PROPORCIONALIDAD Y LINEALIDAD

UNIDAD DE APRENDIZAJE

UNIDADES PARA LA FORMACIÓN INICIAL DOCENTE EN MATEMÁTICA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE
CMMEdu
CONICYT Ministerio de Educación Gobierno de Chile
FONDEF Fondo de Fomento al Desarrollo Científico y Tecnológico
Ministerio de Educación Gobierno de Chile
CPEIP Ministerio de Educación Gobierno de Chile

Este material fue elaborado en el marco del Proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119 (2017-2019): Metodologías innovadoras para la formación inicial de profesores de Educación Básica: Modelo basado en prácticas efectivas de aula y tecnologías de la información.

Esta unidad de aprendizaje fue probada en cursos de carreras de Pedagogía en Educación Básica como parte del proceso de elaboración. Agradecemos a las profesoras Sandra Burgos de la Universidad Austral de Chile y Ximena Herrera de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, y a sus respectivos estudiantes, por sus valiosas contribuciones al desarrollo de esta unidad.

Equipo de creación:

Eduardo Carrasco H. Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación.
Aldo Ramírez M. CMM, Universidad de Chile.
Daniela Rojas B. CMM, Universidad de Chile.
Ricardo Salinas P. CMM, Universidad de Chile.
Alicia Zamorano V. Universidad de Chile.

Equipo de edición:

Pablo Dartnell R. CIAE-CMM, Universidad de Chile.
Alejandro López C. Universidad Andrés Bello.
Salomé Martínez S. CMM, Universidad de Chile.
Ricardo Salinas P. CMM, Universidad de Chile.

ÍNDICE

MATERIAL PARA EL FORMADOR 5

VISIÓN GLOBAL DE LA UNIDAD 7

PLANIFICACIONES DE CLASES 13

PLANIFICACIÓN CLASE 1 15

PLANIFICACIÓN CLASE 2 45

PLANIFICACIÓN CLASE 3 73

MATERIAL PARA LOS ESTUDIANTES 97

MATERIAL
PARA EL FORMADOR

VISIÓN
GLOBAL

UNIDAD
PROPORCIONALIDAD Y LINEALIDAD

UNIDAD

PROPORCIONALIDAD Y LINEALIDAD

El propósito que se persigue con esta unidad es abordar el estudio de la proporcionalidad, desde su relación con las situaciones multiplicativas hasta su interpretación como función lineal, y construir las funciones afines a partir de estas últimas. Para ello, se articula la proporcionalidad con las situaciones multiplicativas que se estudian en 3° y 4° básico; se caracterizan las situaciones de proporcionalidad como cociente constante y gráfico; y se definen las funciones lineales como situaciones de proporcionalidad, y las afines como lineales desplazadas verticalmente, interpretando la pendiente como la constante de proporcionalidad de la parte lineal.

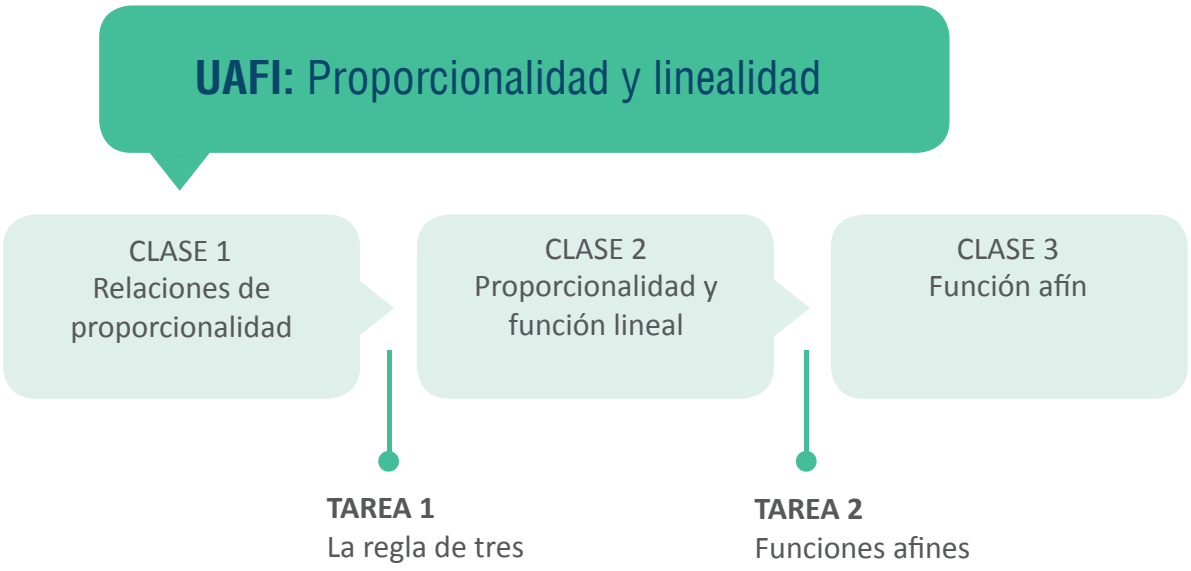
1. Fundamentación del tema

Si bien el estudio de la proporcionalidad aparece en forma explícita en los primeros niveles de Educación Media, en Educación Básica se abordan una serie de contenidos matemáticos, como razones y proporciones, porcentajes, fracciones y decimales, problemas multiplicativos, entre otros, que se unifican y consolidan a través de la proporcionalidad. La noción de proporcionalidad es ubicua en la vida cotidiana, de hecho, desde sus primeros años de vida niños y niñas se enfrentan a situaciones que involucran la noción de proporcionalidad, por ejemplo, cuando interpretan el tamaño de los objetos que aparecen en una fotografía.

La proporcionalidad y la función lineal son contenidos relevantes no solo en Matemática, sino también en el estudio de contenidos de áreas como Ciencias Naturales, Ciencias Sociales o Artes. Así, la proporcionalidad y linealidad pueden apoyar la difícil tarea de articular distintas asignaturas del currículum, cuando se aborda su estudio a partir de la resolución de problemas y el análisis de situaciones en contexto.

La propuesta de tratamiento de los contenidos de esta UAFI considera un trayecto que va desde el estudio de la proporcionalidad hacia la comprensión de las nociones de función lineal y afín. Esto es coherente con las Bases Curriculares, que en sus Objetivos de Aprendizaje contemplan que los/las estudiantes de 7° básico deben de comprender la proporcionalidad, y luego en 8° aprender las funciones lineales y afines. En esta unidad se hace una conexión explícita entre estos temas y contenidos de cursos anteriores, como las situaciones multiplicativas, reforzando la conexión entre la multiplicación y la proporcionalidad, clave para la extensión de esta operación y su significado.

2. Estructura de la UAFI



Como se ha indicado, esta unidad de aprendizaje transita desde el estudio de la proporcionalidad hacia las funciones lineal y afín. En la Clase 1 se estudian con detalle las relaciones de proporcionalidad, caracterizándolas de manera aritmética, relacionándolas con las situaciones multiplicativas y contrastándolas con otras relaciones no proporcionales.

En las Clase 2, por su parte, se establece que el gráfico de una situación proporcional es una recta que pasa por el origen y, adoptando una perspectiva algebraica, se construye la función lineal a partir de la proporcionalidad.

En la Clase 3 se utiliza la función lineal para introducir la función afín, tanto desde un punto de vista gráfico, a través de un desplazamiento vertical de la recta, como algebraico, mediante la suma de una constante a la expresión de la función lineal.

El concepto de pendiente de una recta se estudia en las clases 2 y 3, interpretándolo como la constante de proporcionalidad de la parte lineal y relacionándolo con la inclinación de la recta.

Cada una de estas clases finaliza con una actividad de reflexión pedagógica que permite al/a la futuro/a docente conectar el estudio de estos temas con el aula escolar.

Para complementar el trabajo propuesto en estas tres clases se incluyen dos tareas de trabajo individual para los/las estudiantes, que tienen el propósito de utilizar los aprendizajes desarrollados en la resolución de ejercicios y problemas. La primera tarea busca justificar “La regla de tres”, mientras que la segunda propone ejercicios que les permitan familiarizarse con la función afín.

3. Profundización de los contenidos

Usualmente, el estudio de la proporcionalidad se inicia con la noción de razón, esto es, una comparación por cociente de dos cantidades. Luego, se define una proporción como la igualdad de dos razones y la proporcionalidad como una relación entre dos variables en las que el cociente de sus valores tiene siempre una razón constante. Si bien este enfoque es compatible con el tratamiento de la proporcionalidad propuesto en esta UAFI, no lo hemos incluido, dado que el estudio de la proporcionalidad se focalizó en este caso en las relaciones entre variables (Azcárate y Deulofeu, 1996), materia que se puede abordar sin invertir tiempo en el desarrollo del concepto de razón. Sin embargo, si se decide incorporar el estudio de razones antes del inicio de esta UAFI esto no afecta el desarrollo de las actividades, por lo que la unidad se puede usar sin modificar su estructura.

Otro tema que muchas veces se aborda en paralelo con la proporcionalidad es la noción de proporcionalidad inversa, la que tampoco ha sido incluida en esta propuesta, ya que la intención de la UAFI es construir las funciones lineales y afines a partir de la proporcionalidad considerando que la idea de función lineal unifica los contenidos relacionados con proporcionalidad (Fiol y Fortuny, 2000; Martínez y Varas, 2013), mientras proporcionalidad inversa nos desvía de ese propósito, dando origen a funciones como por ejemplo $f(x)= \frac{1}{x}$, que no son lineales ni afines. Cabe destacar, que se puede abordar el estudio de la proporcionalidad inversa a continuación de esta unidad.

A continuación, se presentan las justificaciones de algunas propiedades de funciones que se presentan en la UAFI:

1. En estas clases, se estableció que si $y = f(x)$ es una función afín (o lineal, como un caso particular de esta), el cociente entre las variaciones de y y x es constante. De hecho, se puede formular una afirmación más consistente al respecto: una función $y = f(x)$ es afín si y solo si este cociente es constante (Martínez y Varas, 2013). Revisemos brevemente la demostración de este hecho que caracteriza a las funciones afines. En primer lugar, en la dirección de lo establecido en la UAFI, si la función es afín, esto es, tiene la forma $y = ax + b$, entonces, tomando dos valores distintos x_1, x_2 de la variable x, y los correspondientes valores $y_1= ax_1+b$, $y_2= ax_2 + b$ de la variable y, el cociente de las variaciones $\frac{\triangle y}{\triangle x}$, también denominado razón de cambio (Martínez y Varas, 2013), se puede calcular de la siguiente manera:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Luego, el cociente es la constante a.

Recíprocamente, si para una función $y = f(x)$ se sabe que el cociente de las variaciones es igual a una constante a, entonces al considerar los pares ordenados (x_2 , y_1) y (x , y), en donde x_1 e y_1 son valores fijos y x e y variables, se tiene que:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = a$$

Multiplicando a ambos lados por $x - x_1$ se obtiene $y - y_1 = a(x - x_1)$, luego $y = ax - ax_1 + y_1$, esto es, $y = ax + b$, donde b es la constante $b = -ax_1 + y_1$.

2. Si quisiéramos justificar la afirmación presentada en la Clase 3, respecto a que para una función afín $y = ax + b$, el signo de la constante a permite decidir si su gráfico es creciente, constante o decreciente, debemos notar que una función $y = f(x)$ será creciente (a veces también se dice estrictamente creciente) si a medida que se recorre hacia la derecha (esto es, los valores de x aumentan) su altura se incrementa (esto es, los valores de y crecen). Del mismo modo, la función será constante si al aumentar x, la variable y no cambia, y será decreciente (a veces se dice estrictamente decreciente) si al aumentar x, la variable y disminuye.

Notemos que aumentos en x corresponden a valores positivos de la variación $\triangle x$, y similarmente, un aumento en y produce $\triangle y$ positivo, una disminución de y produce un $\triangle y$ negativo y cuando y es constante, $\triangle y$ es cero. Con lo anterior, podemos reescribir las definiciones de una función $y = f(x)$ creciente, constante o decreciente en términos de las variaciones $\triangle x$, $\triangle y$ y sus signos:

Si cada vez que $\triangle x > 0$,

- se tiene $\triangle y > 0$, la función es creciente;
- se tiene $\triangle y = 0$, la función es constante;
- se tiene $\triangle y < 0$, la función es decreciente.

Como se están considerando variaciones positivas de x, el signo del cociente $a = \frac{\triangle y}{\triangle x}$ es el mismo que el del numerador $\triangle y$, por tanto, se puede concluir que las funciones afines crecientes corresponden a aquellas en que $a > 0$, las decrecientes a aquellas en que $a < 0$ y las constantes son las que tienen $a = 0$.

4. Referencias bibliográficas

Azcárate, C. & Deulofeu, J. (1996). *Funciones y gráfica*. España: Síntesis.

Fiol, M.L. & Fortuny, J. (2000). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. España: Síntesis.

Martínez, S., Varas, M. L. (2014). *Álgebra. ReFIP Matemática. Recursos para la Formación Inicial de Profesores de Educación Básica*. Santiago, Chile, Ediciones SM.

Mineduc. (2012). *Bases Curriculares de Matemática de 1° a 6° básico*. Chile.

PLANIFICACIONES

UNIDAD

PROPORCIONALIDAD Y LINEALIDAD

PLANIFICACIÓN
CLASE 1

UAFI: Proporcionalidad y linealidad

CLASE 1
Relaciones de proporcionalidad

CLASE 2
Proporcionalidad y función lineal

CLASE 3
Función afín

TAREA 1
La regla de tres

TAREA 2
Funciones afines

CLASE 1: RELACIONES DE PROPORCIONALIDAD

RESUMEN DE LA CLASE

Meta de la clase	Al finalizar la clase se espera que los futuros profesores[1] logren caracterizar y comprender de diferentes maneras las relaciones de proporcionalidad entre variables.
Descripción de la clase	La clase se inicia con una actividad en la que los estudiantes descubren que dos variables se relacionan de manera proporcional cuando al multiplicar una de ellas por una cantidad, la otra se multiplica por la misma cantidad. A continuación, se relaciona la proporcionalidad con situaciones multiplicativas que se abordan en el estudio inicial de la multiplicación y división. Luego, se aborda la caracterización de las relaciones de proporcionalidad mediante la constante de proporcionalidad. Finalmente, se analizan situaciones en que las variables no son proporcionales, de manera de distinguir aspectos esenciales que caracterizan a la proporcionalidad.

[1]Respecto del uso de lenguaje inclusivo: Con el propósito de no provocar una saturación gráfica que dificulte la comprensión de la lectura, en este documento no se considera el uso de “los/las” u “o/a” para hacer referencia a ambos géneros de manera conjunta. En su lugar, se utilizan términos como “el futuro profesor”, “el estudiante” y “el profesor” y sus respectivos plurales para aludir de manera inclusiva a hombres y mujeres. Sin embargo, durante la gestión de la clase se sugiere la utilización de lenguaje inclusivo que invite a los y las estudiantes a involucrarse activamente en las actividades.

Aprendizajes esperados	Al finalizar la clase se espera que el estudiante: • Entienda cómo varían dos variables que se relacionan de manera proporcional. • Reconozca, por medio de algunos ejemplos, que las situaciones multiplicativas se pueden interpretar en términos de proporcionalidad. • Caracterice una relación de proporcionalidad a través de su constante. • Distinga situaciones de proporcionalidad de aquellas que no lo son.
Conocimientos previos	Cantidades variables, multiplicación y división entre números decimales.
Materiales	Estudiantes • Hojas de trabajo del estudiante. Profesor • Computador. • Proyector.
Tiempo total estimado	80 min

ESQUEMA DE LA CLASE

Tipo de actividad	Actividades	Tiempo (T) Modalidad (M)
Introducción	**Introducción a la unidad y al modelo de trabajo** Se presenta la unidad y la modalidad de trabajo.	T: 5 min
Exploración	**Actividad 1: Registrando pedidos en la planta de áridos** Con esta actividad se busca que los futuros profesores caractericen las situaciones de proporcionalidad como relaciones entre dos variables, de modo que si el valor de una de ellas se multiplica por una cantidad, el valor de la otra también.	T: 20 min M: En parejas y de curso completo
Construcción de conocimientos	**Actividad 2: Problemas multiplicativos** Esta actividad está centrada en que los futuros profesores establezcan, a través de algunos ejemplos, que las situaciones multiplicativas que se utilizan para el estudio de la multiplicación y división en los naturales se pueden interpretar en términos de proporcionalidad.[2]	T: 15 min M: En parejas y de curso completo
Construcción de conocimientos	**Actividad 3: Otra caracterización para la proporcionalidad** Con esta actividad se persigue que los futuros profesores caractericen una relación de proporcionalidad mediante su constante de proporcionalidad.	T: 20 min M: En parejas y de curso completo
Sistematización	**Actividad 4: Proporcionalidad y crecimiento simultáneo** El foco de esta actividad está en que los futuros profesores contrasten situaciones de proporcionalidad con situaciones en que ambas variables aumentan, pero no de manera proporcional.	T: 20 min M: En parejas y de curso completo
Sistematización	**Cierre de la clase** Con esta actividad se busca que los futuros profesores reconozcan los aprendizajes logrados en la clase sobre las relaciones de proporcionalidad.	T: 10 min M: De curso completo

[2]En algunas clasificaciones para las situaciones multiplicativas, se suele distinguir las situaciones de proporcionalidad de otras como, por ejemplo, las de combinación. Sin embargo, las situaciones de combinación, también dan origen a situaciones de proporcionalidad cuando se fija el valor de uno de los factores

Introducción a la unidad	**Tiempo**
La unidad “Proporcionalidad y linealidad” está compuesta por tres clases en las que se estudiará la proporcionalidad partiendo por su caracterización a través de la constante de proporcionalidad y el gráfico, luego abordando su relación con las situaciones multiplicativas de 3° y 4° básico, hasta llegar a su interpretación como función lineal, construyendo, a partir de esta última, las funciones afines. Estas clases están diseñadas siguiendo un modelo basado en: • la resolución de problemas. • la construcción colaborativa de conocimientos. • actividades que promueven la reflexión y discusión respecto de los conocimientos matemáticos necesarios para enseñar. Te invitamos a aprender de tus propios descubrimientos, así como de los de tus compañeros. Para ello, te recomendamos que: • participes activamente exponiendo tus puntos de vista. • compartas tus ideas, estrategias y resultados. • te esfuerces por entender lo que expresan tus compañeros. • aportes en la construcción colectiva de ideas y conocimientos.	5 min

Registrando pedidos en la planta de áridos

Exploración

Tiempo: 20 min.
Modalidad: En parejas y de curso completo.
Materiales: Hoja de actividad 1.

PROPÓSITO

Con esta actividad se busca que los futuros profesores caractericen las situaciones de proporcionalidad como relaciones entre dos variables, de modo que, si el valor de una de ellas se multiplica por una cantidad, el valor de la otra también.

Fecha: _____

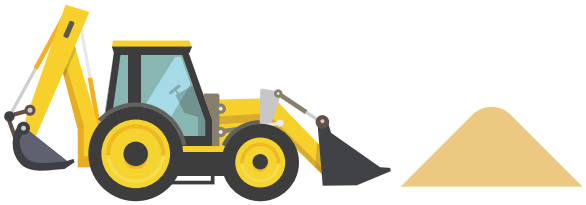
Nombre: _____

Unidad de Aprendizaje Proporcionalidad y Linealidad
Hojas de trabajo - Clase 1

Actividad 1

Trabajo en parejas

En una planta de áridos venden arena. Para generar los distintos pedidos utilizan una retroexcavadora-cargadora que les permite ir midiendo las cantidades de arena que cargan en el camión



La siguiente imagen corresponde a las cargas de camiones con arena realizadas durante una tarde. El registro contiene la cantidad de paladas de retroexcavadora usadas en cada carga.

30 paladas → 2,5 camionadas
3 paladas → 0,25 camionada
18 paladas → 1,5 camionadas

Utiliza esta información para responder las siguientes preguntas:

1. Se tiene un pedido de 5 camionadas de arena. ¿Cuántas paladas se necesitan? Escribe el procedimiento que utilizaste para responder la pregunta.

2. Otro pedido se completa con 9 paladas de arena. ¿Cuántas camionadas se necesitan para trasladarla?

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Para esta actividad es importante identificar algunas respuestas durante el monitoreo. Revise la gestión.

VER MÁS +

Revise los procedimientos que podrían surgir en esta actividad.

VER MÁS +

Actividad 1

3. En otra ocasión se solicitaron 12 paladas de arena. ¿Cuántas camionadas se necesitan para trasladarla?

4. ¿Cuántas camionadas se completan con 33 paladas?

5. Al multiplicar por 5 la cantidad de paladas, ¿qué sucede con la cantidad de camionadas?

6. Lee la siguiente afirmación y responde:

   Sabiendo cuántas paladas completan una camionada, podemos calcular cuántas paladas completan un número cualquiera de camionadas.

   ¿Es cierta? ¿Por qué?

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

En la puesta en común es esencial destacar uno de los procedimientos en particular. Revise la gestión.

VER MÁS +

Asegúrese de que los estudiantes comprendan la caracterización de proporcionalidad señalada en el cierre.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (10 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Durante el monitoreo identifique a los estudiantes que multiplican o dividen los valores de ambas variables por la misma cantidad, por ejemplo: para resolver el ítem 1 duplican los valores de la primera fila o en el ítem 2 multiplican por 3 los de la segunda.

- Identifique también los procedimientos más utilizados por los estudiantes, de modo de contrastarlos con el descrito en el punto anterior al compartir resultados.

VOLVER

COMPARTIR RESULTADOS (10 min)

Para la puesta en común, puede serle útil considerar las siguientes sugerencias de gestión:

- Invite a los estudiantes a compartir sus respuestas y a explicar los procedimientos utilizados en los ítems 1 al 4. Puede comenzar con los procedimientos más frecuentes.

- Resguarde que se comente el procedimiento basado en la multiplicación o división por la misma cantidad. Centre la atención en este procedimiento preguntando por qué funciona para un caso determinado.

- Pídales a los estudiantes que compartan sus respuestas de los ítems 5 y 6.

VOLVER

SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS (5 min)

Como síntesis de la puesta en común puede destacar la siguiente idea: Al conocer la cantidad de paladas que completan una camionada, es posible saber las que se necesitan para cualquier cantidad por la propiedad multiplicativa presente en la relación de estas dos variables (es decir, que al multiplicar el valor de una variable por una cantidad, el valor correspondiente de la otra variable se multiplica por la misma cantidad).

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad, comente los puntos que se indican a continuación (puede usar la diapositiva 7):

- Al duplicar, triplicar, etc., la cantidad de camionadas o de paladas de arena, también se duplica, triplica, etc., la otra cantidad.
- Cuando dos cantidades que varían cumplen con la característica anterior, se dice que **son proporcionales**.
- A las cantidades que varían en una situación se les denomina **"variables"**.

VOLVER

LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

Para el lanzamiento puede señalar que: En la siguiente actividad continuaremos trabajando en el mismo contexto, pero esta vez relacionaremos las situaciones de proporcionalidad con un tipo de problemas multiplicativos que se estudia en Educación Básica. (Puede usar la diapositiva 8)

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Algunos procedimientos que podrían usar los estudiantes para resolver del ítem 1 al 4 son:
  - Sumar los valores de las variables en dos filas del registro, por ejemplo: en el ítem 4 sumar las dos primeras filas.
  - Usar la regla de tres para responder todas las preguntas.
  - Calcular el valor unitario de alguna de las variables y luego multiplicar, por ejemplo: usar que 1 camionada corresponde a 12 paladas para resolver los otros.
- Si bien pueden surgir diferentes procedimientos, se debe intencionar que surja el procedimiento deseado (multiplicar o dividir por la misma cantidad los valores correspondientes de ambas variables) a través de preguntas como las siguientes:
  - A partir de los datos ¿es posible saber directamente cuántas paladas se necesitan para completar 5 camionadas?
  - Si observamos los datos del registro, la primera fila tiene 10 veces la cantidad de paladas que la segunda. ¿Sucede lo mismo con las cantidades de camionadas?, ¿puedes encontrar otras filas en las que pase algo similar?
- Durante la clase algunos estudiantes podrían señalar que la relación entre paladas y camionadas es proporcional y caracterizarla por: si una variable aumenta, la otra también lo hace. Frente a esto se sugiere solicitar mayor precisión, preguntando, por ejemplo: ¿qué pasa si una de las variables aumenta una cierta cantidad de veces?
- Si durante el desarrollo de la actividad los estudiantes hablan de conceptos como constante de proporcionalidad, variable dependiente, variable independiente u otro, se sugiere no profundizar en ellos ya que se abordarán más adelante. Esta actividad está centrada en comprender la relación multiplicativa entre variables proporcionales.

Problemas multiplicativos

Construcción de conocimiento

Tiempo: 15 min.
Modalidad: En parejas y de curso completo.
Materiales: Hoja actividad 2.

PROPÓSITO

Esta actividad está centrada en que los futuros profesores establezcan, a través de algunos ejemplos, que las situaciones multiplicativas que se utilizan para el estudio de la multiplicación y división en los naturales se pueden interpretar en términos de proporcionalidad.

Fecha: _____

Nombre: _____

Unidad de Aprendizaje Proporcionalidad y Linealidad
Hojas de trabajo - Clase 1

Actividad 2

Trabajo en parejas

1. Resuelve el siguiente problema:

   En otra planta de áridos completan una camionada con 15 paladas de arena. ¿Con cuántas paladas completan 4 camionadas?

2. Completa el siguiente esquema con la información del problema del ítem 1.

Número de camionadas	X	Número de paladas por camionada	=	Total de paladas

3. Resuelve los siguientes problemas y completa los esquemas con esta información.

Situación 1
En una pastelería ofrecen bandejas con 6 queques en cada una. ¿Cuántos queques se obtienen al comprar 5 bandejas?

Número de grupos	X	Número de elementos en cada grupo	=	Total de elementos

Situación 2
Un artesano ocupa 12 piedras para fabricar una pulsera. ¿Cuántas piedras necesita para fabricar 8 pulseras?

Número de grupos	X	Número de elementos en cada grupo	=	Total de elementos

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

La discusión debe estar centrada en la relación de proporcionalidad que hay en los problemas dados. Revise las sugerencias de gestión.

VER MÁS +

Es importante conducir a los estudiantes a la conclusión señalada en la gestión.

VER MÁS +

Actividad 2

4. ¿A qué corresponden los “grupos” y los “elementos” en el contexto de cada situación?

5. En los problemas del ítem 3, ¿existe una relación de proporcionalidad?, ¿cuáles son las variables que se relacionan proporcionalmente? Justifica tu respuesta.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Hay anticipaciones y sugerencias que debe tener en cuenta al gestionar la actividad.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (5 min)

Durante el monitoreo se sugiere observar si los estudiantes identifican como variables el número de grupos y el total de elementos. Si alguno plantea como variable el número de elementos por grupo, señale que en ambas situaciones esa información es fija (6 queques por bandeja y 12 piedras en cada pulsera).

VOLVER

DISCUSIÓN DE CURSO COMPLETO (5 min)

Se sugiere la siguiente gestión:

- Centre la discusión en la relación proporcional que existe en los problemas del ítem 3. Para cada situación, puede plantear preguntas como: si alguien compra 10 bandejas, ¿cuántos queques lleva?, ¿y si compra 20?
- Oriente a los estudiantes preguntando cuáles son las variables que se relacionan proporcionalmente en ambas situaciones del ítem 3.

VOLVER

CONCLUSIÓN DE LA DISCUSIÓN (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes ideas en el cierre de la discusión:

- En los problemas de agrupación en que se tiene un **número de grupos**, una **cantidad fija de elementos por grupo** y un **total de elementos**, el total varía proporcionalmente con el número de grupos.
- Destaque que este tipo de problemas se estudia a partir de 3° básico con la multiplicación y división de números naturales.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad, comente los puntos que se indican a continuación (puede usar la diapositiva 12):

- En los problemas anteriores se conoce el número de elementos que hay en un grupo y se pregunta por el total de elementos que hay en varios grupos. Este tipo de situaciones son fundamentales para el estudio de la multiplicación a partir de 3° básico.

- Cuando el número de grupos varía, el total de elementos varía proporcionalmente, ya que las situaciones multiplicativas asociadas a los problemas anteriores corresponden a relaciones de proporcionalidad.

VOLVER

LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

Para el lanzamiento puede señalar que: *En la siguiente actividad se retoma la problemática de la venta de arena en la planta de áridos para descubrir otra caracterización de las situaciones proporcionales.* (Puede usar la diapositiva 13).

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Con el primer problema propuesto se tiene el propósito de conectar el trabajo realizado en la Actividad 1 con lo que se propone estudiar en esta actividad: los problemas multiplicativos que se estudian a partir de 3° básico que se pueden caracterizar a través de la siguiente relación:

Número de grupos **X** **Número de elementos en cada grupo** **=** **Total de elementos**

- Es preciso notar que a veces se dice "números de elementos **por** grupo en lugar de "número de elementos **en cada** grupo". Es importante tener en cuenta que el "**por**" en este caso no es una multiplicación.

- En el ítem 4 se espera que los estudiantes relacionen los "grupos" con las bandejas o pulseras y los "elementos" con queques o piedras, y no que señalen las cantidades específicas mencionadas en cada problema.

- Si en el ítem 5 algunos estudiantes plantean que una de las variables es el número de elementos de cada grupo, se puede señalar que:
    - si la otra variable es el número total de elementos y el número de grupos está fijo, también es una situación de variación proporcional.

    - si la otra variable es el número de grupos y el número total de elementos está fijo, ya no se trata de variación proporcional (puesto que, si una de las variables se multiplica por una cantidad, la otra se divide por la misma). A este tipo de situaciones se les conoce generalmente como de proporcionalidad inversa.

Otra caracterización para la proporcionalidad

Construcción de conocimientos

Tiempo: 20 min.
Modalidad: En parejas y de curso completo.
Materiales: Hoja actividad 3.

PROPÓSITO

Con esta actividad se persigue que los futuros profesores caractericen una relación de proporcionalidad mediante su constante de proporcionalidad.

Fecha: _____

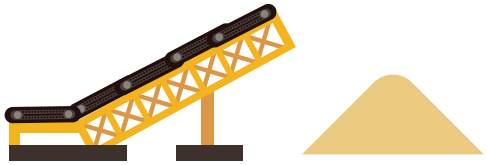
Nombre: _____

Unidad de Aprendizaje Proporcionalidad y Linealidad
Hojas de trabajo - Clase 1

Actividad 3

Trabajo en parejas

En otro sector de la planta de áridos donde se extrae la arena, se utiliza una cinta transportadora para acumularla antes de distribuirla.



La cinta que emplean transporta una cantidad fija de arena por hora. La semana anterior la ajustaron para que cada hora transportara 50 m^3.

1. ¿Qué se puede afirmar respecto de la relación del tiempo de funcionamiento de la cinta y el volumen de arena acumulada? Completa los datos en la tabla.

Tiempo de funcionamiento de la cinta (h)	Volumen de arena (m^3)	Volumen/Tiempo (m^3/h)
1		
2		
3		
5		
7,5		

2. Explica en el contexto los valores obtenidos en la última columna. ¿Cómo se obtiene la unidad de medida $\frac{m^3}{h}$?

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Revise las preguntas sugeridas para la discusión de curso completo.

VER MÁS +

Es clave para esta actividad que los estudiantes concluyan las ideas descritas en la gestión.

VER MÁS +

Actividad 3

3. Las siguientes tablas contienen información correspondiente a tres situaciones de proporcionalidad distintas. ¿Qué se puede afirmar respecto del cociente entre los valores de las variables?, ¿qué significa en cada caso?

Costo del pan

Cantidad de pan (kg)	Costo ($)
1	980
2	1.960
5	4.900
6	5.880

Volumen de agua que vierte una llave, abierta en forma fija, en un tiempo determinado

Tiempo (m)	Volumen de agua (L)
1	12
2	24
8	96
10	120
20	240

Perímetro de un cuadrado según la medida de su lado

Medida del lado (cm)	Perímetro (cm)
1	4
2	8
15	60
23	92

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Asegúrese de que los estudiantes comprendan la caracterización de proporcionalidad descrita en el cierre.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (10 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Monitoree el trabajo de los estudiantes y observe si identifican que el valor de la última columna en el ítem 1 es siempre constante.

- Observe si en el ítem 3 los estudiantes son capaces de anticipar que, dado que las situaciones son de proporcionalidad, el cociente es constante. Observe si aún hay estudiantes que requieren hacer los cocientes en cada fila para responder la pregunta en el ítem 3.

VOLVER

DISCUSIÓN DE CURSO COMPLETO (10 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar la discusión de curso completo:

- Para iniciar la discusión puede plantear la siguiente pregunta: *¿En todas las situaciones en las que dos variables se relacionan proporcionalmente pasa esto? ¿Por qué?* La pregunta es relativamente vaga de forma intencional para que ellos verbalicen que lo que ocurre es que el cociente es constante.

- Para que argumenten respecto de la generalidad de este hecho (cociente constante) puede preguntar: *Si agregamos una nueva fila en la tabla, con un nuevo valor de horas, ¿el cociente sería el mismo? ¿Por qué?*

- Apóyese en las situaciones propuestas en el ítem 1 y 3 para motivar la discusión y concluir que esto es general.

- Una vez concluido lo anterior se sugiere preguntar: *¿Hay alguna fila de las tablas de datos en la que el valor constante es más fácil de determinar?*

VOLVER

CONCLUSIÓN DE LA DISCUSIÓN (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes ideas al cierre de la discusión:

- Cuando dos variables, por ejemplo, cantidad de pan y su costo, se relacionan proporcionalmente, el cociente entre los valores que van tomando estas variables es el mismo. A este valor se le llama constante de proporcionalidad.

- La constante de proporcionalidad es igual al valor de una de las variables cuando la otra (la del denominador) es 1. Por ejemplo, el costo de 1 kg de pan es $980 y corresponde a la constante de proporcionalidad en ese caso.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad, comente los puntos que se indican a continuación (puede usar la diapositiva 18):

- Cuando dos variables x e y se relacionan proporcionalmente, el cociente $\frac{y}{x}$ entre los valores que van tomando estas variables es constante. Esta constante se denomina **constante de proporcionalidad**.

- Recíprocamente, si el cociente entre dos variables es constante, entonces estas se relacionan proporcionalmente.

VOLVER

LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

Para el lanzamiento puede señalar que: *En la siguiente actividad analizaremos otras situaciones y discutiremos sobre las relaciones entre sus variables desde la perspectiva de la proporcionalidad.* (Puede usar la diapositiva 19).

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Algunos estudiantes podrían invertir el orden en el que se hacen los cocientes de las variables de una misma situación. En este caso, haga notar que para cada orden el cociente es constante, lo que produce 2 constantes, generalmente distintas.

- Si los estudiantes operan cómodamente en álgebra, puede mostrar en términos generales que el cociente entre los valores de dos variables es constante cuando estas se relacionan proporcionalmente, basándose en una tabla del siguiente estilo:

Variable 1	Variable 2
a	b
$n \cdot a$	$n \cdot b$

$$\frac{n \cdot b}{n \cdot a} = \frac{b}{a}$$

Si el conocimiento algebraico de los estudiantes es más débil, puede presentar estas ideas en palabras.

- Es probable que los estudiantes resuelvan esta actividad rápidamente y, si el tiempo lo permite, retome el ítem 3 para discutir con ellos el hecho de que, en muchas situaciones, la constante de proporcionalidad tiene una interpretación en el contexto, por ejemplo, en el caso del costo del pan, es el precio de 1 kg de pan.

Proporcionalidad y crecimiento simultáneo

Sistematización

Tiempo: 15 min.
Modalidad: Individual y de curso completo.
Materiales: Hoja actividad 4.

PROPÓSITO

El foco de esta actividad está en que los futuros profesores contrasten situaciones de proporcionalidad con situaciones en que ambas variables aumentan, pero no de manera proporcional.

Fecha: _____

Nombre: _____

Unidad de Aprendizaje Proporcionalidad y Linealidad
Hojas de trabajo - Clase 1

Actividad 4

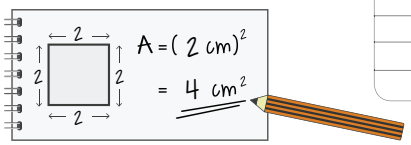
Trabajo en parejas

1. Lean las siguientes situaciones y completa las tablas de datos:

Pablo tiene 36 años y su hija 9.

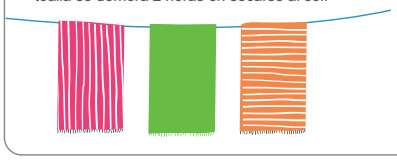
Edad hija (años)	Edad Pablo (años)
9	
18	
27	

La longitud del lado de un cuadrado es 2 cm y su área es 4 cm².



Longitud de lado (cm)	Área del cuadrado (cm²)
2	
4	
5	

Se cuelgan toallas recién lavadas simultáneamente una al lado de la otra. Una toalla se demora 2 horas en secarse al sol.



Cantidad de toallas	Tiempo de secado (H)
1	
5	
10	

2. ¿Cuáles de las situaciones anteriores son de proporcionalidad? Justifiquen su respuesta.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Identifique los estudiantes que presentan las respuestas que se indican. Revise la gestión.

VER MÁS +

Revise la gestión sugerida para la discusión.

VER MÁS +

Asegúrese de cerrar esta actividad mencionando las ideas que se proponen.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Invite a los estudiantes a desarrollar la actividad sin dar información adicional a la que aparece en el enunciado. Resguarde que esta actividad sea desarrollada en forma individual.

- Monitoree el trabajo de los estudiantes e identifique a aquellos que completan la tabla usando los datos de una sola fila, como si correspondiese a una situación de proporcionalidad

- Observe si hay estudiantes que analizan algunas de las situaciones y se dan cuenta de que la relación de las variables no es proporcional.

VOLVER

DISCUSIÓN DE CURSO COMPLETO (10 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar la discusión de curso completo:

- Invite a dos grupos por cada situación a registrar sus respuestas en la pizarra, todas al mismo tiempo, procurando que, en cada una, uno de los grupos la haya completado proporcionalmente y el otro basándose en el contexto.

- Se sugiere comenzar solicitando a los tres grupos que señalaron que las situaciones son proporcionales que expliquen en qué se basaron para completar la tabla y que argumenten. Durante este momento resguarde que quienes creen que las situaciones no son proporcionales no intervengan aún. Una vez que estos tres grupos hayan presentado sus argumentos, solicite lo mismo a los otros tres grupos. Luego de eso genere una breve discusión.

- Observe si entre los argumentos para señalar que una situación es proporcional, por ejemplo la primera, los estudiantes señalan que *cuando una variable aumenta la otra también lo hace*. Frente a esta afirmación, puede hacer preguntas como las siguientes: ¿cuántos años han pasado desde que la niña tenía 9 años hasta que cumplió 18?, en esa cantidad de años, ¿se duplica la edad del padre?

- Para revisar el caso de las áreas, seguramente conviene analizar con los estudiantes el cociente y verificar si es constante, porque probablemente hicieron el cálculo usando una fórmula. En la situación de las toallas basta analizar el contexto.

VOLVER

CONCLUSIÓN DE LA DISCUSIÓN (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes ideas al cierre de la discusión:

- Las situaciones analizadas no son de proporcionalidad:
  - Cuando la edad de la niña se duplica, aumentando de 9 a 18 años, han pasado 9 años y por tanto la edad del padre aumenta a 45 años, es decir, no se ha duplicado.
  - Si consideramos un cuadrado de lado a, su área es a^2. El cociente entre los valores de estas dos variables es $\frac{a^2}{a} = a$, y por tanto no es constante.
  - No importa cuántas toallas se consideren en el proceso de secado, ya que el tiempo de secado es constante, de 2 horas, porque el secado de una toalla no interfiere en el de otra.

- Notemos que cuando el valor de una variable aumenta en las primeras dos situaciones, el valor de la otra también lo hace; sin embargo, no son proporcionales.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad, comente los puntos que se indican a continuación (puede usar la diapositiva 22):

- Se suele caracterizar erróneamente la proporcionalidad como aquella relación en que si los valores de una variable van creciendo, los de la otra también. Existen muchas situaciones en que esto ocurre, pero las variables involucradas no se relacionan proporcionalmente. Por lo anterior, es importante que al estudiar la proporcionalidad, esta se caracterice a través de los atributos abordados en la clase.

- El estudio de un concepto matemático requiere, además de caracterizarlo en torno a sus atributos y propiedades, contrastarlo con situaciones en las que el concepto no está presente, pero tienen atributos similares que frecuentemente llevan a un error. Esto es relevante para la labor del docente, ya que le permite generar procesos de reflexión con niños y niñas evitando una comprensión conceptual limitada.

VOLVER

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Durante el desarrollo de la actividad, algunos estudiantes podrían establecer inmediatamente que determinadas situaciones no son de proporcionalidad, por ejemplo: si calculan el área del cuadrado usando la fórmula, podrían notar que los cocientes no son constantes o que al duplicar la longitud del lado no se duplica el área. En tales casos, se sugiere que NO valide inmediatamente su respuesta y considere sus opiniones en el momento de discusión.

- Al analizar la tercera situación, los estudiantes podrían formular preguntas respecto del contexto en que se plantea el secado de las toallas, por ejemplo: ¿qué pasa si se nubla durante el secado? o ¿dónde y cómo se están colocando las toallas? Frente a estas preguntas, se sugiere señalar que consideren las mismas condiciones durante todo el proceso de secado y que las toallas se cuelgan simultáneamente una al lado de la otra, como muestra la imagen.

Cierre de la clase

Gestión sugerida

Tiempo: 10 min

- Entregue la ficha de sistematización a los estudiantes.
- Revise junto con sus estudiantes las ideas que están en el Recapitulemos de la ficha de sistematización. Puede apoyarse en las preguntas que aparecen en la ficha.

Recapitulemos:

- Una relación de proporcionalidad se caracteriza porque:
  - Al duplicar, triplicar, etc., una de las variables, también se duplica, triplica, etc., la otra.
  - El cociente entre los valores que van tomando estas variables es una constante. A esta cantidad se le denomina constante de proporcionalidad.
- Cuando dos variables se relacionan proporcionalmente, la constante de proporcionalidad corresponde al valor de una variable cuando la otra vale una unidad.
- Las situaciones multiplicativas estudiadas en 3° y 4° básico, en los cuales la cantidad de elementos en cada grupo es constante y el número de grupos varía, corresponden a relaciones de proporcionalidad en que las variables son número de grupos y total de elementos.
- Un error frecuente es pensar que la proporcionalidad se caracteriza porque cuando los valores de una variable van creciendo, los de la otra también. De hecho, existen muchas situaciones en que se da esta característica, pero las variables involucradas no se relacionan proporcionalmente.

- Entregue y comente brevemente la Tarea 1 “La regla de tres”.
- Para lanzar la siguiente clase, se sugiere indicar que continuarán con el estudio de las situaciones proporcionales, caracterizándolas desde una perspectiva gráfica y algebraica.

RESPUESTAS EXPERTAS

Actividad	Respuesta experta
Actividad 1 Registrando pedidos en la planta de áridos	**1.** La respuesta es 60 paladas. Una posible manera de obtenerla es multiplicar por 2 la primera fila del registro, es decir: 2,5 camionadas x 2 = 5 camionadas, y 30 paladas x 2 = 60 paladas.
	2. La respuesta es 0,75 camionada. Una posible manera de obtenerla es multiplicar por 3 la segunda fila del registro, esto es: 3 paladas x 3 = 9 paladas, y 0,25 camionada x 3 = 0,75 camionada.
	3. La respuesta es 1 camionada. Una posible manera de obtenerla es multiplicar por 4 la segunda fila del registro, esto es: 3 paladas x 4 = 12 paladas, y 0,25 camionada x 4 = 1 camionada.
	4. La respuesta es 2,75 camionadas. Una posible manera de obtenerla es multiplicar por 11 la segunda fila del registro, esto es: 3 paladas x 11 = 33 paladas, y 0,25 camionada x 11 = 2,75 camionadas. Una manera alternativa de resolver es sumar las dos primeras filas del registro.
	5. Al multiplicar por 5 la cantidad de paladas, la cantidad de camionadas también se multiplica por 5.
	6. La afirmación es cierta, porque si quiero pasar de 1 camionada a un cierto número *n* de camionadas multiplicamos por *n* el número de camionadas y, por lo tanto, el número de paladas debe multiplicarse por *n* también.
Actividad 2 Problemas multiplicativos	**1.** La respuesta es 60 paladas, porque se trata nuevamente de una situación de proporcionalidad, por lo tanto, al multiplicarse por 4 el número de camionadas, se multiplica también por 4 el número de paladas.
	2. Número de camionadas X Número de paladas por camionada = Total de paladas 4 16 60

Actividad	Respuesta experta
Actividad 2 Problemas multiplicativos	**3.** **SITUACIÓN 1** Número de grupos X Número de elementos en cada grupo = Total de elementos 5 6 30 **SITUACIÓN 2** Número de grupos X Número de elementos en cada grupo = Total de elementos 8 12 96
	4. En la Situación 1 los elementos son los queques y los grupos son las bandejas. En la Situación 2 los elementos son las piedras y los grupos son las pulseras.
	5. Dado que el número de queques por bandeja es fijo, al multiplicar por una determinada cantidad el número de bandejas, entonces el número total de queques se va a multiplicar por la misma cantidad. Por lo tanto, se trata de una relación de proporcionalidad entre el número de bandejas y el número total de queques. Para la Situación 2, dado que el número de piedras que se utiliza por pulsera es fijo, al multiplicar por una determinada cantidad el número de pulseras, el número total de piedras que se necesitan se va a multiplicar por la misma cantidad. Por lo tanto, se trata de una relación de proporcionalidad entre el número de pulseras y el número total de piedras.

Actividad	Respuesta experta
Actividad 3 Otra caracterización para la proporcionalidad	**1.** Las dos primeras columnas de la tabla sugieren que al multiplicar por *n* el número de horas, la cantidad de arena que ha trasladado la cinta también se multiplica por *n*. Este hecho que es claro de la situación planteada, por tanto estas variables se relacionan proporcionalmente.

Tiempo de funcionamiento de la cinta (h)	Volumen de arena (m^3)	Volumen/Tiempo (m^3/h)
1	50	50
2	100	50
3	150	50
5	250	50
7,5	375	50

2. Del contexto, en cada hora se transportan 50 m^3, así al transcurrir *n* horas se transportarán $n \cdot 50\ m^3$, lo que dividido por *n* entrega el 50 constante de la tercera columna. La unidad de medida se obtiene por la división entre los metros cúbicos de arena y las horas de tiempo transcurrido. Por lo tanto, la unidad de medida corresponde a $\frac{m^3}{h}$.

3. En las tres situaciones planteadas el cociente entre las variables es constante. En la primera situación el cociente corresponde al costo en pesos por cada kilogramo de pan. En la segunda situación corresponde a los litros de agua que vierte una llave por cada minuto de tiempo. Finalmente, en la tercera situación el cociente es constante y no tiene un significado útil, más que corresponder al perímetro de un cuadrado cuyo lado mide 1 unidad.

Actividad	Respuesta experta
Actividad 4 Proporcionalidad y crecimiento simultáneo	**1.**

Edad hija (años)	Edad Pablo (años)
9	36
18	45
27	54

Longitud del lado (cm)	Área del cuadrado (cm^2)
2	4
4	16
5	25

Cantidad de toallas	Tiempo de secado (horas)
1	2
5	2
10	2

2. Ninguna de las situaciones anteriores es de proporcionalidad. Para determinarlo basta calcular el cociente entre los valores de las variables y verificar que no es constante.

PLANIFICACIÓN
CLASE 2

UAFI: Proporcionalidad y linealidad

CLASE 1
Relaciones de proporcionalidad

CLASE 2
Proporcionalidad y función lineal

CLASE 3
Función afín

TAREA 1
La regla de tres

TAREA 2
Funciones afines

CLASE 2: PROPORCIONALIDAD Y FUNCIÓN LINEAL

RESUMEN DE LA CLASE

Meta de la clase	Al finalizar la clase se espera que los futuros profesores[1] reconozcan que el gráfico de las relaciones de proporcionalidad es una línea recta que pasa por el origen, asociando dichas relaciones con las funciones lineales, interpretando la pendiente de la recta como la constante de proporcionalidad y relacionándola con su inclinación.
Descripción de la clase	Al inicio de la clase, utilizando como contexto la relación entre las alturas de objetos y la longitud de sus sombras, los futuros profesores caracterizan las situaciones de proporcionalidad a través de su gráfico, como rectas que pasan por el origen. Luego, se describe de manera algebraica la relación funcional entre estas dos variables, definiendo la función lineal. A continuación, los estudiantes reconocen que, para una función lineal, el cociente entre incrementos de las variables es constante, definiendo

[1]Respecto del uso de lenguaje inclusivo: Con el propósito de no provocar una saturación gráfica que dificulte la comprensión de la lectura, en este documento no se considera el uso de “los/las” u “o/a” para hacer referencia a ambos géneros de manera conjunta. En su lugar, se utilizan términos como “el futuro profesor”, “el estudiante” y “el profesor” y sus respectivos plurales para aludir de manera inclusiva a hombres y mujeres. Sin embargo, durante la gestión de la clase se sugiere la utilización de lenguaje inclusivo que invite a los y las estudiantes a involucrarse activamente en las actividades.

	así la pendiente que corresponde a la constante de proporcionalidad y caracteriza la inclinación de la recta. La clase finaliza con una reflexión sobre cómo el estudio de las relaciones de proporcionalidad sirve para introducir el estudio de funciones.
Aprendizajes esperados	Al finalizar la clase se espera que el estudiante: • Reconozca las rectas (de pendiente positiva) que pasan por el origen como el gráfico de las relaciones de proporcionalidad, y sea capaz de graficar dichas relaciones. • Identifique las funciones lineales como relaciones de proporcionalidad. • Reconozca la pendiente del gráfico de una función lineal como la constante de proporcionalidad. • Asocie la pendiente con la variación de la variable dependiente, cuando la independiente aumenta en una unidad. • Relacione el valor de la pendiente con la inclinación de la recta respecto al eje x. • Reconozca las relaciones de proporcionalidad como precursoras para la enseñanza y aprendizaje de las funciones lineales.
Conocimientos previos	• Relaciones de proporcionalidad. • Algunos elementos de gráficos, como plano cartesiano, coordenadas de un punto. • Expresión algebraica y su operatoria básica.
Materiales	Estudiantes • Hojas de trabajo del estudiante. Profesor • Computador. • Proyector.
Tiempo total estimado	90 min

ESQUEMA DE LA CLASE

Tipo de actividad	Actividades	Tiempo (T) Modalidad (M)
Exploración	**Actividad 1: Determinando la longitud de las sombras** Con esta actividad se busca que los futuros profesores caractericen las situaciones de proporcionalidad a través de su gráfico.	T: 25 min. M: En parejas y de curso completo.
Construcción de conocimientos	**Actividad 2: Sombras funcionales** Esta actividad está centrada en que los futuros profesores determinen que, en una relación de proporcionalidad, una variable es función de la otra, y que dicha función se denomina lineal.	T: 20 min. M: En parejas y de curso completo.
Construcción de conocimientos	**Actividad 3: Función lineal y su gráfico** Con esta actividad se persigue que los estudiantes comprendan que la constante de proporcionalidad en una función lineal $y = ax$ corresponde a la variación de y respecto de la variación unitaria de x, y que esta variación determina la inclinación de la recta.	T: 25 min M: En parejas y de curso completo.
Cierre	**Cierre de la clase** Con esta actividad se busca que los futuros profesores reconozcan los aprendizajes logrados en la clase sobre la relación entre proporcionalidad y la función lineal.	T: 20 min. M: De curso completo.

Determinando la longitud de las sombras

Exploración

Tiempo: 25 min.
Modalidad: En parejas y de curso completo.
Materiales: Hoja actividad 1.

PROPÓSITO

Con esta actividad se busca que los futuros profesores caractericen las situaciones de proporcionalidad a través de su gráfico.

Fecha: _____

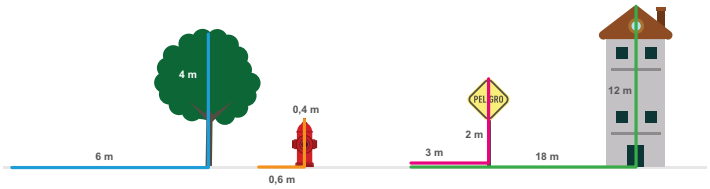
Nombre: _____

Unidad de Aprendizaje Proporcionalidad y Linealidad
Hojas de trabajo - Clase 2

Actividad 1

Trabajo en parejas

La sombra que proyecta un objeto está relacionada con su tamaño y la posición del sol. Un día de verano se midieron las alturas y las sombras de varios objetos. La primera medición se realizó a las 09:30 horas, y la información se registró en el siguiente dibujo:



1. Organiza los datos del dibujo en la siguiente tabla y analiza si la altura de los objetos y la longitud de sus sombras son proporcionales. Elabora al menos dos argumentos.

Altura (m)	Longitud de la sombra (m)

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

La gestión de esta actividad se apoya en el uso de diapositivas. Revise las que debe proyectar.

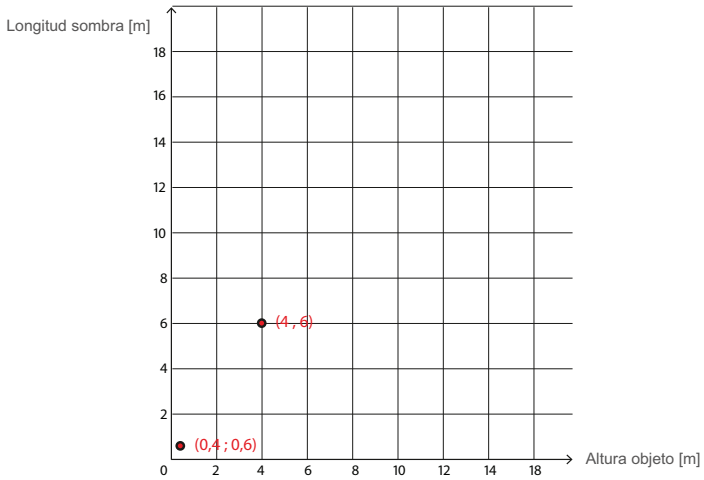
VER MÁS +

Hay anticipaciones y sugerencias que es importante tener en cuenta al realizar la actividad.

VER MÁS +

Actividad 1

2. Observa la presentación que te mostrará el profesor que recuerda cómo se construye un gráfico. Luego, sitúa el resto de los puntos de la tabla en el plano.



3. Dibuja en el gráfico todos los puntos de la tabla. Luego une todos los pares de puntos consecutivos del gráfico, y el más cercano al origen con este. ¿Qué figura se forma?

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

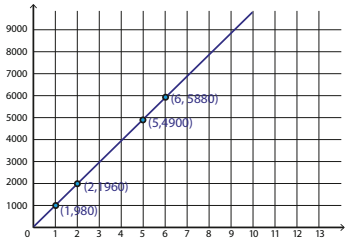
Asegúrese de que los estudiantes comprendan la caracterización gráfica. Revise las ideas al cierre.

VER MÁS +

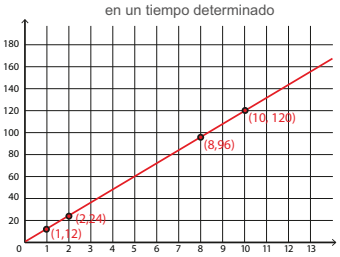
Actividad 1

4. Los siguientes gráficos corresponden a las tres situaciones de proporcionalidad estudiadas en la actividad 3 de la clase anterior. Señala al menos dos características comunes de ellos.

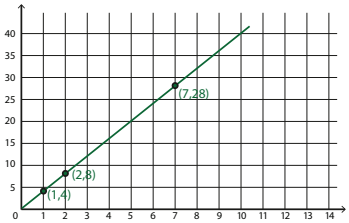
Costo de una compra de pan en kilogramos



Litros de agua que vierte una llave abierta, en un tiempo determinado



Perímetro de un cuadrado según cuánto mide su lado



Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (10 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Monitoree el desarrollo del ítem 1 y observe si los estudiantes dan argumentos basados en las características de la proporcionalidad estudiados en la clase anterior. Una vez que la mayoría haya elaborado argumentos correctos, utilice diapositivas 5 a la 11 para justificar por medio de semejanza que estas dos variables son siempre proporcionales.

- Antes de responder el ítem 2, proyecte las diapositivas 14 a la 20 para recordar nociones básicas de construcción de gráficos. Posteriormente, pida a los estudiantes que desarrollen los ítems 2 y 3 de la guía de trabajo. Revise en conjunto sus respuestas y establezca con ellos que la figura que se forma al unirlos es una recta.

- Luego, para el ítem 4 de la guía, observe si son capaces de establecer entre las características que en los tres casos las rectas pasan por el origen.

VOLVER

COMPARTIR RESULTADOS (10 min)

Para la puesta en común, puede serle útil considerar las siguientes sugerencias de gestión:

- Invite a los estudiantes a compartir las respuestas del ítem 4 y a explicar, apoyándose en los gráficos, las características comunes que hayan encontrado.

- Resguarde que entre las características aparezcan las siguientes ideas:
    - Los tres gráficos corresponden a una recta.
    - Las rectas pasan por el origen.

VOLVER

SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS (5 min)

En la síntesis puede destacar que en estas cuatro situaciones distintas de proporcionalidad la gráfica es una recta que pasa por el origen. Para generalizar esta idea se sugiere mostrar las diapositivas diapositivas 24 a la 32 que demuestran que una relación entre dos variables es de proporcionalidad si y solamente si su gráfico es una recta que pasa por el origen.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad, comente los puntos que se indican a continuación (puede usar la diapositiva 33):

- Las relaciones de proporcionalidad se caracterizan por su gráfico, que siempre es una línea recta que pasa por el origen.

- En muchas situaciones las variables involucradas solo pueden tomar ciertos valores, por ejemplo, el número de artículos que se compra y el costo total de la compra. En estos casos, el gráfico corresponde a algunos puntos de la recta que pasa por el origen en lugar de la recta completa.

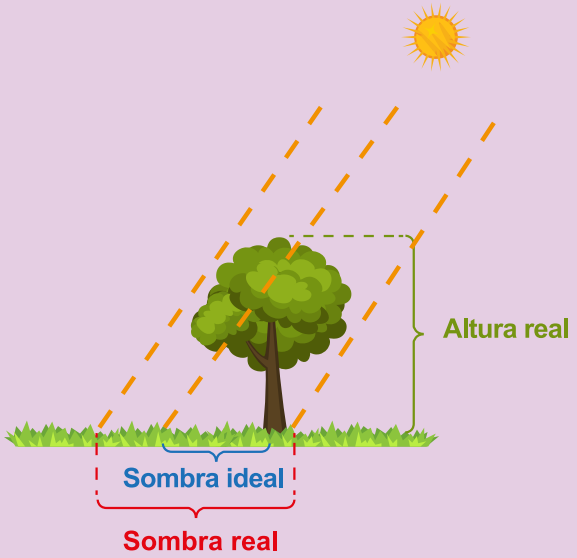
VOLVER

LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

Para el lanzamiento puede señalar que: *En la siguiente actividad continuaremos trabajando en el mismo contexto, pero esta vez caracterizaremos las situaciones de proporcionalidad desde una perspectiva funcional.* (Puede usar la diapositiva 34).

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Si algún estudiante manifiesta duda respecto de que las variables sean proporcionales, indique que esto ocurre pues los objetos considerados son delgados. En estricto rigor, para objetos anchos, la longitud de la sombra no es proporcional a la altura del objeto (ver imagen). Sugerimos que esta observación se comente con los estudiantes solo si alguno de ellos tiene dudas.



- En el desarrollo del ítem 1 de la actividad es importante observar si los estudiantes son capaces de establecer que las variables son proporcionales basándose en las características estudiadas en la clase anterior.

- Se sugiere hacer una puesta en común con las respuestas del ítem 1 solo si aún hay estudiantes que tienen dificultades para elaborar argumentos válidos respecto de la proporcionalidad entre estas dos variables. Si observa que no las hay, puede presentar directamente la animación que utiliza el Teorema de Tales para justificar la proporcionalidad entre estas dos variables.

- En el momento en que los estudiantes están graficando los puntos de la tabla y esbozando la gráfica que se forma al unirlos, observe que todos lleguen a una recta.

- Durante el desarrollo del ítem 4 observe las características comunes que señalan los estudiantes respecto de los gráficos. Entre dichas características algunos podrían solo decir que los tres gráficos corresponden a una recta. Frente a esas respuestas invítelos a buscar otras características comunes.

- Si algún estudiante señala que los gráficos corresponden a una “mitad de recta” o “semirrecta” se sugiere señalar que tiene razón y que esto se debe a que las variables consideradas en las situaciones tienen valores positivos.

Sombras funcionales

Construcción de conocimiento

Tiempo: 20 min.
Modalidad: En parejas y de curso completo.
Materiales: Hoja actividad 2.

PROPÓSITO

Esta actividad está centrada en que los futuros profesores determinen que en una relación de proporcionalidad una variable es función de la otra, y que dicha función se denomina lineal.

Fecha: _____

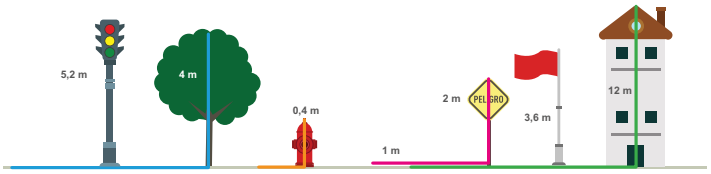
Nombre: _____

Unidad de Aprendizaje Proporcionalidad y Linealidad
Hojas de trabajo - Clase 2

Actividad 2

Trabajo en parejas

Ese día también a las 12:00 horas se midió nuevamente la longitud de las sombras de los mismos objetos y se incluyeron otros en las mediciones.



1. Completa los valores de la tabla con la información del esquema.

Altura (m)	Longitud de la sombra (m)
0,4	
2	1
3,6	
4	
5,2	
12	

¿Cuál es la constante de proporcionalidad entre la longitud de la sombra y la altura del objeto?, ¿qué expresión algebraica permite calcular directamente la sombra de los objetos dada su altura?

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

La discusión debe estar centrada en la relación de proporcionalidad que hay en los problemas. Revise las sugerencias de gestión.

VER MÁS +

Es importante conducir a los estudiantes a que lleguen a la conclusión presentada en la gestión.

VER MÁS +

Actividad 2

2. Las siguientes tablas corresponden a los datos obtenidos durante las mediciones realizadas ese día. Completa la constante de proporcionalidad y una expresión algebraica que permita calcular la longitud de la sombra a partir de la altura de los objetos, para cada caso. Escribe la expresión algebraica usando la constante de proporcionalidad. Utiliza x para la variable altura e y para la variable longitud de la sombra.

Hora 09:30

Altura (m)	Longitud sombra (m)
0,4	0,6
2	3
3,6	5,4
4	6
5,2	7,8
12	18

Constante de proporcionalidad	
Expresión algebraica	

Hora 10:30

Altura (m)	Longitud sombra (m)
0,4	0,4
2	2
3,6	3,6
4	4
5,2	5,2
12	12

Constante de proporcionalidad	
Expresión algebraica	

Hora 12:00

Altura (m)	Longitud sombra (m)
0,4	0,2
2	1
3,6	1,8
4	2
5,2	2,6
12	6

Constante de proporcionalidad	
Expresión algebraica	

3. Considera dos variables x e y que se relacionan proporcionalmente con constante a. Completa la expresión algebraica que las relaciona.

$$y = \square \cdot \square$$

Justifica la validez de la expresión, usando el significado de la constante de proporcionalidad.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Hay anticipaciones y sugerencias que debe tener en cuenta al gestionar la actividad.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (10 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Observe las expresiones algebraicas que están escribiendo los estudiantes en el ítem 2 y asegúrese de que están escritas en términos de la constante de proporcionalidad.

- Observe si en el ítem 3 algunos estudiantes justifican la expresión algebraica que relaciona las variables x e y a partir del significado de la constante de proporcionalidad $\frac{y}{x} = a$ despejando y en función de x.

VOLVER

DISCUSIÓN DE CURSO COMPLETO (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar la discusión de curso completo:

- Haga una puesta en común para compartir las respuestas de los estudiantes. Centre la discusión en la expresión algebraica para cada situación encontrada en el ítem 2 y cómo la constante de proporcionalidad aparece en ella. Puede preguntar qué similitud tienen las tres expresiones obtenidas en este caso.

- Oriente a los estudiantes para que describan este tipo de relaciones como $y = a \cdot x$, en la que a es la constante de proporcionalidad.

- Luego, ayúdelos a que justifiquen esta expresión, pidiéndoles que:
  - escriban de manera algebraica la definición de la constante de proporcionalidad $\frac{y}{x} = a$. Para ello, puede hacer preguntas como la siguiente: ¿de qué manera se puede expresar a en términos de x e y?

  - despejen y a partir de la expresión anterior. Se sugiere guiarlos con una pregunta como la siguiente: ¿de qué manera podemos usar esta expresión para justificar la fórmula que encontramos en los ejemplos del ítem 2?

VOLVER

CONCLUSIÓN DE LA DISCUSIÓN (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes ideas al cierre de la discusión:

- Pregunte a los estudiantes sobre la diferencia entre el tipo de trabajo matemático realizado en el ítem 2 y 3:
  - Oriéntelos para concluir que inicialmente se caracterizó, a través de ejemplos, la expresión funcional $y = a \cdot x$ de la relación entre las variables que involucra la constante de proporcionalidad.
  - Señale que posteriormente fue necesario generalizar esta relación justificándola a partir de la definición de constante de proporcionalidad $a = \frac{y}{x}$.
- Indique que este tipo de trabajo matemático es habitual: primero descubrir propiedades de manera inductiva y luego justificarlas de forma deductiva.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad, comente los puntos que se indican a continuación (puede usar la diapositiva 39):

A partir de esta actividad pudimos caracterizar las relaciones de proporcionalidad en "términos funcionales", esto es:

- Dos variables x e y se relacionan de manera proporcional cuando el cociente entre y y x es una constante. De manera algebraica, esto se puede escribir de la siguiente forma:
  $\frac{y}{x} = a$, en que a es la constante de proporcionalidad.
- Multiplicando por x ambos lados de la igualdad $\frac{y}{x} = a$, esta se transforma en la expresión $y = a \cdot x$. Esta expresión nos permite calcular el valor de la variable y a partir de cualquier valor de la variable x.
- Cuando los valores de una variable y se pueden calcular en términos de los valores de una variable x, se dice que y es función de x. Se suele llamar a x variable independiente, y a y variable dependiente. En caso de que $y = a \cdot x$, decimos que esta función es lineal. Así, las relaciones de proporcionalidad entre dos variables corresponden a funciones lineales.

VOLVER

LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

Para el lanzamiento puede señalar que: *En la siguiente actividad seguiremos trabajando con la misma situación, analizando la relación lineal entre las mismas variables e interpretando gráficamente algunas características de esta relación.* (Puede usar la diapositiva 40).

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Durante el trabajo en torno al ítem 2 si observa que los estudiantes no utilizan la constante de proporcionalidad para escribir las expresiones en alguno de los casos, invítelos a reescribirlos en términos de una multiplicación que incluya la constante de proporcionalidad. Por ejemplo, si en la tabla de las 12:00 horas escriben $y = \frac{x}{2}$ puede preguntar: ¿hay alguna manera de escribir esa expresión como una multiplicación?, ¿puede involucrar esa multiplicación la constante $\frac{1}{2}$?
- En la discusión del ítem 3 es posible que algunos estudiantes quieran señalar rápidamente una deducción algebraica de la expresión funcional de las relaciones proporcionales, a partir de la definición de constante de proporcionalidad, lo que no permitiría que se obtenga primero la fórmula de manera inductiva. Es por ello que se sugiere desarrollar ordenadamente la discusión, primero para el ítem 2 y luego para el ítem 3.

Función lineal y su gráfico

Construcción de conocimientos

Tiempo: 25 min.
Modalidad: En parejas y de curso completo.
Materiales: Hoja actividad 3.

PROPÓSITO

Con esta actividad se persigue que los estudiantes comprendan que la constante de proporcionalidad en una función lineal $y = ax$ corresponde a la variación de y respecto de la variación unitaria de x, y que esta variación determina la inclinación de la recta.

Fecha: _____

Nombre: _____

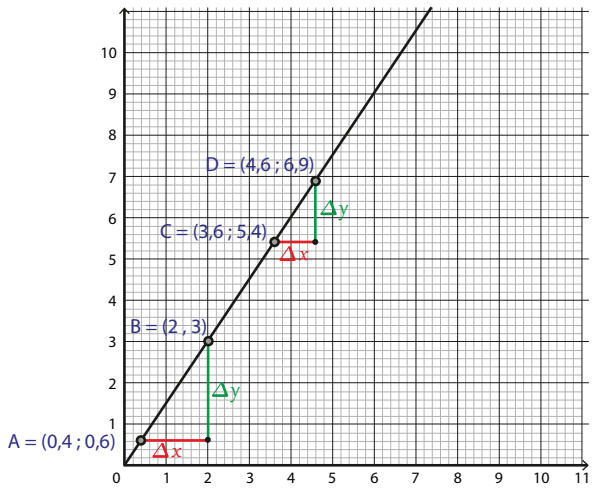
Unidad de Aprendizaje Proporcionalidad y Linealidad
Hojas de trabajo - Clase 2

Actividad 3

Trabajo en parejas

El siguiente gráfico está construido a partir de las mediciones realizadas a las 09:30 horas.

Utiliza esta información para responder las siguientes preguntas:



1. Calcula el valor de Δx y de Δy a partir de las coordenadas de los puntos.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Revise detalladamente las sugerencias para guiar la discusión.

VER MÁS +

Asegúrese que los estudiantes concluyan lo indicado en el cierre.

VER MÁS +

Actividad 3

2. Completa la tabla y responde las preguntas que aparecen a continuación:

Pares de puntos		Δx	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
A (0,4 ; 0,6)	**B** (2 , 3)	1,6	2,4	
C (3,6 ; 5,4)	**D** (4,6 ; 6,9)	1	1,5	
A (0,4 ; 0,6)	**C** (3,6 ; 5,4)			
(6 , 9)	(7 ; 10,5)			

- ¿Qué puedes concluir respecto del cociente entre Δy (variación de y) y Δx (variación correspondiente de x)?

- ¿Cuál es el valor de Δy cuando Δx es igual a una unidad?

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

En esta actividad se introducen términos y definiciones de proporcionalidad. Revise el cierre de la actividad.

VER MÁS +

Actividad 3

3. Completa las tablas construidas a partir de las mediciones realizadas a las 10:30 y 12:00 horas, y responde las preguntas que aparecen a continuación:

Medición realizada a las 10:30

Puntos		Δx	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
A' (0,4 ; 0,4)	B' (2 , 2)	1,6	1,6	
C' (3,6 ; 3,6)	D' (4,6 ; 4,6)	1	1	
A' (0,4 ; 0,4)	C' (3,6 ; 3,6)	3,2	3,2	
(6 , 6)	(7 , 7)	1	1	

Medición realizada a las 12:00

Puntos		Δx	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
A'' (0,4 ; 0,2)	B'' (2 , 1)	1,6	0,8	
C'' (3,6 ; 1,8)	D'' (4,6 ; 2,3)	1	0,5	
A'' (0,4 ; 0,2)	C'' (3,6 ; 1,8)	3,2	1,6	
(6 , 3)	(7 ; 3,5)	1	0,5	

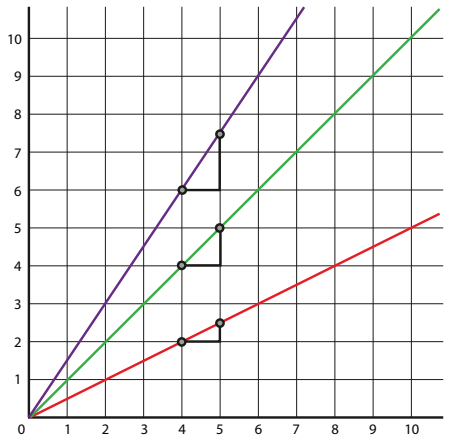
- ¿Qué puedes concluir respecto del cociente entre Δy (variación de y) y Δx (variación correspondiente de x)?

- ¿Cuál es el valor de Δy cuando Δx es igual a una unidad?

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Actividad 3

4. El siguiente gráfico contiene las rectas correspondientes a la relación entre las alturas de los objetos y la longitud de sus sombras en las tres mediciones realizadas ese día.



- Señala a qué horario de medición corresponde cada recta graficada. Justifica tu respuesta.

- Analiza el gráfico y elabora una conclusión respecto de la relación entre la constante de proporcionalidad en cada caso y la inclinación con respecto al eje *x* de la recta correspondiente.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (10 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Monitoree el trabajo de los estudiantes y observe si tienen dificultades en el ítem 1. Puede orientarlos para que entiendan que, por ejemplo, Δx corresponde a una variación de x, y que en el plano esta variación se representa como la longitud de un segmento.

- En los ítems 2 y 3 observe si algunos estudiantes son capaces de concluir que, para la variación unitaria de x, Δy es igual al cociente constante que han encontrado en cada tabla y que, a su vez, es igual a la constante de proporcionalidad.

- En el ítem 4 observe de qué manera los estudiantes asocian las rectas a los horarios de medición, e identifique a aquellos que justifican su respuesta basándose en el valor de Δy cuando Δx vale 1 o en la constante de proporcionalidad. También, ponga atención a las relaciones que establecen entre la inclinación de cada recta y su constante de proporcionalidad.

VOLVER

DISCUSIÓN DE CURSO COMPLETO (10 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar la discusión de curso completo:

- Recoja las diferentes conclusiones respecto a los cocientes entre Δy y Δx para los ítems 2 y 3. Si solo se concluye que el cociente es constante, formule preguntas para que relacionen este cociente con el valor de la constante de proporcionalidad. Si hay estudiantes que ya llegaron a esta conclusión, considere sus respuestas al final de la discusión.

- En el ítem 4 recoja las respuestas de los estudiantes y centre la discusión en justificar la elección del horario para cada recta. Puede orientar la justificación haciendo preguntas como las siguientes: ¿qué tienen en común los triángulos dibujados en cada recta?, ¿en qué se diferencian?, ¿de qué manera podemos utilizar esta información para identificar qué recta corresponde a cada horario?

- Finalmente, en el ítem 4 recoja las respuestas de los estudiantes sobre la relación entre la inclinación de las rectas con la constante de proporcionalidad.

VOLVER

CONCLUSIÓN DE LA DISCUSIÓN (5 min)

Se recomiendan las siguientes sugerencias e ideas para el cierre de la discusión:

- Haga la pregunta ¿qué se puede concluir respecto del cociente entre Δy y Δx? Guíe a los estudiantes para que concluyan que es igual a la constante de proporcionalidad.

- Luego pregunte: ¿de qué manera estos cocientes se ven reflejados en los gráficos del ítem 4?, ¿dónde se leen estos cocientes en las rectas? Asegúrese de que al responder estas preguntas los estudiantes noten que en los tres triángulos Δx tiene el mismo valor.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad, comente los puntos que se indican a continuación (puede usar la diapositiva 46):

- En esta actividad estudiamos el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para una función lineal de la forma $y = a \cdot x$. Este cociente:
  - Se conoce como *pendiente* de la recta.
  - Es constante y su valor es la constante de proporcionalidad a.
  - Es igual a la variación Δy para una variación unitaria de x ($\Delta x = 1$).

- Además, pudimos ver que, en el gráfico de la función lineal, mientras mayor es el valor de la pendiente, mayor es la inclinación de la recta respecto del eje x.

VOLVER

LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

Para el lanzamiento puede señalar que: *En la siguiente actividad analizaremos un caso relacionado con el estudio de este tema en la escuela.* (Puede usar la diapositiva 47).

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Es probable que al responder las preguntas del ítem 4, algunos estudiantes tengan dudas respecto del significado de “inclinación de la recta”. Para aclarar esto, puede señalar que se considera más inclinada una recta cuando está “más empinada”.

- En el ítem 4, si observa estudiantes que tienen dificultades para encontrar una forma de identificar la recta que corresponde a cada horario de medición, oriéntelos para que analicen los triángulos dibujados en los gráficos y señalen la relación que hay entre las longitudes de los catetos verticales, sin proporcionar información respecto de los valores de Δx y Δy.

- Haga notar que todos los ejemplos expuestos hasta ahora en las actividades corresponden a funciones con variables mayores o iguales a cero. Si algún estudiante pregunta si esta condición es necesaria, se sugiere que indique que no, y que en la siguiente clase se verán ejemplos de funciones con variables que toman valores menores que cero.

Cierre de la clase

Gestión sugerida

Tiempo: 5 min.

- Pida a los estudiantes que elaboren dos argumentos que justifiquen el inicio del estudio de la función lineal a partir de relaciones de proporcionalidad.

- Para orientar a los estudiantes a basándose en la secuencia didáctica desarrollada en esta clase, puede hacer preguntas como la siguiente: ¿en qué conocimientos nos basamos en esta clase para introducir la función lineal?

- Invite a los estudiantes a compartir sus argumentos, contrastando las diversas respuestas que puede haber entre ellos.

- Oriente a los estudiantes para establecer que:
    - Como las relaciones de proporcionalidad son un conocimiento cercano para los estudiantes, estas permiten transitar fluidamente hacia la función lineal.

    - Iniciar el estudio de funciones con conceptos que requieren de un mayor nivel de abstracción podría ser contraproducente para el aprendizaje de los estudiantes, pues se requiere de una variedad de ejemplos de funciones para comprender el sentido de estos conceptos. Por lo anterior, estudiar la función lineal a partir de la proporcionalidad es una alternativa efectiva si consideramos que esta última constituye un caso importante de estos ejemplos.

- Entregue la ficha de sistematización a los estudiantes.

- Revise junto con ellos las ideas que están en el Recapitulemos de la ficha de sistematización. Puede apoyarse en las preguntas que aparecen en la ficha.

Recapitulemos:

- Las relaciones de proporcionalidad se caracterizan por su gráfica, que siempre es una línea recta que pasa por el origen. Para situaciones en que por el contexto en que se plantean no se pueden tomar todos los valores posibles, la gráfica es una colección de puntos sobre la recta.

- Cuando una variable y se puede calcular en términos de una variable x se dice que y es función de x. Se suele llamar a x variable independiente, y a y variable dependiente. En caso de que $y = a \cdot x$, hablamos de una función lineal. Así, las relaciones de proporcionalidad entre dos variables corresponden a funciones lineales.

- El cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para una función lineal de la forma $y = a \cdot x$:
  - se conoce como pendiente de la recta.
  - es constante y su valor es la constante de proporcionalidad a.
  - es igual a la variación Δy para una variación unitaria de x ($\Delta x = 1$).

  Además, en el gráfico de la función lineal, mientras mayor es el valor de la pendiente, mayor es la inclinación de la recta respecto del eje x.

- La relación entre la proporcionalidad y la función lineal permite introducir el estudio de las funciones a partir de un caso simple y conocido. En efecto:
  - La función lineal permite modelar situaciones en contextos de proporcionalidad que los estudiantes vienen estudiando desde 3° básico con las situaciones multiplicativas.
  - Esta idea de abordar la función lineal a partir de las relaciones de proporcionalidad aparece sugerida en las bases curriculares vigentes para 8° básico en el Objetivo de Aprendizaje 7.

- Lanzamiento de la siguiente clase: en la siguiente clase generalizaremos las funciones lineales para encontrar otras funciones cuyo gráfico también es una recta.

RESPUESTAS EXPERTAS

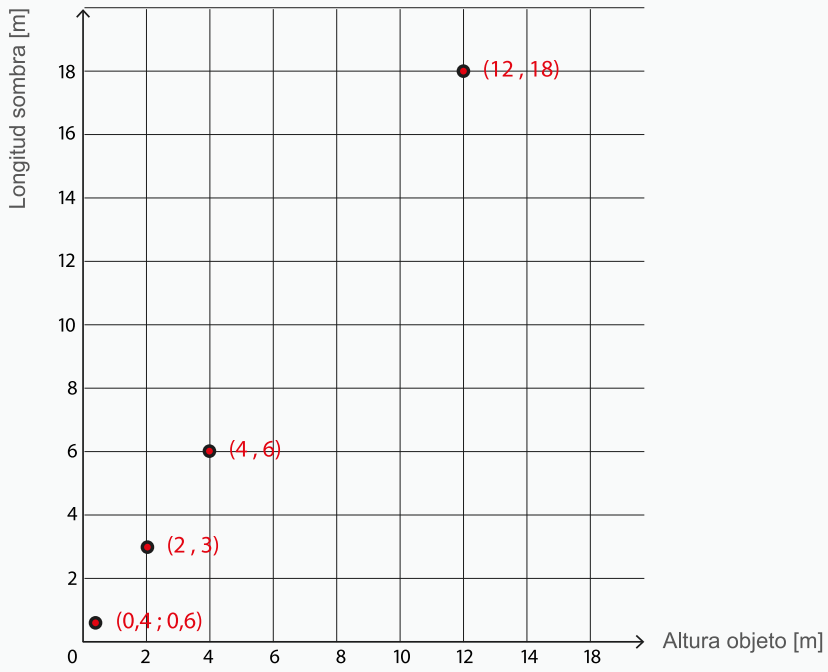
Actividad	Respuesta experta
Actividad 1 Determinando la longitud de las sombras.	**1.**

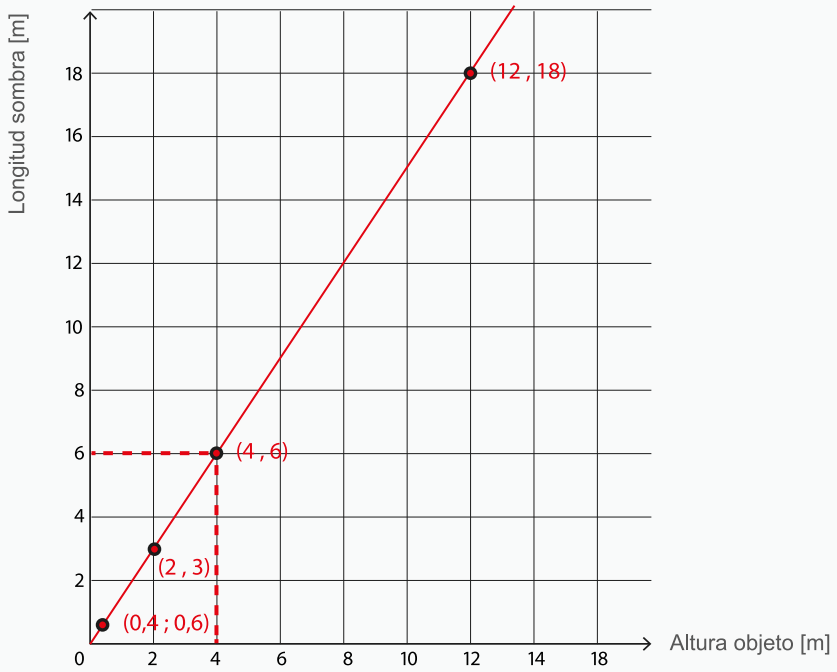
Altura (m)	Longitud de la sombra (m)
4	6
0,4	0,6
2	3
12	18

La altura de los objetos es proporcional a la longitud de su sombra. Dos argumentos que sustentan esta afirmación son:

- El cociente entre los valores de estas variables es constante.
- Al multiplicar la altura por una cierta cantidad, la longitud de la sombra se multiplica por la misma cantidad.

2.



Actividad	Respuesta experta
Actividad 1 Determinando la longitud de las sombras.	**3.**  La figura que se forma es una línea recta que pasa por el origen.
	4. Dos características comunes de los gráficos son: • El gráfico corresponde a una línea recta. • El gráfico pasa por el origen.
Actividad 2 Sombras funcionales.	**1.**

Altura (m)	Longitud de la sombra (m)
0,4	0,2
2	1
3,6	1,8
4	2
5,2	2,6
12	6

La constante de proporcionalidad entre la altura de los objetos y la longitud de su sombra es $\frac{1}{2}$. La expresión algebraica que permite calcular la sombra a partir de la altura de los objetos es: $y = \frac{1}{2} \cdot x$, en la que y es la longitud de la sombra y x es la altura del objeto.

<table>
<tr><th>Actividad</th><th>Respuesta experta</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Actividad 2
Sombras funcionales.</td><td>

2. Las constantes de proporcionalidad y expresiones algebraicas para cada caso son las siguientes:

- **Hora 09:30**, la constante de proporcionalidad es $\frac{3}{2}$ y la expresión algebraica es $y = \frac{3}{2} \cdot x$
- **Hora 10:30**, la constante de proporcionalidad es 1 y la expresión algebraica es $y = 1 \cdot x$
- **Hora 12:00**, la constante de proporcionalidad es $\frac{1}{2}$ y la expresión algebraica es $y = \frac{1}{2} \cdot x$

</td></tr>
<tr><td>

3. La expresión algebraica es $y = a \cdot x$.
Cualesquiera sean las variables x e y, relacionadas proporcionalmente, la constante de proporcionalidad es el cociente entre las variables, por tanto $\frac{y}{x} = a$. Si multiplicamos ambos lados de la igualdad por x, resulta la expresión $y = a \cdot x$.

</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Actividad 3
Función lineal y su gráfico.</td><td>

1.

<table>
<tr><th colspan="2">Pares de puntos</th><th>Δx</th><th>Δy</th></tr>
<tr><td>**A** (0,4 ; 0,6)</td><td>**B** (2 , 3)</td><td>1,6</td><td>2,4</td></tr>
<tr><td>**C** (3,6 ; 5,4)</td><td>**D** (4,6 ; 6,9)</td><td>1</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>**A** (0,4 ; 0,6)</td><td>**C** (3,6 ; 5,4)</td><td>3,2</td><td>4,8</td></tr>
<tr><td>(6 , 9)</td><td>(7 ; 10,5)</td><td>1</td><td>1,5</td></tr>
</table>

</td></tr>
<tr><td>

2.

<table>
<tr><th colspan="2">Pares de puntos</th><th>Δx</th><th>Δy</th><th>$\frac{\Delta y}{\Delta x}$</th></tr>
<tr><td>**A** (0,4 ; 0,6)</td><td>**B** (2 , 3)</td><td>1,6</td><td>2,4</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>**C** (3,6 ; 5,4)</td><td>**D** (4,6 ; 6,9)</td><td>1</td><td>1,5</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>**A** (0,4 ; 0,6)</td><td>**C** (3,6 ; 5,4)</td><td>3,2</td><td>4,8</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>(6 , 9)</td><td>(7 ; 10,5)</td><td>1</td><td>1,5</td><td>1,5</td></tr>
</table>

El cociente entre Δy y Δx es constante e igual a 1,5; lo que corresponde a la constante de proporcionalidad.
Cuando Δx vale 1, el valor de Δy es igual a la constante de proporcionalidad.

</td></tr>
</table>

Actividad	Respuesta experta

Actividad 3
Función lineal y su gráfico.

3.

Medición realizada a las 10:30

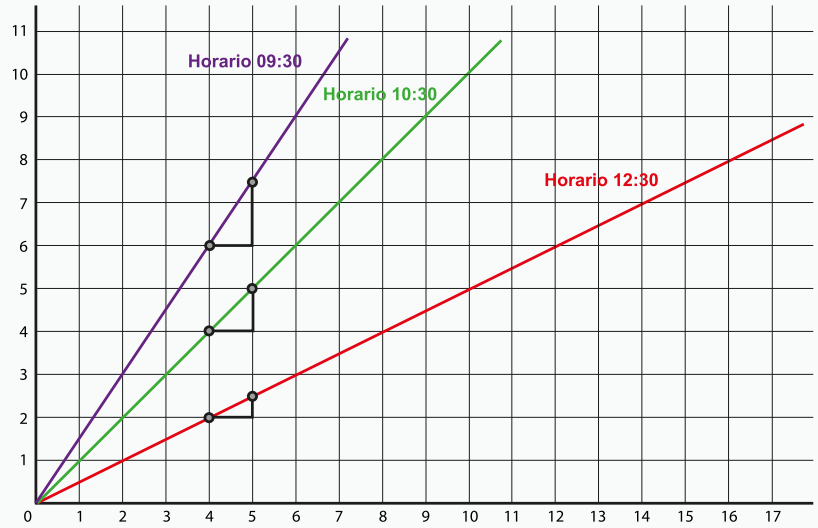
Puntos		Δx	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
A' (0,4 ; 0,4)	B' (2 , 2)	1,6	1,6	1
C' (3,6 ; 3,6)	D' (4,6 ; 4,6)	1	1	1
A' (0,4 ; 0,4)	C' (3,6 ; 3,6)	3,2	3,2	1
(6 , 6)	(7 , 7)	1	1	1

Medición realizada a las 12:00

Puntos		Δx	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
A'' (0,4 ; 0,2)	B'' (2 , 1)	1,6	0,8	$\frac{1}{2}$
C'' (3,6 ; 1,8)	D'' (4,6 ; 2,3)	1	0,5	$\frac{1}{2}$
A'' (0,4 ; 0,2)	C'' (3,6 ; 1,8)	3,2	1,6	$\frac{1}{2}$
(6 , 3)	(7 ; 3,5)	1	0,5	$\frac{1}{2}$

En ambas tablas el cociente entre Δy y Δx es constante e igual a la correspondiente constante de proporcionalidad.
En ambos casos, cuando Δx vale 1, el valor de Δy es igual a la constante de proporcionalidad.

4.



Para el mismo valor de Δx, las rectas más inclinadas respecto al eje x tienen mayores valores de Δy . Así, las rectas más inclinadas tienen un cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ mayor.

PLANIFICACIÓN
CLASE 3

UAFI: Proporcionalidad y linealidad

CLASE 1
Relaciones de proporcionalidad

CLASE 2
Proporcionalidad y función lineal

CLASE 3
Función afín

TAREA 1
La regla de tres

TAREA 2
Funciones afines

CLASE 3: FUNCIÓN AFÍN

RESUMEN DE LA CLASE

Meta de la clase	Al finalizar la clase se espera que los futuros profesores[1] logren comprender la función afín a partir de un desplazamiento de la gráfica de la función lineal y, además, reconozcan funciones afines de pendiente negativa.
Descripción de la clase	Esta clase se inicia con una actividad que involucra analizar la relación de proporcionalidad entre las variables *distancia recorrida* y *tiempo*. En la siguiente actividad, se considera la variable *posición respecto a un punto* para introducir la función afín, de manera que los estudiantes descubran que gráficamente corresponde a un desplazamiento vertical de una función lineal, estableciendo con ello su expresión algebraica. A continuación, se propone analizar gráficos de funciones afines que provienen de distintas situaciones, reconociendo rectas de pendiente negativa y que cortan al eje Y en puntos negativos. Finalmente, se analiza el currículum de 5° a 8° para identificar los objetivos de aprendizaje que corresponden al estudio de la proporcionalidad, de la función lineal y de la función afín.

[1]Respecto del uso de lenguaje inclusivo: Con el propósito de no provocar una saturación gráfica que dificulte la comprensión de la lectura, en este documento no se considera el uso de “los/las” u “o/a” para hacer referencia a ambos géneros de manera conjunta. En su lugar, se utilizan términos como “el futuro profesor”, “el estudiante” y “el profesor” y sus respectivos plurales para aludir de manera inclusiva a hombres y mujeres. Sin embargo, durante la gestión de la clase se sugiere la utilización de lenguaje inclusivo que invite a los y las estudiantes a involucrarse activamente en las actividades.

Aprendizajes esperados	Al finalizar la clase se espera que los estudiantes: • Comprendan que la función afín corresponde a un desplazamiento de una función lineal, estableciendo que corresponde a una relación funcional del tipo $y = a \cdot x + b$. • Analicen gráficos de funciones afines que provienen de distintas situaciones, incluyendo aquellos que tienen intersección con el eje Y en puntos negativos y/o con pendientes negativas. • Analicen el currículum de 5° a 8° básico e identifiquen los objetivos de aprendizaje que corresponden al estudio de la proporcionalidad, de la función lineal y de la función afín.
Conocimientos previos	Función lineal y su gráfico, pendiente del gráfico de una función lineal.
Materiales	Estudiantes • Hojas de trabajo del estudiante. • Documento con objetivos curriculares. Profesor • Computador. • Proyector.
Tiempo total estimado	90 min.

ESQUEMA DE LA CLASE

Tipo de actividad	Actividades	Tiempo (T) Modalidad (M)
Aplicación de conocimientos	**Actividad 1: La pista de pruebas** Con esta actividad se busca que los futuros profesores apliquen los contenidos vistos en la clase anterior en la resolución de un problema.	T: 15 min M: Individual y de curso completo.
Construcción de conocimientos	**Actividad 2: La función afín** Esta actividad está centrada en que los futuros profesores comprendan una función afín (y creciente) como un desplazamiento de una función lineal, estableciendo que corresponde a una relación funcional del tipo $y = a \cdot x + b$.	T: 25 min M: En parejas y de curso completo.
Profundización de conocimientos	**Actividad 3: Más de la función afín** Con esta actividad se persigue que los futuros profesores analicen gráficos de funciones afines que provienen de distintas situaciones, incorporando intersecciones con el eje Y en puntos negativos y pendientes negativas.	T: 25 min M: En parejas y de curso completo.
Reflexión pedagógica	**Actividad 4: Proporcionalidad y linealidad en el currículum** El foco de esta actividad es que los futuros profesores analicen el currículum de 5° a 8° básico e identifiquen los objetivos de aprendizaje que corresponden al estudio de la proporcionalidad, función lineal y función afín.	T: 20 min M: En parejas y de curso completo.
Cierre	**Cierre de la clase** Con esta actividad se busca que los futuros profesores reconozcan los aprendizajes logrados en la clase sobre la función afín.	T: 5 min M: De curso completo.

La pista de pruebas

Aplicación de conocimientos

Tiempo: 15 min.
Modalidad: Individual y de curso completo.
Materiales: Hoja actividad 1.

PROPÓSITO

Con esta actividad se busca que los futuros profesores apliquen los contenidos vistos en la clase anterior en la resolución de un problema.

Fecha: _____

Nombre: _____

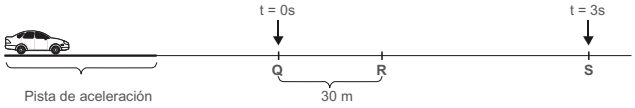
Unidad de Aprendizaje Proporcionalidad y Linealidad
Hojas de trabajo - Clase 3

Actividad 1

Trabajo individual

Una fábrica de automóviles realiza pruebas del equipamiento de nuevos vehículos haciéndolos correr a una velocidad constante de 30 m/s y tomando algunas mediciones. Para ello, se utiliza una pista que tiene sensores y es monitoreada por un operario. La siguiente imagen corresponde al plano de la pista:

Situación 1:



El inicio de la pista incluye una distancia para que los vehículos alcancen los 30 m/s, y en el punto Q hay un sensor que reporta su distancia al automóvil.

1. ¿Cuánto tiempo demora el auto en recorrer la distancia entre Q y R?

2. El automóvil demoró 3 s en pasar desde el punto Q al S. ¿Cuál es la distancia entre Q y S?

3. Escribe una expresión algebraica que permita calcular la distancia (d) que recorre el automóvil, medida desde el sensor en Q, en un tiempo (t) determinado. Considera que el tiempo se comienza a medir cuando el automóvil pasa por Q, es decir, el tiempo cuando el automóvil está en Q es t=0 s.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Asegúrese de que los estudiantes comprendan la situación planteada. Revise las sugerencias de gestión.

VER MÁS +

En esta actividad se debe concluir que las variables del problema son proporcionales. Revise las ideas al cierre.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Invítelos a desarrollar este problema en forma individual, de manera que pueda evaluar si recuerdan los contenidos estudiados en la clase anterior.

- Observe si en el ítem 3 los estudiantes son capaces de escribir una expresión algebraica para calcular la distancia.

VOLVER

COMPARTIR RESULTADOS (5 min)

Para la puesta en común, invite a un estudiante a compartir sus respuestas. Se aconseja preguntar al resto del curso si tienen una respuesta diferente, esto para evaluar si todos son capaces de resolver este problema.

VOLVER

SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS (5 min)

Se sugiere hacer una síntesis de las respuestas de los estudiantes y establecer que la expresión algebraica para la situación dada es $d = 30 \cdot t$, en la que 30 corresponde a la velocidad del automóvil en metros por segundo.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad, comente los puntos que se indican a continuación (puede usar la diapositiva 5):

- La distancia d recorrida por un móvil que va a una velocidad constante v, y el tiempo t que demora en recorrer dicha distancia, son proporcionales, y la constante de proporcionalidad es la velocidad.

- La expresión algebraica que relaciona estas variables es $d = v \cdot t$. Esta relación define a d como una función lineal de t.

VOLVER

LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

Para el lanzamiento puede señalar que: *En la siguiente actividad analizaremos algunos gráficos construidos a partir de sensores en Q y en otro punto.* (Puede usar la diapositiva 6).

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Si observa que los estudiantes tienen dificultades para comprender cómo funciona la pista de carreras, deténgase y explique la situación. Es importante que los estudiantes se familiaricen con el contexto ya que será usado en las siguientes actividades.

- Algunos estudiantes podrían presentar dificultades con la notación de las variables, ya que en clases anteriores se denotaron como x e y. En estos casos, es importante destacar que el nombre que se les da a las variables es arbitrario, pero independientemente del nombre su manipulación es siempre la misma.

La función afín

Construcción de conocimientos

Tiempo: 25 min.
Modalidad: En parejas y de curso completo.
Materiales: Hoja actividad 2.

PROPÓSITO

Esta actividad está centrada en que los futuros profesores comprendan una función afín (y creciente) como un desplazamiento de una función lineal, estableciendo que corresponde a una relación funcional del tipo $y = a \cdot x + b$.

Fecha: _____

Nombre: _____

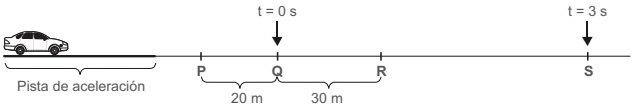
Unidad de Aprendizaje Proporcionalidad y Linealidad
Hojas de trabajo - Clase 3

Actividad 2

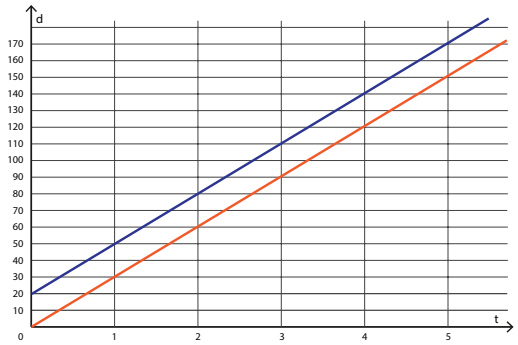
Trabajo en parejas

En varios puntos de la pista se instalaron sensores que se utilizan para corroborar que las mediciones estén correctas.

Situación 2:



Para analizar las mediciones, el operario usa los gráficos obtenidos de los sensores ubicados en P y Q. La unidad de medida de tiempo es el segundo y la de distancia es el metro, pero para simplificar la notación no las utilizaremos explícitamente. El operario visualiza en su pantalla lo siguiente:



1. Indica la recta que corresponde a las mediciones del sensor Q y la recta que corresponde al sensor P. Explica tu respuesta.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Asegúrese de que los estudiantes comprendan la situación planteada. Revise las sugerencias de gestión.

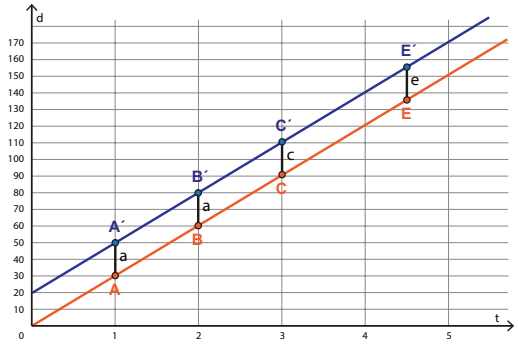
VER MÁS +

Siga las indicaciones sugeridas para la discusión de curso completo.

VER MÁS +

Actividad 2

2. Observa el siguiente gráfico en el que se han marcado cuatro segmentos y los puntos correspondientes a sus extremos:



- ¿Cuál es la longitud de los segmentos a, b y c?

- ¿Qué puedes decir respecto de la longitud del segmento e? Explica tu respuesta.

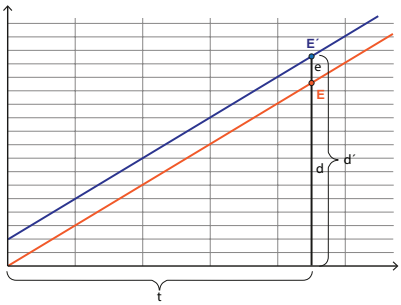
Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

En esta actividad los estudiantes deben caracterizar gráficamente la función lineal afín. Revise las ideas al cierre.

VER MÁS +

Actividad 2

3. La siguiente imagen corresponde al gráfico anterior, pero se ha trazado un segmento desde E, perpendicular al eje t, cuya longitud es *d*. Por otro lado, llamamos *d'* a la longitud del segmento trazado entre E' y el eje t.



Recordando que la expresión matemática para d en términos de t es $d = 30 \cdot t$, escribe una expresión matemática para d' en términos de t.

4. Considerando el trabajo desarrollado en esta actividad, completa la siguiente conclusión:

La relación entre la _____ recorrida por el automóvil y el _____ que demora en recorrerla es una función _____. Luego, si se realizan mediciones desde un punto P a la izquierda, a _____ metros de distancia, la función que relaciona la distancia del móvil respecto del punto P y el tiempo que demora en alcanzar dicha posición tiene una expresión similar a la inicial, de la forma _____. Se puede señalar que el gráfico de la segunda función es un desplazamiento de la primera en _____ metros hacia arriba.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (10 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Pídales que desarrollen los ítems 1 y 2. Una vez que hayan pasado 5 minutos, verifique que todos comprenden que los segmentos *a*, *b*, *c* y *e* miden 20.

- En el ítem 3 es importante observar qué parejas llegan a escribir una expresión matemática para *d'*.

VOLVER

DISCUSIÓN DE CURSO COMPLETO (10 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar la discusión de curso completo:

- Para iniciar invite a alguna pareja a explicar su respuesta al ítem 1. Pregunte al resto de los estudiantes si coinciden con esta explicación y contraste las distintas respuestas.

- Oriente la discusión para que los estudiantes concluyan que pueden usar el punto de corte de la recta en el eje *d* para identificar el sensor. Puede hacer preguntas como la siguiente: ¿qué significado tiene en la situación el punto en que la recta corta al eje *d*?

- Al revisar el ítem 2, inicie la discusión abordando los procedimientos utilizados para encontrar las longitudes de los segmentos *a*, *b* y *c*. Luego, se puede centrar en el argumento que utilizaron para encontrar la longitud del segmento *e*. Puede preguntar: ¿por qué se puede asegurar que el segmento *e* tiene la misma longitud que *a*, *b* y *c*?

- En el ítem 3, pregunte: ¿qué expresión matemática encontraron para *d'* ? Luego, oriente la discusión para que los estudiantes logren establecer una expresión para *d'* a partir de un desplazamiento de *d*. Consulte: ¿cuál es el valor de *d'* en función de *d* y *e*? Considerando que $d = 30 \cdot t$, y que $d' = d + 20$ ¿cómo podemos establecer una expresión para *d'* en términos de *t*?

VOLVER

CONCLUSIÓN DE LA DISCUSIÓN (5 min)

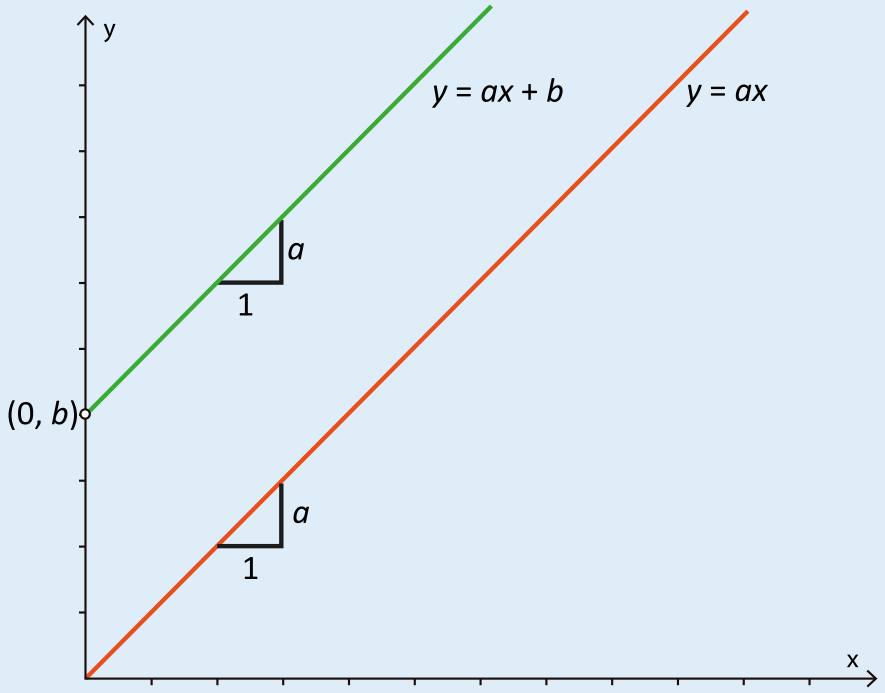
Para concluir la discusión, se sugiere preguntar a los estudiantes cómo completaron el cuadro de texto del ítem 4. Puede solicitar a algún estudiante que lea el texto. Comente que el cuadro corresponde a la conclusión de la actividad realizada.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad, comente los puntos que se indican a continuación (puede usar las diapositivas 13 y 14):

- Una función de la forma $y = ax + b$ se denomina función afín y su gráfico corresponde a un desplazamiento vertical en b unidades del gráfico de la función lineal $y = ax$.
- El gráfico de la función afín, $y = ax + b$, corta el eje vertical en el punto $(0,b)$. Además, la pendiente de la recta, al igual que en la función lineal, $y = ax$, es a.
- La pendiente de una recta, al igual que en el caso de la función lineal, corresponde al cociente entre Δy (variaciones de y) con Δx (variaciones de x).



VOLVER

LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

Para el lanzamiento puede señalar que: *En la siguiente actividad profundizaremos el estudio de la función afín incluyendo parámetros negativos.* (Puede usar la diapositiva 15).

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Si los estudiantes se confunden con las unidades de medida utilizadas en la situación, aclare que la unidad de medida de tiempo es el segundo y la de distancia es el metro, pero que para simplificar la notación no se utilizarán explícitamente.

- Otro aspecto que puede generar confusión es la notación del eje vertical, que se denota como d, al igual que una de las variables. En caso de que esto ocurra, destaque que la variable d' utiliza el mismo eje d para graficarse.

- Aclare la diferencia entre distancia recorrida y posición respecto a un punto. En el caso de las mediciones realizadas en Q son lo mismo, pero en P no son lo mismo.

- En el ítem 1 algunos estudiantes podrían relacionar las rectas del gráfico con los sensores por simple intuición o por descarte. En ese caso se sugiere incentivarlos a justificar por qué esa relación es correcta basándose en la información que proporciona el gráfico, en particular en los puntos de corte con el eje d.

- Si en el ítem 2 los estudiantes no logran calcular la longitud de los segmentos a, b y c; ayúdelos con preguntas como: ¿Qué relación existe entre las coordenadas de los puntos A y A', B y B', C y C', respectivamente?

- En el ítem 2 se espera que los estudiantes justifiquen que el segmento e tiene la misma longitud que los otros porque las rectas son paralelas o porque están a la misma distancia. Algunos estudiantes podrían dar argumentos basados en la congruencia de triángulos o propiedades de los paralelogramos. No se espera que necesariamente den argumentos geométricos rigurosos.

- Para el ítem 3 es probable que algunos estudiantes tengan dificultades para encontrar la expresión numérica. Apóyese en el gráfico para orientarlos de manera que establezcan relaciones entre d y d'. Es posible que algunos estudiantes lleguen a la expresión general $d' = v \cdot t + e$, aunque no se espera en este momento. Si esto ocurre, se puede utilizar relacionándola con la expresión particular $d' = 30 \cdot t + 20$.

Más de la función afín

Profundización de conocimientos

Tiempo: 25 min.
Modalidad: En parejas y de curso completo.
Materiales: Hoja actividad 3.

PROPÓSITO

Con esta actividad se persigue que los futuros profesores analicen gráficos de funciones afines que provienen de distintas situaciones, incorporando intersecciones con el eje Y en puntos negativos y pendientes negativas.

Fecha: _____

Nombre: _____

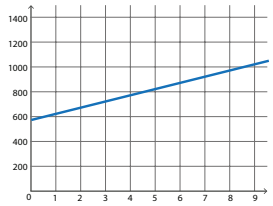
Unidad de Aprendizaje Proporcionalidad y Linealidad
Hojas de trabajo - Clase 3

Actividad 3

Trabajo en parejas

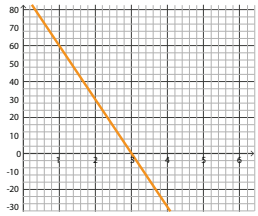
1. Observa los siguientes gráficos y señala a qué situación corresponde cada uno. Explica tu respuesta.

Gráfico 1



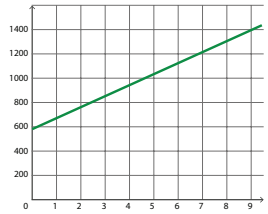
Situación _____

Gráfico 2



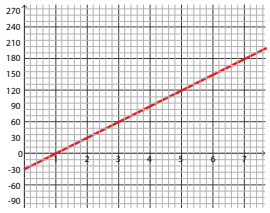
Situación _____

Gráfico 3



Situación _____

Gráfico 4



Situación _____

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Durante el monitoreo siga las sugerencias señaladas en la gestión.

VER MÁS +

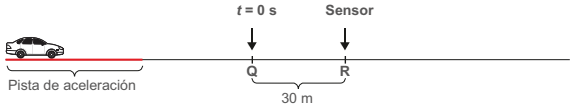
Pida a los estudiantes que expliquen la relación de los distintos componentes del gráfico con la situación asignada. Revise la gestión sugerida.

VER MÁS +

Actividad 3

Situación A

La posición del auto que va a 30 m/s, medida con el sensor en el punto R, iniciando la medición del tiempo en el punto Q (t = 0 s en Q). Considera la convención de que las posiciones medidas hacia la izquierda de R son negativas y hacia la derecha positivas.



Situación B

Posición del auto que va a 30 m/s hacia la izquierda, medida con el sensor en el punto Q, iniciando la medición del tiempo en el punto S (t = 0 s en S).

Situación C

El cobro del consumo de luz en una casa tiene un cargo fijo de $580.
El valor de la electricidad consumida es $90 por kWh.

Situación D

En una fotocopiadora cobran $50 por hoja para reproducir un texto.
Además, cobran $580 por las tapas de cartulina.

2. Escribe una expresión algebraica que permita modelar cada situación.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Hay que relacionar los coeficientes de las rectas con su gráfico. Revise las ideas propuestas para el cierre.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (10 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Observe qué información utilizan para relacionar las situaciones presentadas con los gráficos. Detecte quiénes se basan en las características del gráfico para determinar la situación representada: crecimiento o decrecimiento de las variables, variables que toman valores negativos, puntos de corte con los ejes.

- Observe qué dificultades tienen los estudiantes para escribir las expresiones algebraicas correspondientes a los gráficos 2 y 4.

VOLVER

COMPARTIR RESULTADOS (10 min)

Para la puesta en común, puede serle útil considerar las siguientes sugerencias de gestión:

- Solicite a algunos de los estudiantes que compartan sus respuestas al resto del curso. Promueva que los estudiantes expliquen en qué se basaron para asociar cada gráfico a la situación correspondiente.

- En caso de que observe dificultades al explicar o justificar sus errores, puede pedirles mirar las situaciones e identificar los significados de las variables y datos en cada una de ellas. Por ejemplo, como en la situación C se hace referencia a un cargo fijo, puede preguntar qué significa este en la cuenta de luz y cómo se traduce esto en el gráfico.

- Es probable que para el Gráfico 2 los estudiantes tengan dificultades para encontrar la expresión o lleguen a una función con pendiente positiva. Frente a este caso, puede preguntar: si partimos a una distancia de 90 m del sensor y le sumamos 30 m por cada segundo, ¿nos alejamos o acercamos al sensor?, ¿qué nos indica el dibujo de la pista?, ¿cómo podemos modificar la fórmula para que nos acerquemos al sensor a 30 m por segundo en vez de alejarnos?

VOLVER

SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS (5 min)

Se sugiere hacer preguntas que permitan a los estudiantes asociar los valores de una pendiente negativa y de la intersección negativa con el eje Y, con el gráfico a partir de las situaciones dadas. Por ejemplo:

- ¿Qué característica tiene el valor de la pendiente en el Gráfico 2?, ¿cómo se diferencia con los valores de las pendientes en el resto de los gráficos?, ¿cómo se visualiza en la recta?

- ¿Qué característica tiene el valor de la intersección con el eje Y en el Gráfico 4?, ¿cómo se diferencia con los valores de las intersecciones en el resto de los gráficos?, ¿cómo se visualiza en la recta?

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad, comente los puntos que se indican a continuación (puede usar la diapositiva 21):

- Una expresión del tipo $y = ax + b$ determina una función afín, y su gráfico es una recta. Las funciones lineales son funciones afines para las cuales $b = 0$.

- Cuando $b < 0$, la recta corta el eje Y en un punto $(0, b)$ que está bajo el eje X.

- El valor de a corresponde a la pendiente, aun cuando esta sea menor que 0. Cuando la pendiente de la recta es negativa, los valores de y decrecen a medida que los de x crecen.

- Rectas con pendiente igual a cero ($a = 0$) son horizontales y corresponden al gráfico de funciones constantes de la forma $y = b$.

- Una función afín corresponde a una línea recta no vertical. Las funciones lineales corresponden a rectas que pasan por el origen.

VOLVER

LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

Para el lanzamiento puede señalar que: *En la siguiente actividad analizaremos el currículum escolar en relación con los contenidos estudiados en esta unidad.* (Puede usar la diapositiva 22).

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Si es necesario, vuelva a aclarar la diferencia entre distancia recorrida y posición respecto a un punto.

- Para los gráficos 1 y 3 se espera que se basen en el punto de corte con el eje Y y lo relacionen con el cargo fijo de las situaciones C y D, respectivamente. En el gráfico 2, los estudiantes pueden detectar que cuando una variable aumenta la otra disminuye, y con ello relacionarlo con la situación B. En el gráfico 4, si bien es primera vez en esta UAFI que se enfrentan a un gráfico que corta el eje Y en un valor negativo, pueden usar el mismo argumento que para los gráficos 1 y 3.

- Se espera que los estudiantes lleguen rápidamente a establecer las expresiones matemáticas para los gráficos 1 y 3 basándose en la actividad anterior. En caso de que observe dificultades en estos gráficos, oriente en forma individual a quienes no logren escribir la expresión.

- Los estudiantes podrían tener dificultades para establecer la expresión matemática del gráfico 2. En este caso puede orientar la reflexión de los estudiantes basándose en el análisis de gráficos. Por ejemplo, si escriben una expresión del tipo $y = ax + b$, con a positiva, puede pedirles que la grafiquen para que se den cuenta de que no coincide con el gráfico 2. Luego, para determinar la expresión, podrían calcular la pendiente de la recta del gráfico 2 usando algunos puntos de este y así llegar a una expresión matemática con el valor correcto de a.

Proporcionalidad y linealidad en el currículum

Reflexión pedagógica

Tiempo: 20 min.
Modalidad: En parejas y de curso completo.
Materiales: Hoja actividad 4
Anexo OA

PROPÓSITO

El foco de esta actividad es que los futuros profesores analicen el currículum de 5° a 8° básico e identifiquen los objetivos de aprendizaje que corresponden al estudio de la proporcionalidad, función lineal y función afín.

Fecha: _____

Nombre: _____

Unidad de Aprendizaje Proporcionalidad y Linealidad
Hojas de trabajo - Clase 3

Actividad 4

Trabajo en parejas

Los siguientes objetivos de aprendizaje y sus indicadores de evaluación fueron extraídos de las bases curriculares de 1° a 6° básico (2012), y de las bases curriculares de 7° básico a 2° medio (2015).

Lee el documento y completa la tabla anotando solo el número de los objetivos (por ejemplo: OA9) relacionados con el estudio de la proporcionalidad, de la función lineal y de la función afín en cada nivel.

Curso	5º básico	6º básico	7º básico	8º básico
Patrones y Álgebra				
Álgebra y Funciones				

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Procure que los estudiantes completen la actividad en el tiempo designado. Revise las sugerencias para el monitoreo.

VER MÁS +

Promueva la reflexión sobre la progresión curricular de los temas vistos en la clase. Revise la síntesis.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (10 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Motívelos a desarrollar la actividad, indicando que les permitirá articular con el currículum los temas estudiados en esta unidad.
- Observe si al completar la tabla utilizan solo la información de los objetivos o también se basan en los indicadores de evaluación incluidos en el documento.

VOLVER

COMPARTIR RESULTADOS (10 min)

Para la puesta en común, puede serle útil considerar las siguientes sugerencias de gestión:

- Pídales a algunas parejas que comenten cómo completaron la tabla.
- Oriente a los estudiantes a hacer una reflexión respecto de cómo los objetivos de aprendizaje expuestos en la tabla se reflejan en esta unidad. También, puede orientarlos a reflexionar sobre cómo la metodología y la secuencia usada puede ayudarlos a pensar en diseñar clases para trabajar estos temas en el aula escolar.

VOLVER

SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS (5 min)

Se sugiere asociar las respuestas de los estudiantes a las siguientes ideas:

- Si bien el estudio de la proporcionalidad comienza en 7°, el trabajo matemático en el eje Patrones y Álgebra que se propone en 5° y 6° básico prepara a los estudiantes para ello.
- En 7° se aborda el estudio de la proporcionalidad directa a partir de situaciones de contexto, usando tablas de datos y estudiando su gráfica.
- En 8º se estudia la función lineal a partir de situaciones de proporcionalidad, y luego se aborda la función afín como la generalización de la suma de una constante con una función lineal.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad, comente los puntos que se indican a continuación (puede usar la diapositiva 25):

- La propuesta metodológica de enseñanza en esta unidad recoge las orientaciones que se proponen en el currículum, el cual recomienda que la construcción de conocimientos matemáticos se realice a través del estudio de situaciones contextualizadas, resolviendo problemas, argumentando y usando diversos tipos de representaciones.

- Pudimos notar que el currículum propone una secuencia similar a la desarrollada en esta unidad respecto de proporcionalidad y funciones lineales. Iniciamos el estudio caracterizando las situaciones multiplicativas (3° y 4° básico) como situaciones de proporcionalidad. Luego, estudiamos situaciones de proporcionalidad usando tablas de datos, analizando su gráfica y caracterizándolas como función lineal. Finalmente, construimos la noción de función afín a partir del desplazamiento de una función lineal.

VOLVER

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Si el tiempo no es suficiente para el desarrollo de esta actividad, se sugiere que algunas parejas completen la tabla solo para 5° y 6° básico, y el resto para 7° y 8°.

Cierre de la clase

Gestión sugerida

Tiempo: 5 min.

- Entregue la ficha de sistematización a los estudiantes.
- Revise junto con sus estudiantes las ideas que están en el Recapitulemos de la ficha de sistematización. Puede apoyarse en las preguntas que aparecen en la ficha.

Recapitulemos:

- Una función de la forma $y = ax + b$ se denomina función afín y su gráfico corresponde a un desplazamiento vertical en b unidades del gráfico de la función lineal $y = ax$. Las funciones lineales son funciones afines para las cuales $b = 0$.
- La pendiente de una recta, corresponde al cociente constante entre Δy (variaciones de y) con Δx (variaciones de x). Para la función afín, $y = ax + b$, la pendiente de la recta, al igual que para la función lineal, $y = ax$, es a.
- Cuando la pendiente de la recta es negativa, los valores de y decrecen a medida que los de x crecen. Rectas con pendiente igual a cero ($a = 0$) son horizontales y corresponden al gráfico de funciones constantes de la forma $y = b$.
- En esta unidad de aprendizaje que hemos desarrollado, se planteó una secuencia similar a lo que propone el currículum. Iniciamos el estudio caracterizando las situaciones multiplicativas (3° y 4° básico) como situaciones de proporcionalidad. Luego, estudiamos situaciones de proporcionalidad usando tablas de datos, analizando su gráfica y caracterizándolas como función lineal. Finalmente, construimos la noción de función afín a partir del desplazamiento de una función lineal.

- Entregue y comente brevemente la tarea 2 “Funciones afines”.

RESPUESTAS EXPERTAS

Actividad	Respuesta experta
Actividad 1 La pista de pruebas.	**1.** 1 segundo.
	2. 90 m.
	3. $d = 30 \cdot t$, en la que d se mide en metros y t en segundos.
Actividad 2 Problemas multiplicativos	**1.** La recta de abajo (naranja) corresponde a las mediciones del sensor Q, puesto que en $t = 0$ la variable d vale 0. La recta de arriba (azul) corresponde a las mediciones del sensor P, puesto que cuando $t = 0$ la distancia del móvil al sensor es 20 m, lo que se puede ver en el punto de corte de la recta con el eje vertical.
	2. La longitud de los segmentos a, b y c es 20 m. Esto se puede determinar restando las coordenadas d del punto superior con el punto inferior, por ejemplo: los extremos del segmento b son B (2 , 60) y B' (2, 80), luego la longitud de b es 80 - 60 = 20. De la respuesta anterior se ve que las rectas son paralelas, puesto que la distancia vertical entre ellas es constante e igual a 20 m, entonces la longitud de e también tiene que ser igual a esta constante.
	3. La longitud de d' es la longitud de d más la longitud del segmento e, luego $d' = 30t + 20$.
	4. La relación entre la distancia recorrida por el automóvil y el tiempo que demora en recorrerla es una función lineal. Luego, si se realizan mediciones desde un punto P a la izquierda, a 20 m de distancia, la función que relaciona la distancia del móvil respecto del punto P y el tiempo que demora en alcanzar dicha posición tiene una expresión similar a la inicial, de la forma $d = 30t + 20$. Se puede señalar que el gráfico de la segunda función es un desplazamiento de la primera en 20 m hacia arriba.
Actividad 3 Más de la función afín.	**1.** **Gráfico 1**: Situación D, porque corta el eje Y en el costo de las tapas de cartulinas de $580 y tiene una pendiente de 50 pesos por hoja. **Gráfico 2**: Situación B, porque la posición inicial del auto respecto al sensor Q es 90 m a su derecha y esta posición va disminuyendo a medida que el tiempo aumenta, pasando por el sensor Q a los 3 s.

<table>
<tr><th>Actividad</th><th>Respuesta experta</th></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Gráfico 3: Situación C, porque corta el eje Y en el costo fijo de $580 y tiene una pendiente de $90 por kWh.

Gráfico 4: Situación A, porque el auto inicia su carrera en una posición a la izquierda respecto al sensor, es decir, negativa (-30 metros), luego el móvil empieza a avanzar hacia la derecha pasando por el sensor R en t = 1s y luego continúa alejándose hacia la derecha.</td></tr>
<tr><td>2. Situación A: $d = 30\,t - 30$
Situación B: $d = -30t + 90$
Situación C: $y = 90x + 580$, en la que y sería el costo de luz y x la cantidad electricidad consumida.
Situación D: $y = 50x + 580$, en la que y sería el costo de fotocopiar y x la cantidad de hojas.</td></tr>
<tr><td>Actividad 4 Proporcionalidad y linealidad en el currículum.</td><td>1.
<table>
<tr><th>Curso</th><th>5º básico</th><th>6º básico</th><th>7º básico</th><th>8º básico</th></tr>
<tr><td>Patrones y Álgebra</td><td>OA14 (sexto indicador).

OA15 (tercer indicador).</td><td>OA9 (primer, cuarto, quinto, sexto y séptimo indicador).

OA10 (cuarto y quinto indicador).

OA11 (quinto indicador).</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Álgebra y Funciones</td><td></td><td></td><td>OA6 (primer, segundo y tercer indicador).

OA8 (exceptuando referencias a proporcionalidad inversa).

OA9 (tercer indicador).</td><td>OA7 (primer, segundo, tercer, cuarto, séptimo y noveno indicador).

OA8 (cuarto indicador).

OA10 (segundo, cuarto, quinto y sexto indicador).</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

MATERIAL PARA LOS ESTUDIANTES

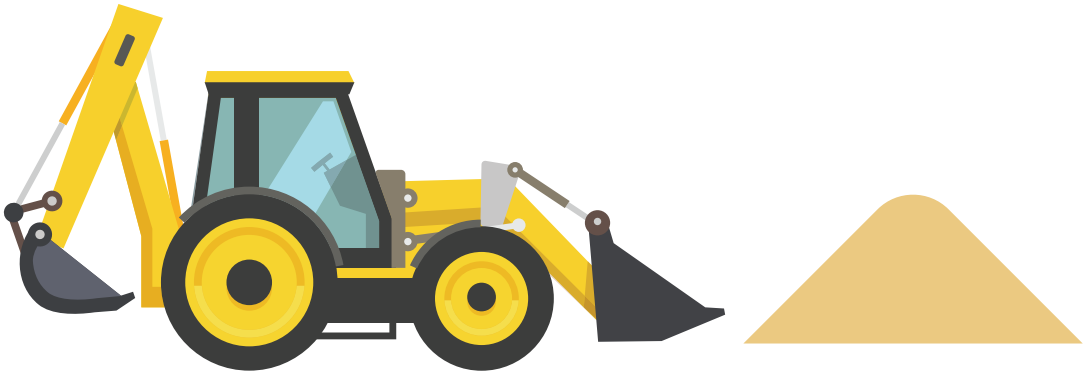
MATERIAL

CLASE 1

Actividad 1

Trabajo en parejas

En una planta de áridos venden arena. Para generar los distintos pedidos utilizan una retroexcavadora-cargadora que les permite ir midiendo las cantidades de arena que cargan en el camión



La siguiente imagen corresponde a las cargas de camiones con arena realizadas durante una tarde. El registro contiene la cantidad de paladas de retroexcavadora usadas en cada carga.

30 paladas → 2,5 camionadas
3 paladas → 0,25 camionada
18 paladas → 1,5 camionadas

Utiliza esta información para responder las siguientes preguntas:

1. Se tiene un pedido de 5 camionadas de arena. ¿Cuántas paladas se necesitan? Escribe el procedimiento que utilizaste para responder la pregunta.

2. Otro pedido se completa con 9 paladas de arena. ¿Cuántas camionadas se necesitan para trasladarla?

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Actividad 1

3. En otra ocasión se solicitaron 12 paladas de arena. ¿Cuántas camionadas se necesitan para trasladarla?

4. ¿Cuántas camionadas se completan con 33 paladas?

5. Al multiplicar por 5 la cantidad de paladas, ¿qué sucede con la cantidad de camionadas?

6. Lee la siguiente afirmación y responde:

   Sabiendo cuántas paladas completan una camionada, podemos calcular cuántas paladas completan un número cualquiera de camionadas.

   ¿Es cierta? ¿Por qué?

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Actividad 2

Trabajo en parejas

1. Resuelve el siguiente problema:

   En otra planta de áridos completan una camionada con 15 paladas de arena. ¿Con cuántas paladas completan 4 camionadas?

2. Completa el siguiente esquema con la información del problema del ítem 1.

Número de camionadas	X	Número de paladas por camionada	=	Total de paladas

3. Resuelve los siguientes problemas y completa los esquemas con esta información.

Situación 1
En una pastelería ofrecen bandejas con 6 queques en cada una. ¿Cuántos queques se obtienen al comprar 5 bandejas?

Número de grupos	X	Número de elementos en cada grupo	=	Total de elementos

Situación 2
Un artesano ocupa 12 piedras para fabricar una pulsera. ¿Cuántas piedras necesita para fabricar 8 pulseras?

Número de grupos	X	Número de elementos en cada grupo	=	Total de elementos

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Actividad 2

4. ¿A qué corresponden los “grupos” y los “elementos” en el contexto de cada situación?

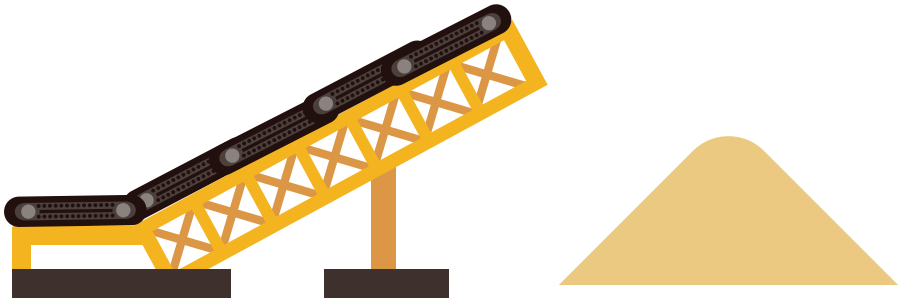
5. En los problemas del ítem 3, ¿existe una relación de proporcionalidad?, ¿cuáles son las variables que se relacionan proporcionalmente? Justifica tu respuesta.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Actividad 3

Trabajo en parejas

En otro sector de la planta de áridos donde se extrae la arena, se utiliza una cinta transportadora para acumularla antes de distribuirla.



La cinta que emplean transporta una cantidad fija de arena por hora. La semana anterior la ajustaron para que cada hora transportara 50 m^3.

1. ¿Qué se puede afirmar respecto de la relación del tiempo de funcionamiento de la cinta y el volumen de arena acumulada? Completa los datos en la tabla.

Tiempo de funcionamiento de la cinta (h)	Volumen de arena (m^3)	Volumen/Tiempo (m^3/h)
1		
2		
3		
5		
7,5		

2. Explica en el contexto los valores obtenidos en la última columna. ¿Cómo se obtiene la unidad de medida $\frac{m^3}{h}$?

Actividad 3

3. Las siguientes tablas contienen información correspondiente a tres situaciones de proporcionalidad distintas. ¿Qué se puede afirmar respecto del cociente entre los valores de las variables?, ¿qué significa en cada caso?

Costo del pan

Cantidad de pan (kg)	Costo ($)
1	980
2	1.960
5	4.900
6	5.880

Volumen de agua que vierte una llave, abierta en forma fija, en un tiempo determinado

Tiempo (m)	Volumen de agua (L)
1	12
2	24
8	96
10	120
20	240

Perímetro de un cuadrado según la medida de su lado

Medida del lado (cm)	Perímetro (cm)
1	4
2	8
15	60
23	92

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Actividad 4

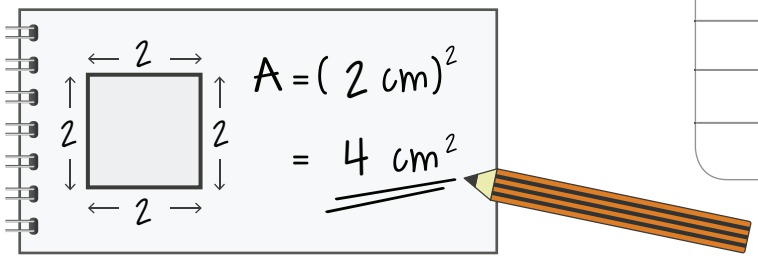
Trabajo en parejas

1. Lean las siguientes situaciones y completa las tablas de datos:

Pablo tiene 36 años y su hija 9.

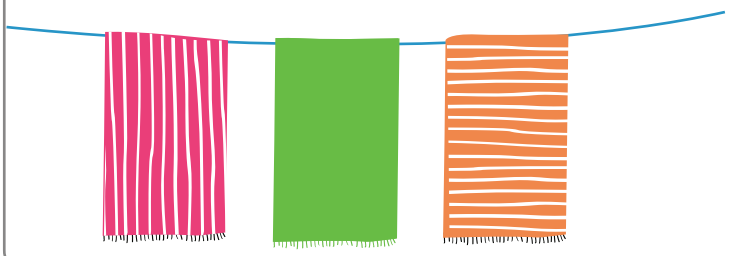
Edad hija (años)	Edad Pablo (años)
9	
18	
27	

La longitud del lado de un cuadrado es 2 cm y su área es 4 cm².



Longitud de lado (cm)	Área del cuadrado (cm^2)
2	
4	
5	

Se cuelgan toallas recién lavadas simultáneamente una al lado de la otra. Una toalla se demora 2 horas en secarse al sol.



Cantidad de toallas	Tiempo de secado (H)
1	
5	
10	

2. ¿Cuáles de las situaciones anteriores son de proporcionalidad? Justifiquen su respuesta.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

FICHA DE SISTEMATIZACIÓN

Unidad de aprendizaje
Proporcionalidad y linealidad

Clase 1
Proporcionalidad y linealidad

Meta de la clase
Al finalizar la clase se espera que hayas logrado caracterizar y comprender de diferentes maneras las relaciones de proporcionalidad entre variables.

Palabras clave
Proporcionalidad, situaciones multiplicativas, constante de proporcionalidad, variables.

Preguntas que ahora puedes responder

- Si dos cantidades se relacionan de manera proporcional, ¿cómo varía una si la otra se duplica?
- ¿Qué problemas multiplicativos corresponden a una relación de proporcionalidad? ¿Cuáles serían las variables? Propón un ejemplo para explicar tu respuesta.
- ¿Cómo se caracteriza el cociente entre dos variables que son proporcionales? ¿A qué corresponde este cociente?
- Si dos variables aumentan/disminuyen simultáneamente, ¿quiere decir que son proporcionales? Explica.

Recapitulemos

- Una relación de proporcionalidad se caracteriza por:
  - Al duplicar, triplicar, etc., una de las variables, también se duplica, triplica, etc., la otra.
  - El cociente entre los valores que van tomando estas variables es una constante. A esta cantidad se le denomina constante de proporcionalidad.

- Cuando dos variables se relacionan proporcionalmente, la constante de proporcionalidad corresponde al valor de una variable cuando la otra (la del denominador) vale una unidad.

- Las situaciones multiplicativas estudiadas en 3° y 4° básico, en las cuales la cantidad de elementos en cada grupo es constante y el número de grupos varía, corresponden a relaciones de proporcionalidad en que las variables son número de grupos y total de elementos.

- Un error frecuente es pensar que dos variables son proporcionales cuando al aumentar el valor de una de ellas, el de la otra también se incrementa. De hecho, existen muchas situaciones en que se da esta característica, pero las variables involucradas no se relacionan proporcionalmente.

Para profundizar

Te sugerimos revisar las siguientes referencias:

Block, D., T. Mendoza, M. Ramírez (2010) *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica.* Serie Enseñar y aprender (capítulos I al IV, pp. 25-100). México. Ediciones SM.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2003). *Proporcionalidad y su didáctica para maestros. Matemática y su Didáctica para los maestros* (pp. 417-425). Universidad de Granada.

Lewin, R. López, A. Martínez, S. Rojas, D. Zanocco, P. (2014). *Razones, proporciones y porcentajes. Números para futuros profesores de Educación Básica* (pp. 398-404). Santiago, Chile: SM.

Tarea 1: La regla de tres

Un contenido que en el pasado era tradicionalmente cubierto al estudiar proporciones corresponde a la llamada “Regla de tres”. Si bien no ha sido parte del desarrollo de la unidad de Proporcionalidad y linealidad, aquí la presentaremos, mostrando que es una manera particular de escribir y resolver una ecuación para calcular un valor desconocido, en relación con otros tres conocidos, en un contexto de variables relacionadas proporcionalmente.

Comencemos mirando algunos ejemplos para después formalizar en términos algebraicos lo que obtengamos. Consideremos la siguiente situación:

Disponemos de un automóvil de bajo consumo muy eficiente de gasolina que típicamente[1] recorre 810 km hasta consumir por completo su estanque de 30 L.

Te pedimos en primer lugar responder las siguientes preguntas haciendo uso de los conocimientos adquiridos en el estudio de esta unidad. Una vez que hayas contestado las preguntas, continúa leyendo el texto que viene después. Al final de dicho texto encontrarás dos preguntas adicionales que deberás responder.

1. Da una justificación de por qué las dos variables *d* (distancia recorrida por el automóvil) y *V* (volumen de gasolina consumida en el viaje) son proporcionales. Si lo necesitas, puedes construir primero una tabla con algunos valores de este par de variables para que puedas visualizar cómo se relacionan.

2. ¿Cuánta gasolina consumiremos para recorrer 500 km?

3. Si llegamos a una bomba de bencina con el estanque vacío, y nuestro presupuesto nos permite echar solo 7 *L* de gasolina al auto, ¿qué distancia alcanzaremos a recorrer antes de quedarnos nuevamente sin combustible?

4. Un amigo tiene un auto con un estanque de mayor capacidad, que puede recorrer 1000 km hasta consumir la totalidad de él. Quiso saber si era más o menos eficiente que el nuestro y para ello midió qué distancia recorre hasta consumir 30 *L*, obteniendo 700 km. ¿Cuál es la capacidad del estanque del auto de nuestro amigo? ¿Cuál de los dos autos es más eficiente?

5. Vimos en el diario el anuncio de un auto supereficiente que dice recorrer 30 km por cada litro de gasolina. También aparecía la capacidad del estanque: 25 *L*. ¿Qué distancia recorre para consumir el total de la capacidad de su estanque?

[1]Por supuesto, estos son valores aproximados. El consumo exacto del vehículo depende de muchos factores, como la velocidad a la que circule, por ejemplo, pero para no complicar innecesariamente nuestros análisis, supondremos que viajaremos en dicho vehículo siempre en circunstancias similares, de modo que los números que hemos dado se podrán considerar una buena aproximación. Supondremos, además, que todos los autos usan el mismo tipo (octanaje) de gasolina.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Tarea 1: La regla de tres

Ya sabemos, por el argumento que has dado en la pregunta 1, que la distancia recorrida y la cantidad de gasolina consumida son proporcionales (para cada auto). Dado esto, hay varias maneras de responder las preguntas 2 a la 5, pero para lo que queremos desarrollar aquí, nos concentraremos en la **caracterización de proporcionalidad** a través del cociente constante entre las dos variables, y haremos desarrollos de índole algebraica para responder las preguntas. Así, para las preguntas 2 y 3 sabemos que con 30 *L* de gasolina nuestro auto recorre 810 km, luego el cociente constante entre las variables *V* y *d* es:

$$\frac{30\,L}{810\,km} \qquad \text{(i)}$$

De este modo, para la pregunta 2, podemos igualar dicho cociente al que corresponde a un recorrido de 500 km, para el cual la cantidad de gasolina que consumiremos es desconocida, por lo que la simbolizaremos por *x* (en unidades de *L*, por supuesto), obteniendo la siguiente igualdad, que constituye una ecuación en la cantidad desconocida *x*

$$\frac{30\,L}{810\,km} = \frac{x}{500\,km}$$

Para determinar la cantidad desconocida de gasolina, *x*, podemos multiplicar ambos lados de la ecuación por el segundo denominador, 500 km, obteniendo[2]:

$$x = \frac{30\,L \bullet 500\,km}{810\,km}$$

Análogamente, como la pregunta número 3 trata todavía del mismo auto, el cociente constante entre las variables *V* y *d* será aún el expresado en (i). Este podemos igualarlo ahora al cociente entre los 7 *L* de gasolina y la distancia que recorreremos con esa cantidad de combustible, ahora desconocida y que podemos nuevamente denotar por una *x* (que esta vez tendrá unidades de km) para plantear una ecuación para obtenerla:

$$\frac{30\,L}{810\,km} = \frac{7\,L}{x}$$

Podemos multiplicar ambos lados por los denominadores 810 km y *x*, llegando a:

$$30\,L \bullet x = 810\,km \bullet 7\,L$$

[2]En este análisis no estamos interesados en el valor final de la incógnita, sino más bien en la estructura de las ecuaciones para obtenerla y en la fórmula final escrita en términos de productos y cocientes. No cabe duda de que el valor que se consiga al hacer los cálculos coincidirá con aquel que tú ya has previamente obtenido siguiendo la estrategia de tu preferencia vista en la unidad.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Tarea 1: La regla de tres

y finalmente despejar la distancia desconocida x, dividiendo ambos lados por 30 L:

$$x = \frac{810\ km \bullet 7\ L}{30\ L}$$

En los casos de las preguntas 4 y 5 se trata de autos diferentes, luego el cociente constante ya no estará dado por (i). En la pregunta 4 desconocemos y deseamos calcular la capacidad del estanque del auto de nuestro amigo, de modo que la denotamos como nuestra incógnita x, y en este caso el cociente constante calculado para gastar todo el combustible del estanque se convierte en $\frac{x}{1000\ km}$. Igualándolo al cociente entre los valores V = 30 L y d = 700 km, que se encuentran en el enunciado, se obtiene la ecuación siguiente:

$$\frac{x}{1000\ km} = \frac{30\ L}{700\ km}$$

La cual se resuelve fácilmente multiplicando ambos lados por 1000 km, para llegar a:

$$x = \frac{1000\ km \bullet 30\ L}{700\ km}$$

Análogamente, para el auto de la pregunta 5, se conoce la capacidad de su estanque y se desea saber qué distancia x recorrerá hasta agotarlo, por lo cual el cociente constante calculado con los valores de las variables V, d correspondientes al recorrido para gastar todo el combustible del estanque nuevamente quedará en términos de la incógnita x, dado por $\frac{25\ L}{x}$. Al igualarlo al cociente entre los valores V = 1 L y d = 30 km, se obtiene la ecuación siguiente:

$$\frac{25\ L}{x} = \frac{1\ L}{30\ km}$$

la que, de manera análoga a lo realizado en la pregunta número 2, se puede resolver multiplicando ambos lados por x y por 30 km, eliminando así los denominadores, para luego despejar x dividiendo ambos lados por 1 L:

$$x = \frac{25\ L \bullet 30\ km}{1\ L}$$

Quisiéramos ahora revisar las similitudes que se encuentran en el planteamiento y resolución de las preguntas 2 a la 5. Notemos que en todos estos casos tratamos con dos pares de valores para las variables relacionadas proporcionalmente V y d. Además, para uno de los pares (el primero o el segundo), conocemos ambos valores de las variables, y para el otro conocemos el valor de una de ellas, y desconocemos,

Tarea 1: La regla de tres

y deseamos obtener, el de la otra (al que denotamos por x). Finalmente, al aplicar la caracterización de proporcionalidad como cociente constante, se obtiene una ecuación para x, que al resolverla, entrega el valor de x como el producto de dos de los valores conocidos, dividido por el tercero. Lo anterior se resume en la siguiente tabla:

$\frac{30\ L}{810\ km} = \frac{x}{500\ km}$	$x = \frac{30\ L \bullet 500\ km}{810\ km}$
$\frac{30\ L}{810\ km} = \frac{7\ L}{x}$	$x = \frac{810\ km \bullet 7\ L}{30\ L}$
$\frac{x}{1000\ km} = \frac{30\ L}{700\ km}$	$x = \frac{1000\ Lkm \bullet 30\ L}{700\ km}$
$\frac{25\ L}{x} = \frac{1\ L}{30\ km}$	$x = \frac{25\ L \bullet 30\ km}{1\ L}$

La tabla anterior da pie a lo que se conoce como la “Regla de tres”:

- Dadas dos variables V y d relacionadas proporcionalmente, y dos pares (V_1 , d_2) y (V_2 , d_1) de valores de ellas, esta regla suele escribir las relaciones entre estos pares de elementos mediante un diagrama como el siguiente:

$$V_1 \longrightarrow V_2$$
$$d_1 \longrightarrow d_2$$

Típicamente, tres de los cuatro valores del diagrama anterior son conocidos, y se desea obtener el cuarto, que se anota como una incógnita. A modo de ejemplo, el problema de la pregunta 2 quedaría representado por el diagrama:

$$30\ L \longrightarrow x$$
$$810\ km \longrightarrow 500\ km$$

- Sin importar en cuál de los cuatro lugares (V_1 , V_2 , d_1 o d_2) está la incógnita x, el despeje de ella se puede obtener basándose en el siguiente diagrama con las flechas cruzadas:

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[dr] & V_2 \\ d_1 \arrow[ur] & d_2 \end{tikzcd}$$

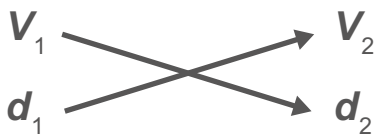
Tarea 1: La regla de tres

Típicamente, tres de los cuatro valores del diagrama anterior son conocidos, y se desea obtener el cuarto, que se anota como una incógnita. A modo de ejemplo, el problema de la pregunta 2 quedaría representado por el diagrama:

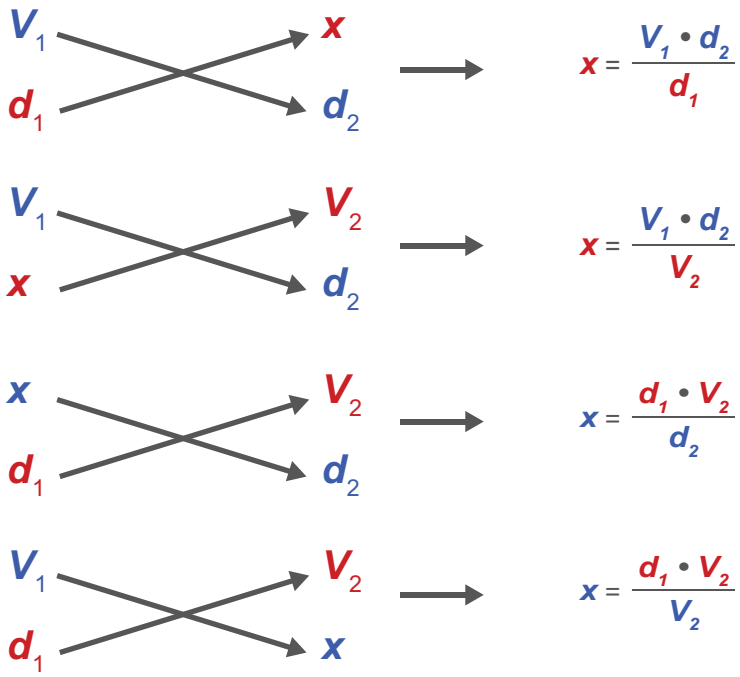
$$30\ L \longrightarrow x$$

$$810\ km \longrightarrow 500\ km$$

- Sin importar en cuál de los cuatro lugares (V_1 , V_2 , d_1 o d_2) está la incógnita x, el despeje de ella se puede obtener basándose en el siguiente diagrama con las flechas cruzadas:



La x resulta dada por <u>*el producto del par de valores conocidos conectados por una de las dos flechas, dividido por el tercer valor conocido*</u> (y que está <u>*conectado por la otra flecha con x*</u>), como muestran los diagramas siguientes, que generalizan lo obtenido en las filas de la tabla anterior correspondientes a las preguntas 2, 5, 4 y 3, respectivamente:



Tarea 1: La regla de tres

Por ejemplo, la pregunta 1 se resolvería usando esta “Regla de tres” mediante el diagrama y despeje siguientes:

Naturalmente, esto que hemos ejemplificado acá para las variables *V* y *d*, es válido para cualquier par de variables relacionadas proporcionalmente.

Es importante notar que la “Regla de tres” permite resolver muy rápidamente, de manera mecánica, problemas que involucran dos variables que varían proporcionalmente. Sin embargo, esta misma mecanización oculta las ideas importantes respecto a proporcionalidad que están presentes en los problemas, y con frecuencia lleva a los estudiantes a cometer errores al no tener claro en qué lugar de los diagramas ubicar las tres cantidades conocidas y la incógnita. Es recomendable, entonces, si se desea enseñar esta regla, no hacerlo sino hasta que los estudiantes ya hayan comprendido muy bien el concepto de proporcionalidad, y sepan resolver los problemas usando cualquiera de las caracterizaciones de la proporcionalidad estudiadas en esta unidad.

Para concluir esta tarea, te pedimos que hagas lo siguiente:

1. Dibuja los diagramas y despejes que permiten resolver las preguntas 3, 4 y 5 usando la “Regla de tres”.

2. Resuelve el siguiente problema usando tanto la “Regla de tres” como también alguna otra estrategia aprendida en esta unidad. Justifica por qué consideraste que las variables involucradas son proporcionales:
   Si 5 *L* de gasolina cuestan $8 000, calcula cuántos litros tiene un estanque que, estando vacío, se llenaría con $25 000.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

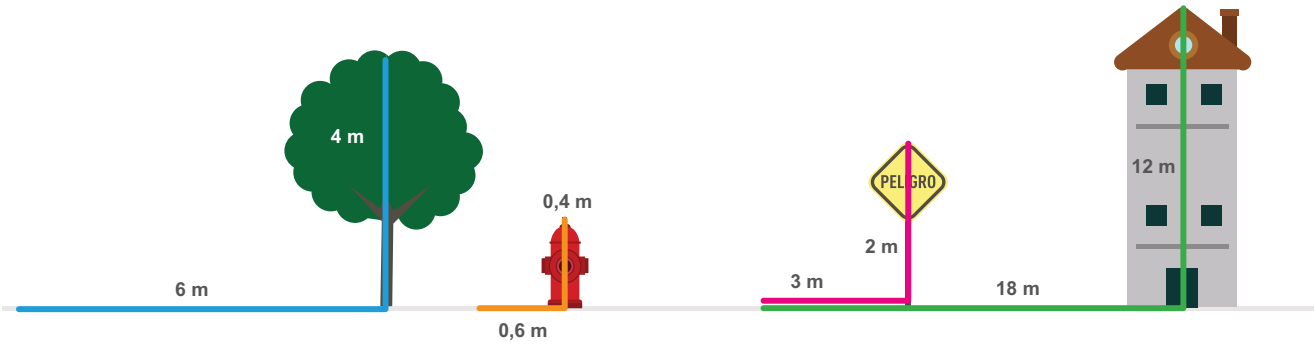
MATERIAL

CLASE 2

Actividad 1

Trabajo en parejas

La sombra que proyecta un objeto está relacionada con su tamaño y la posición del sol. Un día de verano se midieron las alturas y las sombras de varios objetos. La primera medición se realizó a las 09:30 horas, y la información se registró en el siguiente dibujo:

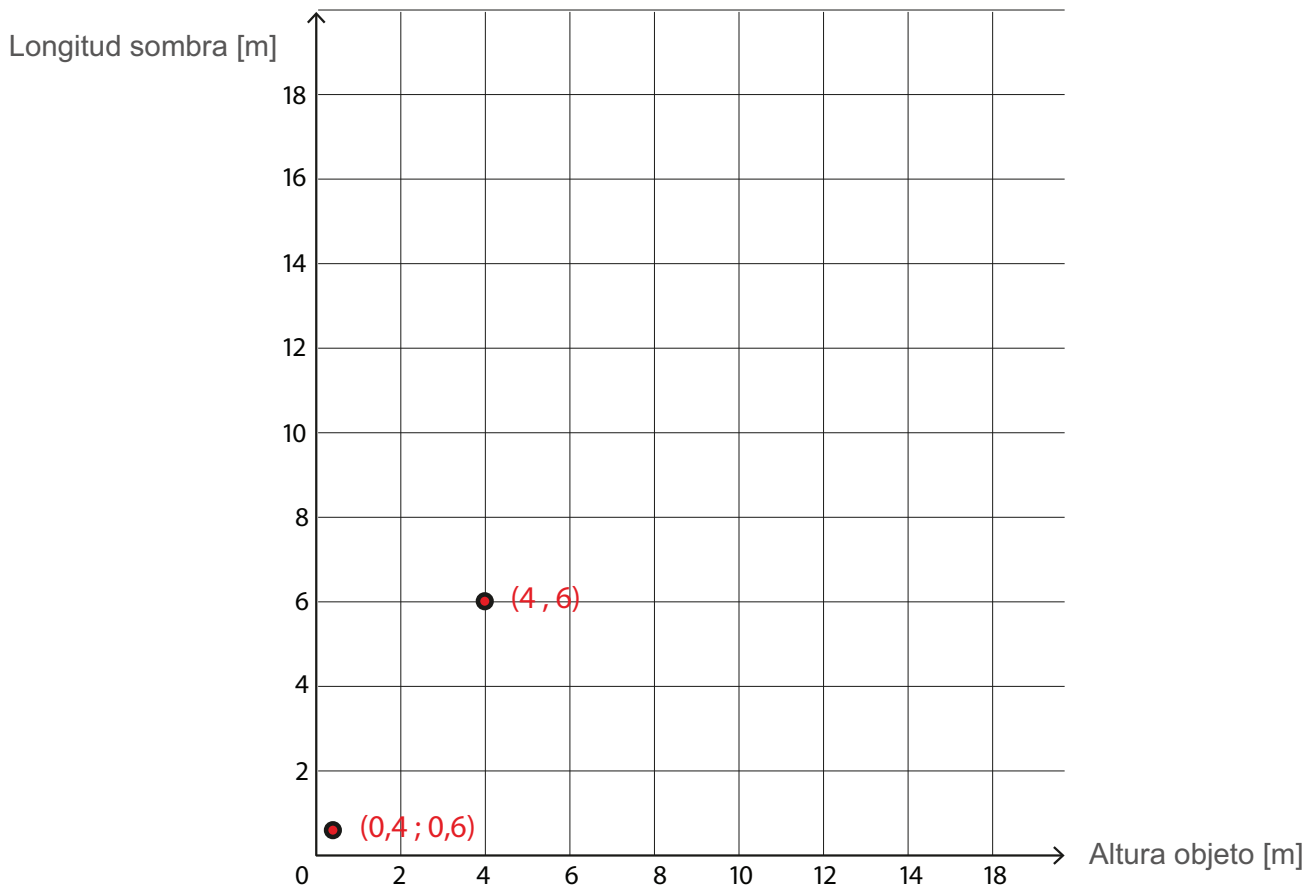


1. Organiza los datos del dibujo en la siguiente tabla y analiza si la altura de los objetos y la longitud de sus sombras son proporcionales. Elabora al menos dos argumentos.

Altura (m)	Longitud de la sombra (m)

Actividad 1

2. Observa la presentación que te mostrará el profesor que recuerda cómo se construye un gráfico. Luego, sitúa el resto de los puntos de la tabla en el plano.

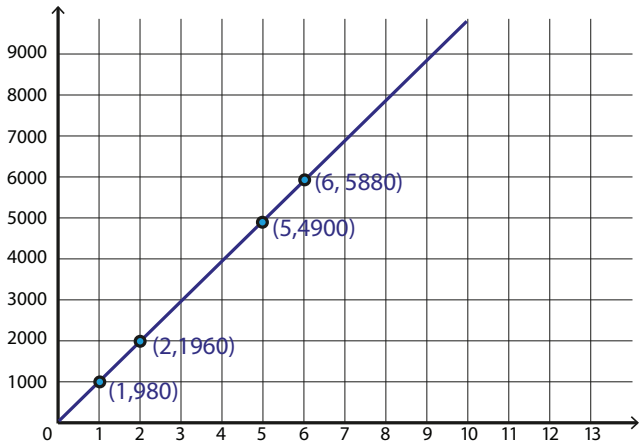


3. Dibuja en el gráfico todos los puntos de la tabla. Luego une todos los pares de puntos consecutivos del gráfico, y el más cercano al origen con este. ¿Qué figura se forma?

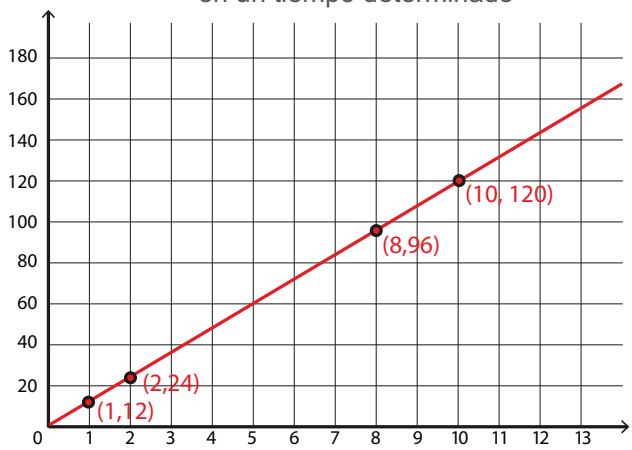
Actividad 1

4. Los siguientes gráficos corresponden a las tres situaciones de proporcionalidad estudiadas en la actividad 3 de la clase anterior. Señala al menos dos características comunes de ellos.

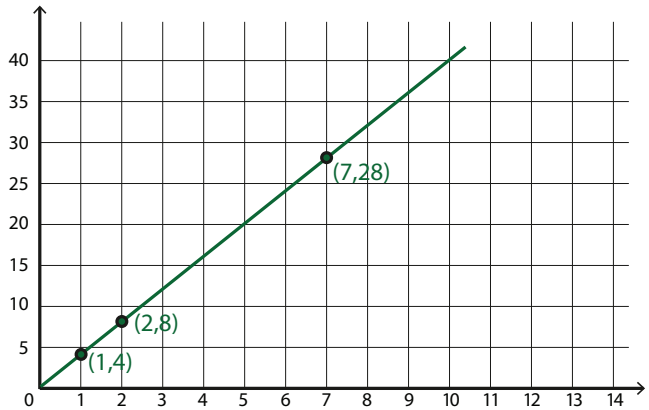
Costo de una compra de pan en kilogramos



Litros de agua que vierte una llave abierta, en un tiempo determinado



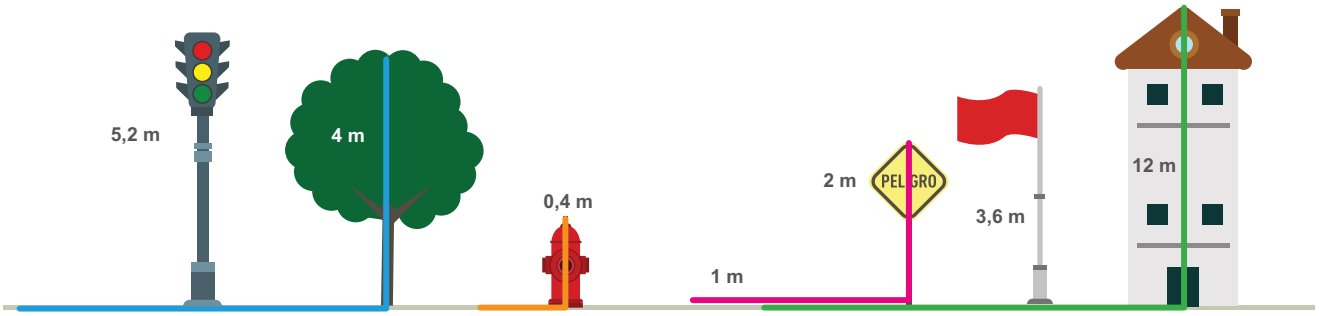
Perímetro de un cuadrado según cuánto mide su lado



Actividad 2

Trabajo en parejas

Ese día también a las 12:00 horas se midió nuevamente la longitud de las sombras de los mismos objetos y se incluyeron otros en las mediciones.



1. Completa los valores de la tabla con la información del esquema.

Altura (m)	Longitud de la sombra (m)
0,4	
2	1
3,6	
4	
5,2	
12	

¿Cuál es la constante de proporcionalidad entre la longitud de la sombra y la altura del objeto?, ¿qué expresión algebraica permite calcular directamente la sombra de los objetos dada su altura?

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Actividad 2

2. Las siguientes tablas corresponden a los datos obtenidos durante las mediciones realizadas ese día. Completa la constante de proporcionalidad y una expresión algebraica que permita calcular la longitud de la sombra a partir de la altura de los objetos, para cada caso. Escribe la expresión algebraica usando la constante de proporcionalidad. Utiliza x para la variable altura e y para la variable longitud de la sombra.

Hora 09:30

Altura (m)	Longitud sombra (m)
0,4	0,6
2	3
3,6	5,4
4	6
5,2	7,8
12	18

Constante de proporcionalidad	
Expresión algebraica	

Hora 10:30

Altura (m)	Longitud sombra (m)
0,4	0,4
2	2
3,6	3,6
4	4
5,2	5,2
12	12

Constante de proporcionalidad	
Expresión algebraica	

Hora 12:00

Altura (m)	Longitud sombra (m)
0,4	0,2
2	1
3,6	1,8
4	2
5,2	2,6
12	6

Constante de proporcionalidad	
Expresión algebraica	

3. Considera dos variables x e y que se relacionan proporcionalmente con constante a. Completa la expresión algebraica que las relaciona.

$$y = \square \cdot \square$$

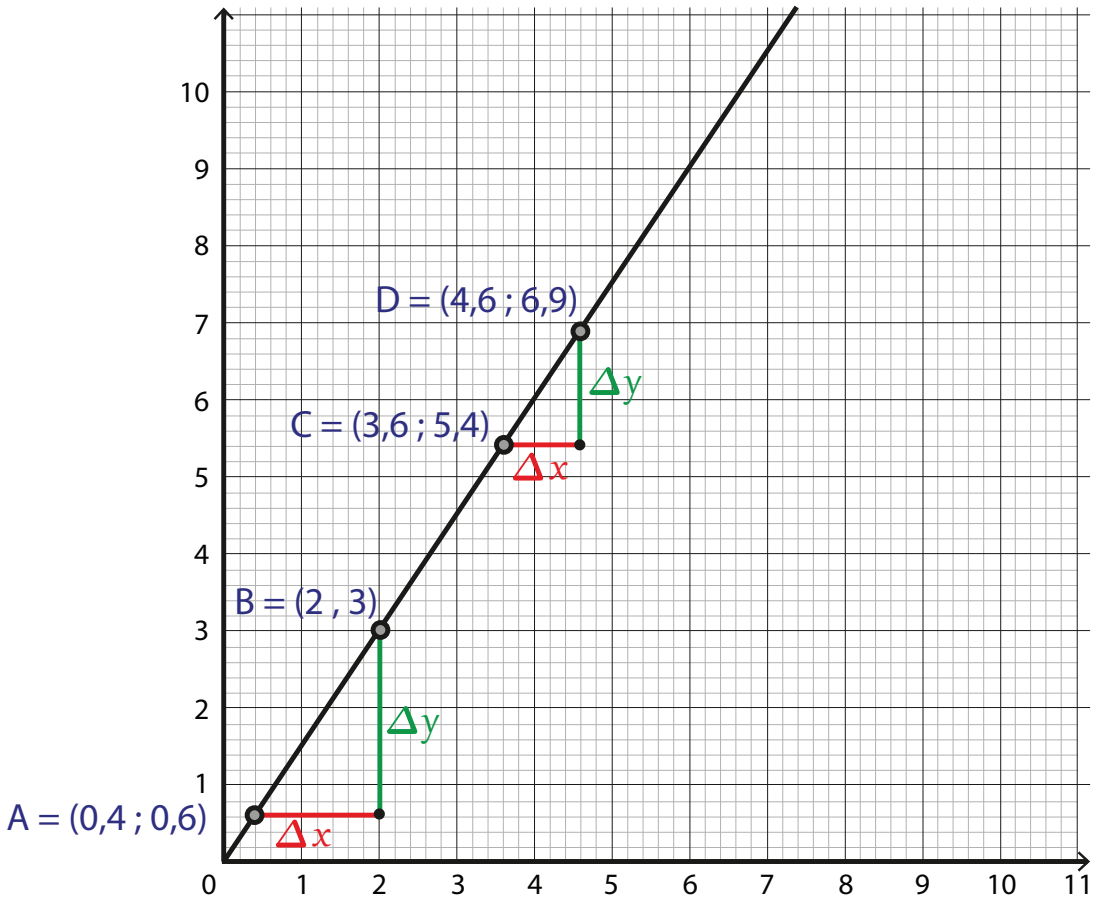
Justifica la validez de la expresión, usando el significado de la constante de proporcionalidad.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Actividad 3

Trabajo en parejas

El siguiente gráfico está construido a partir de las mediciones realizadas a las 09:30 horas. Utiliza esta información para responder las siguientes preguntas:



1. Calcula el valor de Δx y de Δy a partir de las coordenadas de los puntos.

Actividad 3

2. Completa la tabla y responde las preguntas que aparecen a continuación:

Pares de puntos		Δx	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
A (0,4 ; 0,6)	**B** (2 , 3)	1,6	2,4	
C (3,6 ; 5,4)	**D** (4,6 ; 6,9)	1	1,5	
A (0,4 ; 0,6)	**C** (3,6 ; 5,4)			
(6 , 9)	(7 ; 10,5)			

- ¿Qué puedes concluir respecto del cociente entre Δy (variación de y) y Δx (variación correspondiente de x)?

- ¿Cuál es el valor de Δy cuando Δx es igual a una unidad?

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Actividad 3

3. Completa las tablas construidas a partir de las mediciones realizadas a las 10:30 y 12:00 horas, y responde las preguntas que aparecen a continuación:

Medición realizada a las 10:30

Puntos		Δx	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
A' (0,4 ; 0,4)	B' (2 , 2)	1,6	1,6	
C' (3,6 ; 3,6)	D' (4,6 ; 4,6)	1	1	
A' (0,4 ; 0,4)	C' (3,6 ; 3,6)	3,2	3,2	
(6 , 6)	(7 , 7)	1	1	

Medición realizada a las 12:00

Puntos		Δx	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
A'' (0,4 ; 0,2)	B'' (2 , 1)	1,6	0,8	
C'' (3,6 ; 1,8)	D'' (4,6 ; 2,3)	1	0,5	
A'' (0,4 ; 0,2)	C'' (3,6 ; 1,8)	3,2	1,6	
(6 , 3)	(7 ; 3,5)	1	0,5	

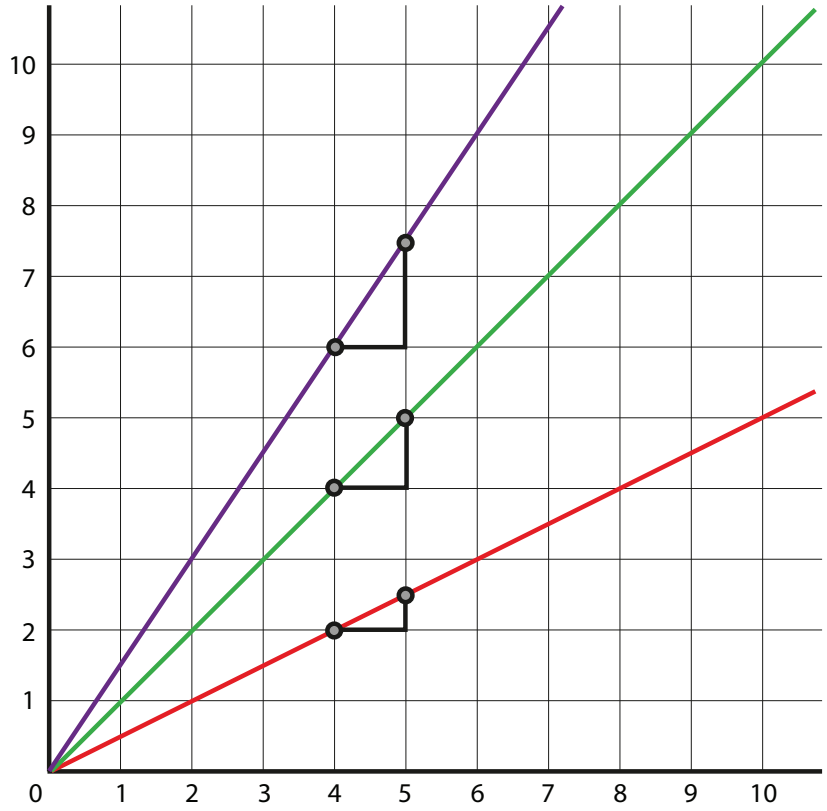
- ¿Qué puedes concluir respecto del cociente entre Δy (variación de y) y Δx (variación correspondiente de x)?

- ¿Cuál es el valor de Δy cuando Δx es igual a una unidad?

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Actividad 3

4. El siguiente gráfico contiene las rectas correspondientes a la relación entre las alturas de los objetos y la longitud de sus sombras en las tres mediciones realizadas ese día.



- Señala a qué horario de medición corresponde cada recta graficada. Justifica tu respuesta.

- Analiza el gráfico y elabora una conclusión respecto de la relación entre la constante de proporcionalidad en cada caso y la inclinación con respecto al eje *x* de la recta correspondiente.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

FICHA DE SISTEMATIZACIÓN

Unidad de aprendizaje
Proporcionalidad y linealidad

Clase 2
Proporcionalidad y función lineal

Meta de la clase
Al finalizar la clase se espera que hayas logrado reconocer que el gráfico de las relaciones de proporcionalidad es una línea recta que pasa por el origen, y asociar dichas relaciones con las funciones lineales, interpretando la pendiente de la recta como la constante de proporcionalidad y relacionándola con su inclinación.

Palabras clave
Relaciones de proporcionalidad, funciones lineales, rectas que pasan por el origen, pendiente.

Preguntas que ahora puedes responder

- ¿Cómo es el gráfico de una relación de proporcionalidad entre dos variables?
- ¿Qué es una función lineal?
- ¿Qué es la pendiente de una recta, cuál es su relación con: la constante de proporcionalidad y con la inclinación de la recta?
- ¿Cuál es el beneficio de introducir la función lineal a partir de la proporcionalidad?

Recapitulemos

- Las relaciones de proporcionalidad se caracterizan por su gráfica que siempre es una línea recta que pasa por el origen. Para algunas situaciones que por el contexto en que se plantean, no se pueden tomar todos los valores posibles, la gráfica es una colección de puntos sobre la recta.
- Cuando una variable y se puede calcular en términos de una variable x se dice que y es función de x. Se suele llamar a x variable independiente, y a y variable dependiente. En caso de que $y = a \cdot x$, hablamos de una función lineal. Así, las relaciones de proporcionalidad entre dos variables corresponden a funciones lineales.
- El cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para una función lineal de la forma $y = a \cdot x$:
    - se conoce como pendiente de la recta.
    - es constante y su valor es la constante de proporcionalidad a.
    - es igual a la variación Δy para una variación unitaria de x ($\Delta x = 1$).

  Además, en el gráfico de la función lineal, mientras mayor es el valor de la pendiente, mayor es la inclinación de la recta respecto del eje x.

- La relación entre la proporcionalidad y la función lineal permite introducir el estudio de las funciones a partir de un caso simple y conocido. En efecto:
  - La función lineal permite modelar situaciones en contextos de proporcionalidad que los estudiantes vienen estudiando desde 3° básico con las situaciones multiplicativas.
  - Esta idea de abordar la función lineal a partir de las relaciones de proporcionalidad aparece sugerida en las bases curriculares vigentes para 8° básico en el Objetivo de Aprendizaje 7.

Para profundizar

Te sugerimos revisar las siguientes referencias:

Azcárate, C. & Deulofeu, J. (1996). *Tablas, fórmulas y modelos de funciones*. Funciones y gráfica (pp. 92-95). España: Síntesis.

Block, D., T. Mendoza, M. Ramírez (2010) ¿Al doble le toca el doble? *La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. Serie Enseñar y aprender (capítulo V, pp. 101-111). México. Ediciones SM.

Martínez, S. Varas, L. (2014). *Funciones*. Álgebra para futuros profesores de Educación Básica (pp. 188-192). Santiago, Chile: SM.

Martínez, S. Varas, L. (2014). *Funciones*. Álgebra para futuros profesores de Educación Básica (pp. 198-208). Santiago, Chile: SM.

MATERIAL

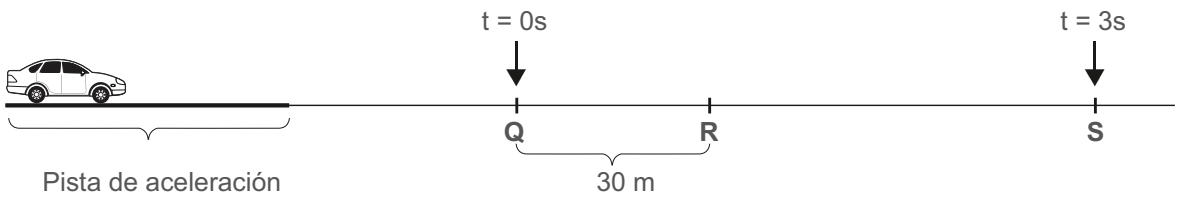
CLASE 3

Actividad 1

Trabajo individual

Una fábrica de automóviles realiza pruebas del equipamiento de nuevos vehículos haciéndolos correr a una velocidad constante de 30 m/s y tomando algunas mediciones. Para ello, se utiliza una pista que tiene sensores y es monitoreada por un operario. La siguiente imagen corresponde al plano de la pista:

Situación 1:



El inicio de la pista incluye una distancia para que los vehículos alcancen los 30 m/s, y en el punto Q hay un sensor que reporta su distancia al automóvil.

1. ¿Cuánto tiempo demora el auto en recorrer la distancia entre Q y R?

2. El automóvil demoró 3 s en pasar desde el punto Q al S. ¿Cuál es la distancia entre Q y S?

3. Escribe una expresión algebraica que permita calcular la distancia (d) que recorre el automóvil, medida desde el sensor en Q, en un tiempo (t) determinado. Considera que el tiempo se comienza a medir cuando el automóvil pasa por Q, es decir, el tiempo cuando el automóvil está en Q es t=0 s.

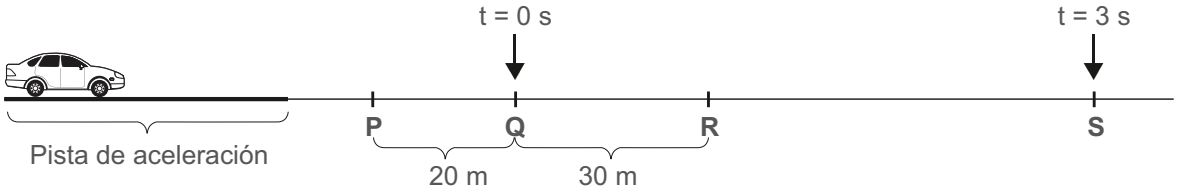
Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Actividad 2

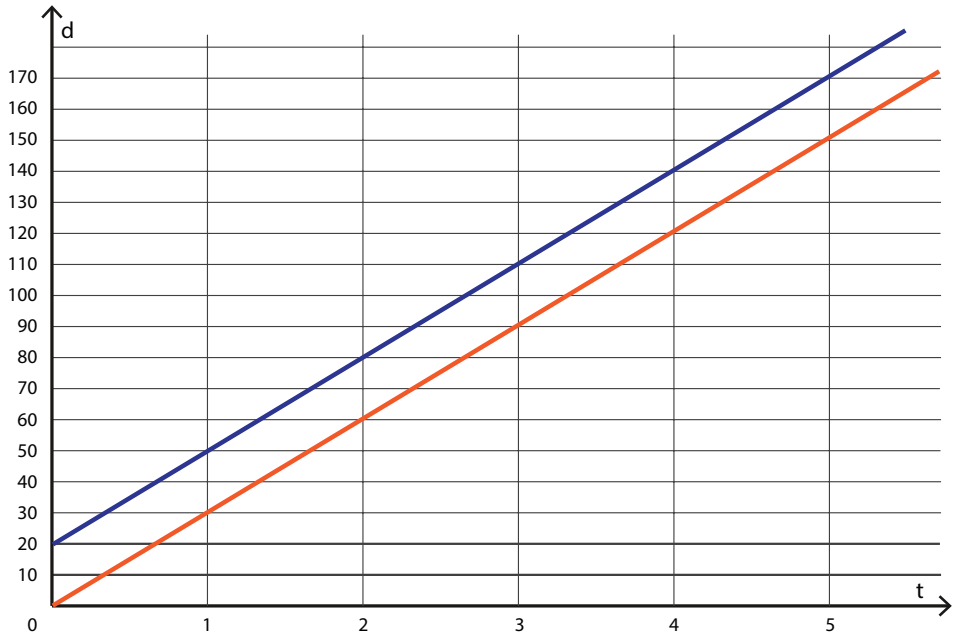
Trabajo en parejas

En varios puntos de la pista se instalaron sensores que se utilizan para corroborar que las mediciones estén correctas.

Situación 2:



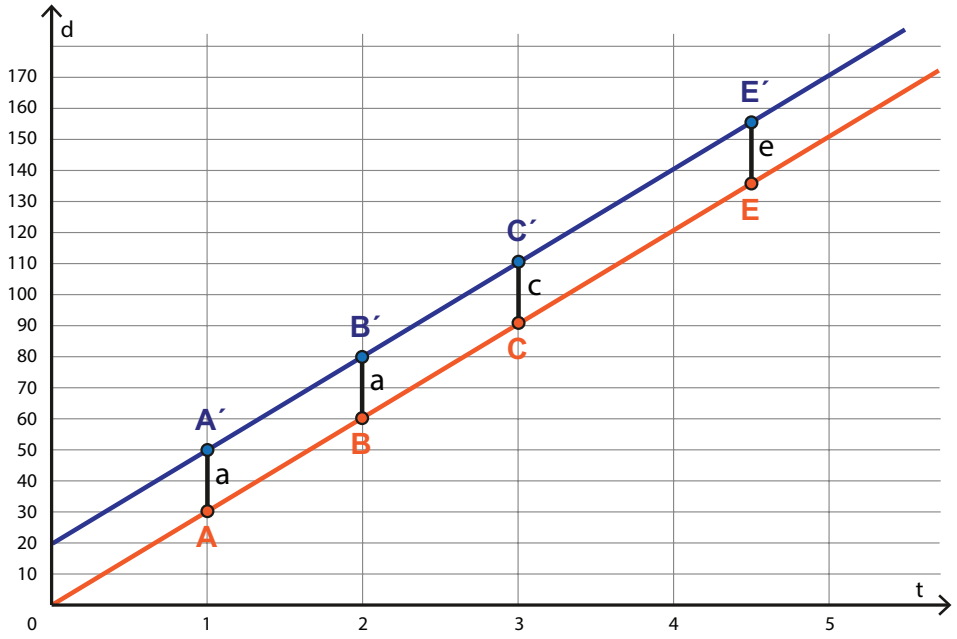
Para analizar las mediciones, el operario usa los gráficos obtenidos de los sensores ubicados en P y Q. La unidad de medida de tiempo es el segundo y la de distancia es el metro, pero para simplificar la notación no las utilizaremos explícitamente. El operario visualiza en su pantalla lo siguiente:



1. Indica la recta que corresponde a las mediciones del sensor Q y la recta que corresponde al sensor P. Explica tu respuesta.

Actividad 2

2. Observa el siguiente gráfico en el que se han marcado cuatro segmentos y los puntos correspondientes a sus extremos:

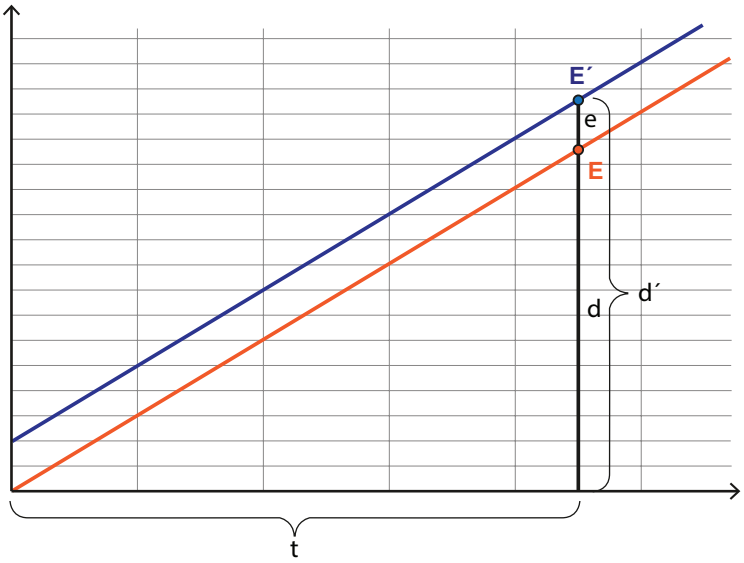


- ¿Cuál es la longitud de los segmentos a, b y c?

- ¿Qué puedes decir respecto de la longitud del segmento e? Explica tu respuesta.

Actividad 2

3. La siguiente imagen corresponde al gráfico anterior, pero se ha trazado un segmento desde E, perpendicular al eje t, cuya longitud es *d*. Por otro lado, llamamos *d'* a la longitud del segmento trazado entre E' y el eje t.



Recordando que la expresión matemática para d en términos de t es $d = 30 \cdot t$, escribe una expresión matemática para d' en términos de t.

4. Considerando el trabajo desarrollado en esta actividad, completa la siguiente conclusión:

La relación entre la _____ recorrida por el automóvil y el _____ que demora en recorrerla es una función _____. Luego, si se realizan mediciones desde un punto P a la izquierda, a _____ metros de distancia, la función que relaciona la distancia del móvil respecto del punto P y el tiempo que demora en alcanzar dicha posición tiene una expresión similar a la inicial, de la forma _____. Se puede señalar que el gráfico de la segunda función es un desplazamiento de la primera en _____ metros hacia arriba.

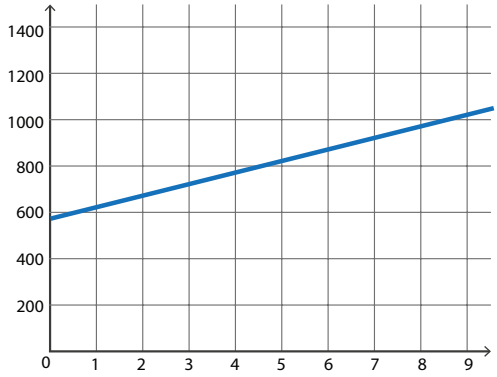
Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Actividad 3

Trabajo en parejas

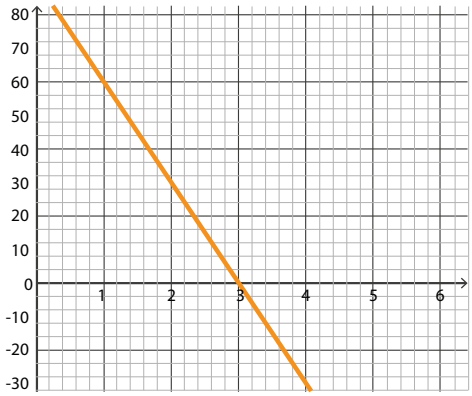
1. Observa los siguientes gráficos y señala a qué situación corresponde cada uno. Explica tu respuesta.

Gráfico 1



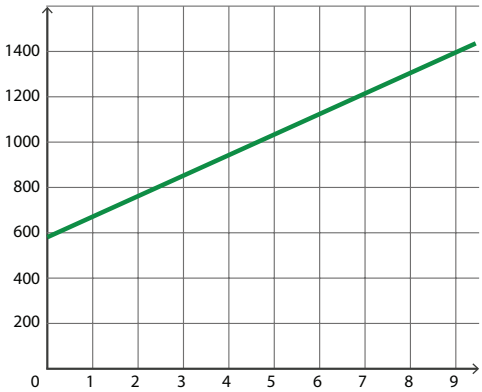
Situación _____

Gráfico 2



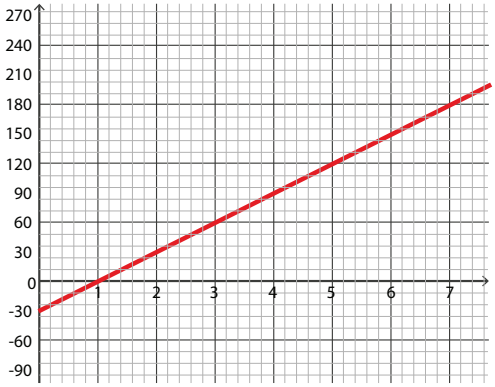
Situación _____

Gráfico 3



Situación _____

Gráfico 4

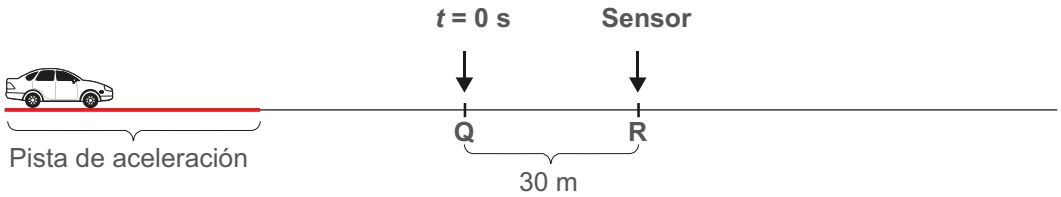


Situación _____

Actividad 3

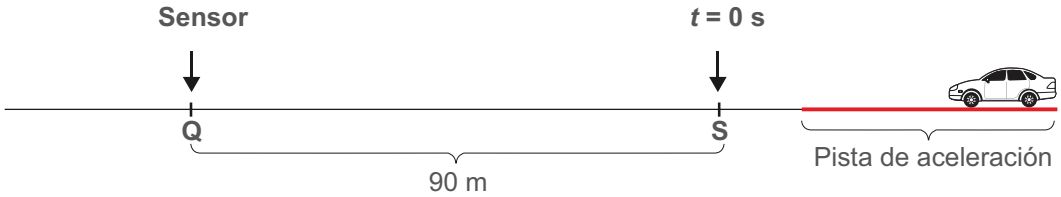
Situación A

La posición del auto que va a 30 m/s, medida con el sensor en el punto R, iniciando la medición del tiempo en el punto Q (t = 0 s en Q). Considera la convención de que las posiciones medidas hacia la izquierda de R son negativas y hacia la derecha positivas.



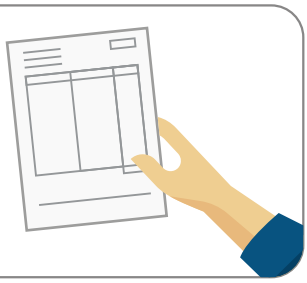
Situación B

Posición del auto que va a 30 m/s hacia la izquierda, medida con el sensor en el punto Q, iniciando la medición del tiempo en el punto S (t = 0 s en S).



Situación C

El cobro del consumo de luz en una casa tiene un cargo fijo de $580.
El valor de la electricidad consumida es $90 por kWh.



Situación D

En una fotocopiadora cobran $50 por hoja para reproducir un texto.
Además, cobran $580 por las tapas de cartulina.

2. Escribe una expresión algebraica que permita modelar cada situación.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Actividad 4

Trabajo en parejas

Los siguientes objetivos de aprendizaje y sus indicadores de evaluación fueron extraídos de las bases curriculares de 1° a 6° básico (2012), y de las bases curriculares de 7° básico a 2° medio (2015).

Lee el documento y completa la tabla anotando solo el número de los objetivos (por ejemplo: OA9) relacionados con el estudio de la proporcionalidad, de la función lineal y de la función afín en cada nivel.

Curso	**5º básico**	**6º básico**	**7º básico**	**8º básico**
Patrones y Álgebra				
Álgebra y Funciones				

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Anexo OA: Eje Patrones y Álgebra

NIVEL 5º

OA14

Descubrir alguna regla que explique una sucesión dada y que permita hacer predicciones.

Indicadores de evaluación

- Extienden un patrón numérico con y sin materiales concretos, y explican cómo cada elemento difiere de los anteriores.
- Muestran que una sucesión dada puede tener más de un patrón que la genere. Por ejemplo: la sucesión 2, 4, 6, 8,… puede tener como patrón los números pares consecutivos, o podría ser continuada, como 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7,… y en este caso podría tener un patrón de cuatro números pares consecutivos y cuatro números impares consecutivos.
- Dan ejemplos de distintos patrones para una sucesión dada y explican la regla de cada uno de ellos.
- Dan una regla para un patrón en una sucesión y completan los elementos que siguen en ella, usando esa regla.
- Describen, oralmente o de manera escrita, un patrón dado, usando lenguaje matemático, como uno más, uno menos, cinco más.
- Describen relaciones en una tabla o un gráfico de manera verbal.

OA15

Resolver problemas, usando ecuaciones e inecuaciones de un paso, que involucren adiciones y sustracciones, en forma pictórica y simbólica.

Indicadores de evaluación

- Expresan un problema mediante una ecuación en que la incógnita está representada por una letra.
- Crean un problema para una ecuación dada.
- Obtienen ecuaciones de situaciones imaginadas sin resolver la ecuación.
- Resuelven una ecuación simple de primer grado con una incógnita que involucre adiciones y sustracciones.
- Evalúan la solución obtenida de un problema en términos del enunciado del problema.
- Explican estrategias para resolver problemas, utilizando ecuaciones.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Anexo OA: Eje Patrones y Álgebra

NIVEL 6º

OA9

Demostrar que comprenden la relación entre los valores de una tabla y aplicarla en la resolución de problemas sencillos:

› identificando patrones entre los valores de la tabla

› formulando una regla con lenguaje matemático

Indicadores de evaluación

- Establecen relaciones que se dan entre los valores dados en una tabla, usando lenguaje matemático.
- Crean representaciones pictóricas de las relaciones que se dan en una tabla de valores.
- Usando la relación entre los valores de una tabla, predicen los valores de un término desconocido y verifican la predicción.
- Formulan una regla que se da entre los valores de dos columnas de números en una tabla de valores.
- Identifican elementos desconocidos en una tabla de valores.
- Describen patrones en una tabla de valores dados.
- Crean una tabla de valores para registrar información y destacar un patrón cuando se resuelve un problema.

OA10

Representar generalizaciones de relaciones entre números naturales, usando expresiones con letras y ecuaciones.

Indicadores de evaluación

- Escriben y explican la fórmula para encontrar el perímetro de un rectángulo.
- Escriben y explican la fórmula para encontrar el área de un rectángulo.
- Usan letras para generalizar la propiedad conmutativa de la adición y la multiplicación.
- Describen la relación entre los valores en una tabla, usando una expresión en que intervienen letras.
- Representan la regla de un patrón, usando una expresión en que intervienen letras.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Anexo OA: Eje Patrones y Álgebra

OA11

Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, utilizando estrategias como:

› usar una balanza

› usar la descomposición y la correspondencia 1 a 1 entre los términos en cada lado de la ecuación y aplicando procedimientos formales de resolución.

Indicadores de evaluación

- Determinan soluciones de ecuaciones que involucran sumas, agregando objetos hasta equilibrar una balanza.
- Expresan números en una forma que involucre adiciones o sustracciones con números. Por ejemplo: expresan 17 en la forma $2 \cdot 8 + 1$, o 25 en la forma $3 \cdot 9 - 2$.
- Expresan números en una forma que involucre adiciones o sustracciones con números y con incógnitas. Por ejemplo: expresan 19 en la forma $4 \cdot x + 3$.
- Resuelven ecuaciones, descomponiendo de acuerdo a una forma dada y haciendo una correspondencia 1 a 1. Por ejemplo: resuelven la ecuación $5 \cdot x + 4 = 39$, expresando 39 en la forma $5 \cdot x + 4$, y mediante correspondencia 1 a 1 determinan el valor de x.
- Aplican procedimientos formales, como sumar o restar números a ambos lados de una ecuación, para resolver ecuaciones.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Anexo OA: Eje Álgebra y Funciones

NIVEL 7º

OA6

Utilizar el lenguaje algebraico para generalizar relaciones entre números, para establecer y formular reglas y propiedades y construir ecuaciones.

Indicadores de evaluación

- Representan patrones de manera pictórica y simbólica.
- Relacionan expresiones algebraicas con patrones dados.
- Expresan patrones geométricos con términos algebraicos; por ejemplo: “tres unidades al norte (N) y dos unidades al este (E)” con $3n + 2e$, relacionando con puntos y gráficas en el plano cartesiano.
- Relacionan expresiones del lenguaje natural con términos algebraicos; por ejemplo: “el doble de…” o “la mitad de…” con $2x$ o $\frac{x}{2}$, etc.
- Representan expresiones algebraicas sencillas de manera concreta (metáfora de máquinas), pictórica (medidas de figuras) y simbólica.
- Resuelven problemas de la vida cotidiana que pueden ser resueltos con ecuaciones.

OA7

Reducir expresiones algebraicas, reuniendo términos semejantes para obtener expresiones de la forma $ax + by + cz$ $a, b, c \in Z$.

Indicadores de evaluación

- Representan la adición y la sustracción de variables por la unión y la separación de símbolos pictóricos.
- Representan la conmutatividad y la asociatividad de la suma en forma concreta o pictórica.
- Reducen expresiones algebraicas en perímetros de figuras geométricas.
- Aplican la conmutatividad y la asociatividad de la adición para reducir expresiones algebraicas.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Anexo OA: Eje Álgebra y Funciones

OA8

Mostrar que comprenden las proporciones directas e inversas:

› Realizando tablas de valores para relaciones proporcionales.

› Graficando los valores de la tabla.

› Explicando las características de la gráfica.

› Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

Indicadores de evaluación

- Reconocen cambios en la vida cotidiana que se desarrollan en forma directamente proporcional.
- Completan y elaboran tablas de valores que pertenecen a proporcionalidades directas.
- Confeccionan gráficos que pertenecen a proporcionalidades directas.
- Reconocen cambios en la vida cotidiana que se desarrollan en forma inversamente proporcional.
- Explican la diferencia entre proporcionalidad directa e inversa.
- Reconocen la proporcionalidad directa e inversa en tablas de valores, gráficos y situaciones reales.
- Resuelven problemas mediante la proporcionalidad correspondiente.

OA9

Modelar y resolver problemas diversos de la vida diaria y de otras asignaturas que involucran ecuaciones e inecuaciones lineales de la forma:

› $ax = b$; $\frac{x}{a} = b$; con a, b y $c \in \mathbb{Z}$; $a \neq 0$

› $ax < b$; $ax > b$; $\frac{x}{a} < b$; $\frac{x}{a} > b$; con a, b y $c \in \mathbb{N}$; $a \neq 0$

Indicadores de evaluación

- Representan transformaciones equivalentes mediante modelos concretos de balanzas: agregar o sacar pesos.
- Resuelven ecuaciones e inecuaciones en ejercicios rutinarios, aplicando transformaciones equivalentes.
- Modelan situaciones de la vida diaria con ecuaciones de la forma $ax = b$ o $\frac{x}{a} = b$.
- Modelan situaciones de la vida diaria con inecuaciones de la forma $ax < b$; $ax > b$; $\frac{x}{a} < b$; $\frac{x}{a} > b$.
- Representan la solución de las ecuaciones o inecuaciones en la recta numérica y en el plano cartesiano.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Anexo OA: Eje Álgebra y Funciones

NIVEL 8º

OA6

Mostrar que comprenden la operatoria de expresiones algebraicas:

› Representándolas de manera pictórica y simbólica.

› Relacionándolas con el área de cuadrados, rectángulos y volúmenes de paralelepípedos.

› Determinando formas factorizadas.

Indicadores de evaluación

- Modelan concreta o pictóricamente (área de rectángulos) la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma: $(a + b) \cdot c = ac + bc$, $(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$.
- Transforman productos en sumas y sumas en productos, en ejercicios rutinarios.
- Elaboran expresiones algebraicas a base de composiciones de áreas y perímetros de figuras 2D.
- Representan composiciones de áreas y perímetros de figuras 2D, basándose en expresiones algebraicas.
- Desarrollan y reducen términos algebraicos que incluyen sumas.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Anexo OA: Eje Álgebra y Funciones

OA7

Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal:

› Utilizando tablas.

› Usando metáforas de máquinas.

› Estableciendo reglas entre *x* e *y*.

› Representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo.

Indicadores de evaluación

- Elaboran, completan y analizan tablas de valores y gráficos, y descubren que todos los pares de valores tienen el mismo cociente (“constante de proporcionalidad”).
- Descubren el concepto de función mediante la relación de proporcionalidad directa.
- Descubren que la inclinación (pendiente) de la gráfica depende de la constante de la proporcionalidad.
- Representan la noción de función de manera concreta (utilizando metáforas de máquinas), pictórica o simbólica.
- Elaboran las tablas de valores y gráficos correspondientes, basados en ecuaciones de funciones lineales $f(x) = a \cdot x$ ($y = a \cdot x$).
- Representan la linealidad $f(kx) = kf(x)$ y $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ en tablas y gráficos.
- Identifican la pendiente del gráfico de la función $f(x) = a \cdot x$ con el factor a.
- Verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación $f(x) = a \cdot x$.
- Modelan situaciones de la vida cotidiana o de ciencias con funciones lineales.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Anexo OA: Eje Álgebra y Funciones

OA8

Modelar situaciones de la vida diaria y de otras asignaturas, usando ecuaciones lineales de la forma: $ax = b$; $\frac{x}{a} = b$, $a \neq 0$; $ax + b = c$; $\frac{x}{a} + b = c$; $ax = b + cx$; $a(x + b) = c$; $ax + b = cx + d$ (a, b, c, d, $e \in \mathbb{Q}$).

Indicadores de evaluación

- Representan pictóricamente, mediante balanzas, ecuaciones de la forma $ax = b$; $\frac{x}{a} = b$, $a \neq 0$; $ax + b = c$; $x/a + b = c$; $ax = b + cx$; $a(x + b) = c$; $ax + b = cx + d$.
- Identifican las actividades “agregar a la balanza” con la adición y “sacar de la balanza” con la sustracción.
- Modelan transformaciones equivalentes con actividades que mantienen el equilibrio de la balanza.
- Modelan situaciones que requieren de una ecuación o inecuación para responder a un problema.
- Resuelven ecuaciones de la forma $ax = b$; $\frac{x}{a} = b$, $a \neq 0$; $ax + b = c$; $\frac{x}{a} + b = c$; $ax = b + cx$; $a(x + b) = c$; $ax + b = cx + d$ en ejercicios rutinarios.
- Resuelven problemas cotidianos, utilizando ecuaciones e inecuaciones.

OA9

Resolver inecuaciones lineales con coeficientes racionales en el contexto de la resolución de problemas, por medio de representaciones gráficas, simbólicas, de manera manual y/o con software educativo.

Indicadores de evaluación

- Representan inecuaciones de manera concreta (balanzas en estado de desequilibrio), pictórica o simbólica.
- Reconocen que una transformación equivalente de una inecuación no debe alterar el sentido de la desigualdad.
- Verifican en la recta numérica que la multiplicación (división) de una inecuación con un número negativo invierte el sentido de los símbolos <,>.
- Resuelven inecuaciones de la forma $ax + b < c$ o $ax + b > c$ en ejercicios rutinarios.
- Resuelven problemas de la vida cotidiana que tienen una base fija y cambio constante, mediante ecuaciones e inecuaciones de la forma mencionada.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Anexo OA: Eje Álgebra y Funciones

OA10

Mostrar que comprenden la función afín:

› Generalizándola como la suma de una constante con una función lineal.

› Trasladando funciones lineales en el plano cartesiano.

› Determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo.

› Relacionándola con el interés simple.

› Usándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

Indicadores de evaluación

- Representan, completan y corrigen tablas y gráficos pertenecientes a cambios con una base fija y tasa de cambio constante.
- Elaboran, basados en los gráficos, la ecuación de la función afín $f(x) = a \cdot x + b$.
- Determinan las regiones en el plano cartesiano cuyos puntos $p(x, y)$ representan soluciones (x, y) de las inecuaciones $y < a \cdot x + b$ o $y > a \cdot x + b$.
- Diferencian modelos afines, lineales y de proporcionalidad inversa.
- Modelan situaciones de la vida diaria o de ciencias con funciones afines.
- Identifican, en la ecuación funcional, el factor a con la pendiente $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ de la recta y el sumando b con el segmento entre el punto de intersección del gráfico con el eje vertical y el origen O (0,0).
- Elaboran gráficos de funciones afines a y b dadas o con dos puntos dados y verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación $f(x) = a \cdot x + b$.
- Resuelven problemas de la vida diaria o de ciencias que involucran el cambio constante expresado mediante ecuaciones recursivas de la forma $f(x + 1) - f(x) = c$.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

FICHA DE SISTEMATIZACIÓN

Unidad de aprendizaje
Proporcionalidad y linealidad

Clase 3
Función lineal

Meta de la clase
Al finalizar la clase se espera que hayas logrado comprender la función afín a partir de un desplazamiento de la gráfica de la función lineal.

Palabras clave
Función lineal, función afín, recta, pendiente de una recta.

Preguntas que ahora puedes responder

- ¿Cómo se relacionan las gráficas de una función lineal con las de una función afín?
- ¿Qué relación algebraica existe entre una función lineal y una función afín?
- ¿Qué significa que $b < 0$ y que $a < 0$ en el gráfico de una expresión de la forma $y = ax + b$?
- ¿Cuál es la secuencia que propone el currículum para estudiar la proporcionalidad, la función lineal y la función afín?

Recapitulemos

- Una función de la forma $y = ax + b$ se denomina función afín y su gráfico corresponde a un desplazamiento vertical en b unidades del gráfico de la función lineal $y = ax$. Las funciones lineales son funciones afines para las cuales $b = 0$.

- La pendiente de una recta, corresponde al cociente constante entre Δy (variaciones de y) con Δx (variaciones de x). Para la función afín, $y = ax + b$, la pendiente de la recta, al igual que para la función lineal $y = ax$, es a.

- Cuando la pendiente de la recta es negativa, los valores de y decrecen a medida que los de x crecen. Rectas con pendiente igual a cero ($a = 0$) son horizontales y corresponden al gráfico de funciones constantes de la forma $y = b$.

- En esta unidad de aprendizaje que hemos desarrollado se planteó una secuencia similar a lo que propone el currículum chileno. Iniciamos el estudio caracterizando las situaciones multiplicativas (3° y 4° básico) como situaciones de proporcionalidad. Luego, estudiamos situaciones de proporcionalidad usando tablas de datos, analizando su gráfica y caracterizándolas como función lineal. Finalmente, construimos la noción de función afín a partir del desplazamiento de una función lineal.

- La propuesta metodológica de enseñanza en esta unidad recoge las orientaciones que se proponen en el currículum, el cual recomienda que la construcción de conocimientos matemáticos se realice a través del estudio de situaciones contextualizadas, resolviendo problemas, argumentando y usando diversos tipos de representaciones.

Para profundizar

Te sugerimos revisar las siguientes referencias:

Azcárate, C. & Deulofeu, J. (1996). *Tablas, fórmulas y modelos de funciones*. Funciones y gráfica. España: Síntesis. (pp. 95-98).

Block, D., T. Mendoza, M. Ramírez (2010) *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. Serie Enseñar y aprender. México. Ediciones SM. (capítulo V, pp. 101-111).

Martínez, S. y Varas, L. (2014). *Funciones*. Álgebra para futuros profesores de Educación Básica. Santiago, Chile: SM. (pp. 207-212).

Tarea 2: Funciones afines

Recordemos que…

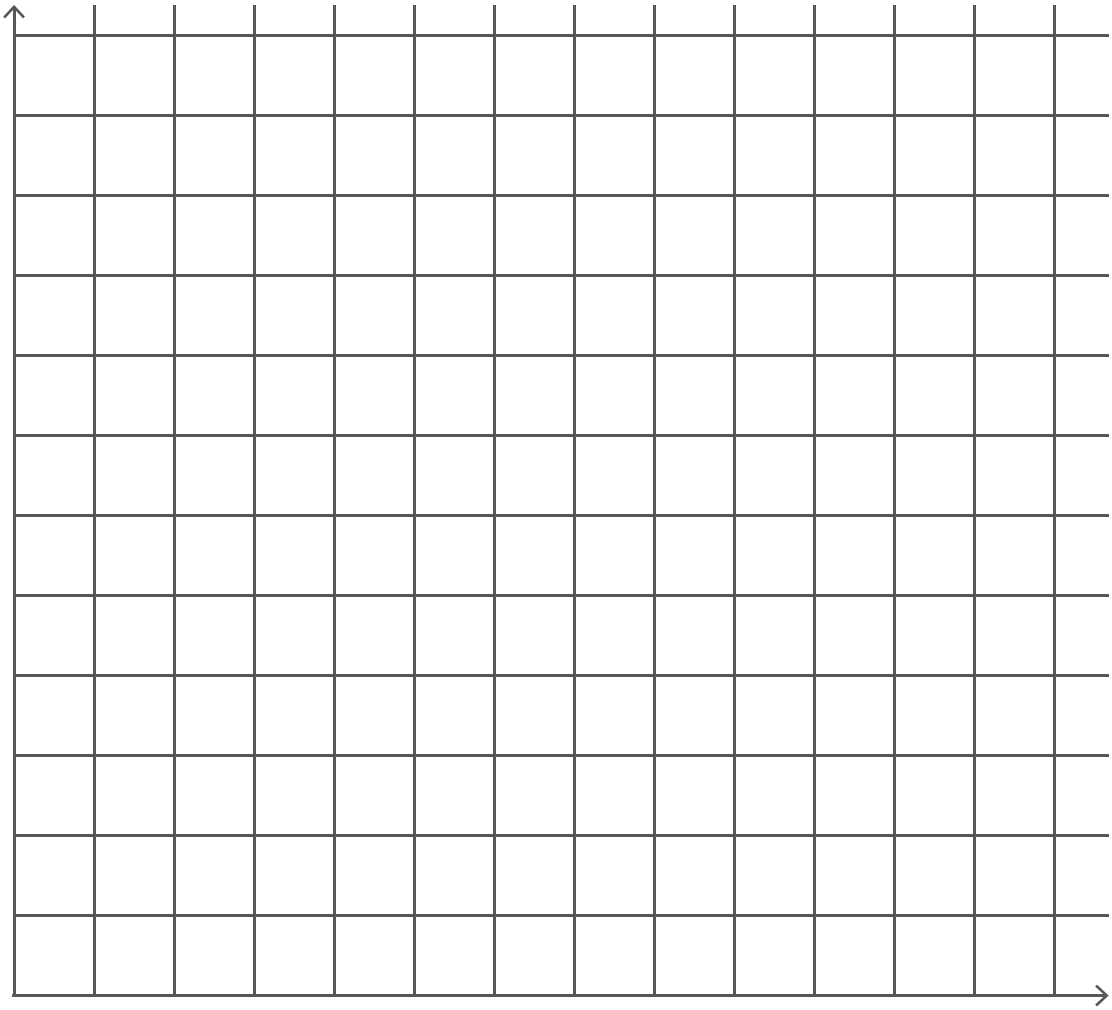
> Una expresión del tipo $y = ax + b$ determina una función afín, independiente del valor de a y b, y su gráfico es una recta. Las funciones lineales son funciones afines para las cuales $b = 0$.

Para cada una de las siguientes situaciones, determina la función que permite modelar la relación entre las variables y responde las preguntas.

Situación A

El dueño de una imprenta compró una nueva máquina para la reproducción de afiches, cuyo costo es $9.800.000. Para efectos del pago de impuestos se supone que el costo de la máquina se deprecia linealmente hasta llegar a 0 en un período de 10 años.

1. Grafica la recta que contiene los puntos que representan la relación entre las variables costo de la máquina y antigüedad.



Tarea 2: Funciones afines

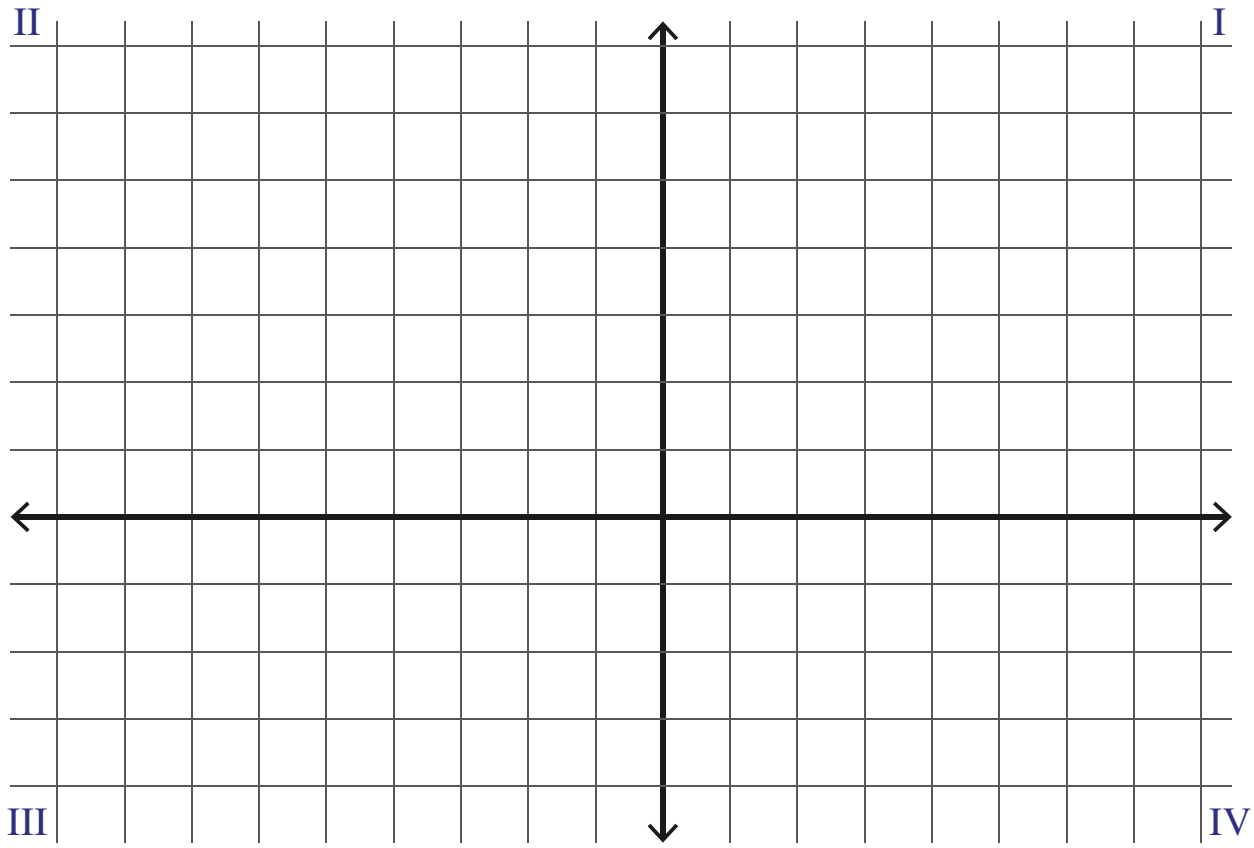
2. Escribe una expresión algebraica que modele el costo de la máquina en función de su antigüedad. Explica los valores de la pendiente y la intersección con el eje vertical a partir de la situación.

Situación B

Los países de habla inglesa, comúnmente usan la escala Fahrenheit para medir la temperatura. Esta escala es termodinámica y su punto de congelación es de 32 grados Fahrenheit (°F) y el punto de ebullición a una presión atmosférica normal es 212 °F. Como ya sabrás, en Chile se mide la temperatura en grados Celsius, en que el punto de congelación es de °C y el punto de ebullición a una presión atmosférica normal es 100 °C.

1. Sabiendo que la relación entre estas escalas de temperatura es una función afín, escribe una fórmula que permita transformar de °F a °C.

2. Grafica la recta que representa esta relación.



3. ¿Qué significa que la intersección con el eje vertical sea negativa? Justifica tu respuesta en el contexto de la situación.

4. ¿Qué significado tienen los puntos de la recta que se ubican en el II y el III cuadrante? Justifica tu respuesta en el contexto de la situación.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.