elegir una representación que sea adecuada para un problema aditivo?

2. ¿Qué tipo de representación (C = conjunto, B = diagrama de barras, R = recta numérica) les parece más apropiada para visualizar las siguientes acciones? Completa en las casillas con la letra de la representación que consideres más pertinente.

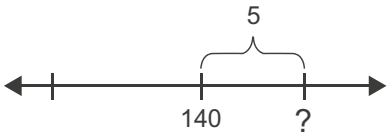
Acción	Discretas	Continuas
Juntar - Separar (cantidades)		
Agregar - Quitar (cantidades)		
Avanzar - Retroceder (posiciones)		
Comparar por diferencia (cantidades o posiciones)		

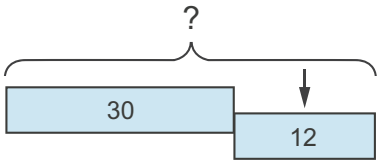
Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

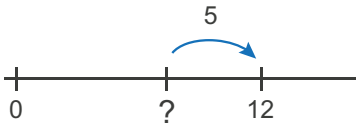
Actividad 4

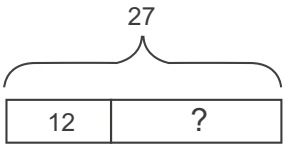
Trabajo individual

Identifica una posible acción, los datos y la incógnita en la representación dada. Luego, formula un problema aditivo a partir de ella. Guíate por el ejemplo.

Representación	Acción, datos e incógnita	Problema
	**acción:** comparar por diferencia. **datos:** cantidad menor (140), diferencia (5). **incógnita:** cantidad mayor.	*En el colegio, los niños del 6° básico están siendo medidos. Juan mide 140 cm, 5 menos que su amigo Luis. ¿Cuánto mide Luis?*

Representación	Acción, datos e incógnita	Problema
		

Representación	Acción, datos e incógnita	Problema
		

Representación	Acción, datos e incógnita	Problema
		

Actividad 5

Trabajo de curso completo

Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el rol que cumplen las representaciones (concretas o gráficas) en un problema aditivo?

2. ¿Por qué es importante disponer de distintos tipos de representaciones?

3. ¿Por qué es importante evolucionar de representaciones concretas a otras más abstractas?

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

FICHA DE SISTEMATIZACIÓN

Unidad de aprendizaje
Representaciones de situaciones aditivas

Clase 2
Comparando representaciones gráficas

Meta de la clase
Al finalizar la clase se espera que hayas logrado evaluar el uso de ciertas representaciones, considerando como criterio su pertinencia en función de las características del problema aditivo, y formular problemas aditivos a partir de representaciones.

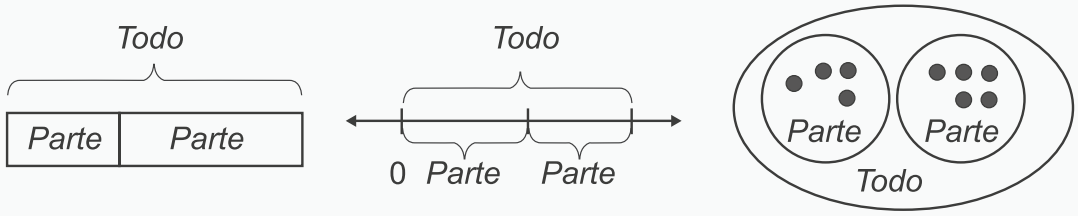
Palabras clave
Problema aditivo, representación de conjunto, diagramas de barras, recta numérica, ámbito numérico, acción de un problema aditivo.

Preguntas que ahora puedes responder

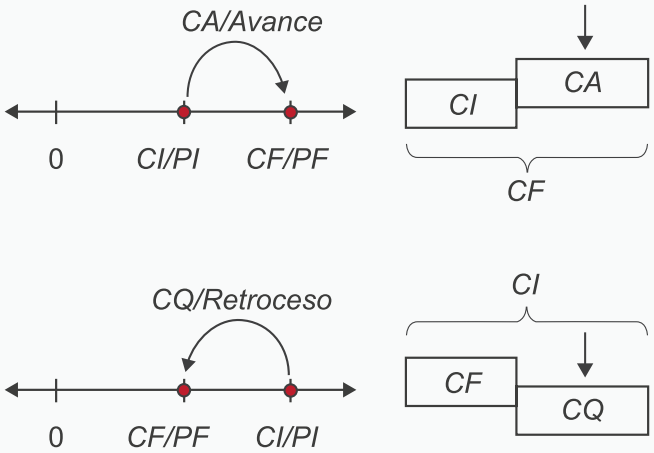
- Además del ámbito numérico, ¿qué otras características del problema se deben considerar al elegir una representación que sea adecuada?
- ¿Qué representación es más apropiada para visualizar, por ejemplo, la acción de “comparar por diferencia”?
- ¿Qué representación es más adecuada para modelar, por ejemplo, datos que corresponden a magnitudes continuas?
- ¿Qué características oculta o visibiliza, por ejemplo, la recta numérica?
- ¿Cuál es el rol que cumplen las representaciones (concretas o gráficas) en un problema aditivo?
- ¿Por qué es importante contar con distintos tipos de representaciones?
- ¿Por qué es importante evolucionar de representaciones más concretas a más abstractas?
- ¿Qué podrían indicar las flechas en las representaciones?

Recapitulemos

- El aprendizaje de la matemática implica la interpretación de ideas y conceptos que pueden resultar muy abstractos para los estudiantes. Las representaciones, al hacer visible la estructura subyacente de los conceptos matemáticos, facilitan la construcción del conocimiento en los estudiantes. A continuación se presentan los modelos de los distintos tipos de problemas aditivos con sus respectivas representaciones:
  - Problemas de composición

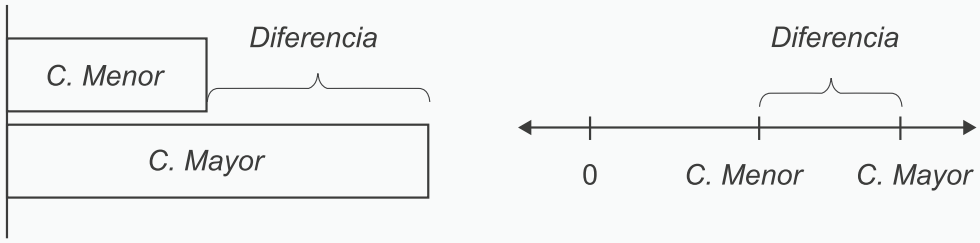


  - Problemas de cambio:



*CI: Cantidad Inicial; PI: Posición Inicial; CF: Cantidad Final; PF: Posición Final; CQ: Cantidad Quitada; CA: Cantidad Agregada.

  - Problemas de comparación:



- Las representaciones son fundamentales en el trabajo matemático, ya que ayudan a comprender conceptos y procedimientos matemáticos complejos, a resolver problemas y a comunicar ideas a otros.
- Desarrollar la habilidad de representar requiere conocer distintos tipos de representaciones manipulativas y gráficas y además tener la capacidad para transitar de manera flexible entre unas y otras. Contar con distintos tipos de representaciones es favorable:
  - Desde el punto de vista del estudiante, porque enriquece la comprensión de conceptos y hace más cercano y accesible el contenido matemático para todo tipo de estudiantes.
  - Para la labor docente, porque las representaciones visibilizan u ocultan distintas características de los objetos matemáticos. Esto permite planificar y gestionar procesos de enseñanza y aprendizaje de manera completa y progresiva.
- Es indispensable evolucionar desde representaciones más concretas hacia otras más simbólicas, ya sea por las propias condiciones del problema, como el ámbito numérico, por el nivel de abstracción de los estudiantes o por algún propósito pedagógico que se quiera conseguir.
- Como es difícil visualizar acciones que son más dinámicas o que implican una transformación de los datos, en algunos casos se utilizan elementos como flechas para indicar esta condición en las representaciones.
- Las representaciones no son contenidos para enseñar directamente a los niños/as, sino que son herramientas que ellos/as pueden utilizar para facilitar su aprendizaje matemático. En este sentido, no es necesario que los escolares conozcan los criterios que permiten elegir la representación más adecuada; es algo que el docente debe manejar para abordar una variedad de problemas.

Para profundizar

Te sugerimos revisar las siguientes referencias:

Fuson, K. C. (1992). *Research on whole number addition and subtraction. In D. A. Grouws* (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 243-275). New York: Macmillan.

Lewin, R., López, A., Martínez, S., Rojas, D., & Zanocco, P. (2014). *REFIP Matemática: Números para futuros profesores de Educación Básica*. Santiago: Ediciones SM. Capítulo 2, Sección 3 (página 107).

Rico, L. (2009). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática.* pp., 4(1), 1-14.

Unidad didáctica LEM 2° básico, 4° Unidad “Problemas aditivos con números hasta 1000”.

Unidad didáctica LEM 3° básico, 3° Unidad “Estudiando problemas aditivos simples y combinados”.

Tarea 2: Armando pares

Trabajo individual

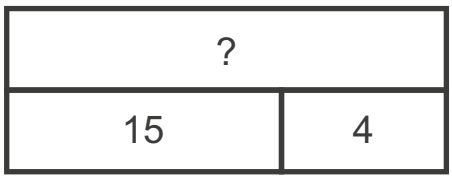
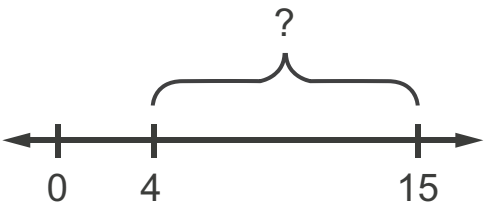
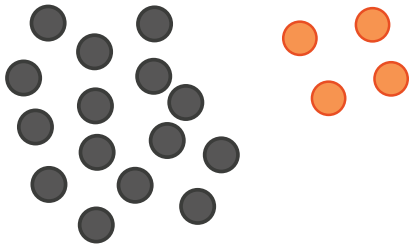
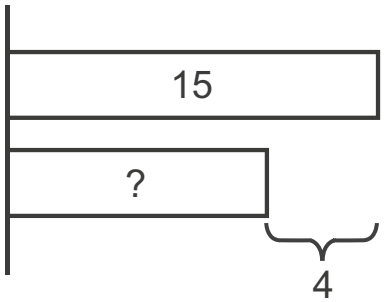
Une cada problema con la representación que es más adecuada considerando el tipo de problema y las características de cada representación.

Problemas

Trinidad, ejecutiva de ventas, logra atender a 15 clientes durante la mañana y a 4 en la tarde. ¿Cuántos clientes atiende en el día?

Mateo demora 15 minutos en dar la vuelta a la plaza en bicicleta, 4 más de los que demora su amigo Renato. ¿Cuánto tarda Renato en dar la vuelta a la plaza?

Ayer a las 12:00 hrs se registró una temperatura de 15 °C en Rancagua. Si a las 22:00 hrs la temperatura era de 4 °C. ¿De cuánto fue el descenso de la temperatura durante ese período?

Flavio decide ordenar su ropa. Guarda sus 15 camisas de manga larga en la bodega y luego se da cuenta de que solo se queda con 4 camisas de manga corta para usar en el verano. ¿Cuántas camisas tiene Flavio?

Representaciones