DEFINICIÓN DE PERÍMETRO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

UNIDAD DE APRENDIZAJE

UNIDADES PARA LA FORMACIÓN INICIAL DOCENTE EN MATEMÁTICA

fcfm FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

CMMEdu

CONICYT Ministerio de Educación Gobierno de Chile

FONDEF Fondo de Fomento al Desarrollo Científico y Tecnológico

Ministerio de Educación Gobierno de Chile

CPEIP Ministerio de Educación Gobierno de Chile

Este material fue elaborado en el marco del Proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119 (2017-2019): Metodologías innovadoras para la formación inicial de profesores de Educación Básica: Modelo basado en prácticas efectivas de aula y tecnologías de la información.

Esta unidad de aprendizaje fue probada en cursos de carreras de Pedagogía en Educación Básica como parte del proceso de elaboración. Agradecemos a los profesores Ximena Gajardo, Macarena Valenzuela, Natalia Alvarado y a sus estudiantes por sus valiosas contribuciones al desarrollo de esta unidad. También, agradecemos a Universidad de Atacama, Universidad Alberto Hurtado, Universidad de O´Higgins quienes colaboraron en el proceso de ajuste final del material.

Equipo de creación:

Valentina González M. CMM, Universidad de Chile.
Sebastián Howard M. Universidad Diego Portales.
Alejandro López C. Universidad Andrés Bello.
Aldo Ramírez M. CMM, Universidad de Chile.
Francisco Rojas S. Pontificia Universidad Católica de Chile.

Equipo de edición:

Pablo Dartnell R. CIAE-CMM, Universidad de Chile.
Alejandro López C. Universidad Andrés Bello.
Salomé Martínez S. CMM, Universidad de Chile.
Ricardo Salinas P. CMM, Universidad de Chile.

ÍNDICE

MATERIAL
PARA EL FORMADOR

VISIÓN
GLOBAL

UNIDAD

DEFINICIÓN DE PERÍMETRO Y
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

UNIDAD

DEFINICIÓN DE PERÍMETRO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

El propósito de esta unidad es que los profesores en formación inicial experimenten el proceso de construcción de una definición de un concepto geométrico elemental (borde de una figura) y que lo usen para el cálculo del perímetro en contexto de resolución de problemas.

Las actividades de esta unidad están diseñadas para provocar un conflicto en el cual los/as futuros/as docentes cuestionan las ideas que tienen sobre el borde de una figura y establecen la necesidad de construir una definición precisa de dicho concepto. Este trabajo comienza con el uso de una analogía que permite explorar ideas intuitivas sobre interior, exterior y borde de una figura, seguido de un proceso progresivo que culmina en una definición formal de puntos en el borde, en términos de círculos centrados en ellos. Esta definición se pone a prueba en variadas figuras y se utiliza para resolver problemas en los que está involucrado el cálculo de perímetro. Este trabajo está acompañado de la reflexión sobre las formas de razonamiento matemático puestas en juego. En esta unidad, los/as futuros/as profesores/as tienen la oportunidad de reconocer el uso de argumentos visuales y razonamientos de tipo inductivo y deductivo implicados en la resolución de problemas. Tanto la construcción de una definición como el análisis de las formas de razonamiento utilizados aportan una comprensión importante sobre el trabajo matemático en los/as docentes en formación.

1. Fundamentación del tema

Organizar la enseñanza de las matemáticas a partir de la problematización de los temas que se quiere estudiar es una declaración muy aceptada hoy en día en el ámbito de la educación matemática. Alan Schoenfeld (1983) fundamentó su propuesta de utilizar la resolución de problemas en el aprendizaje de la matemática en lo que denominó la adopción de un “microcosmos matemático” en el proceso docente. Esto es, propiciar en el aula condiciones similares a las condiciones que los matemáticos experimentan en el proceso del desarrollo de las matemáticas. Entre ellas, la construcción de definiciones.

Una parte importante del trabajo que los matemáticos desarrollan consiste en construir definiciones, que son percibidas por ellos como entidades dinámicas construidas por el hombre. El proceso involucrado en la construcción de definiciones es de gran importancia para entender la construcción y significado de la matemática, sin embargo, este tipo de trabajo está poco presente en la Educación Básica y Media.

En la enseñanza, usualmente las definiciones están al servicio de la memorización, en lugar de un aprendizaje orientado a una negociación de significado (Solomon, 2006), lo que puede conllevar a que muchos/as estudiantes tiendan a ignorar las definiciones matemáticas formales, incluso cuando las conocen de memoria (Tabach & Nachlieli, 2015). Estas visiones también se reflejan en los textos escolares donde, de acuerdo a Morgan (2014, citado en Tabach, M., & Nachlieli, T. 2015, p. 168), las definiciones suelen presentarse estáticas y despersonalizadas.

Una parte importante del aprendizaje de las matemáticas es tomar conciencia de la importancia de definir (Ouvrier-Buffet, 2011). Para que los/as estudiantes aprecien su importancia, se les debe permitir formular sus propias definiciones y ponerlas a prueba, con el propósito de visibilizar ambigüedades y provocar la necesidad de modificarlas. En el proceso, los/as estudiantes mejoran su conceptualización del objeto matemático definido.

De acuerdo con Lakatos (1961), cuando los/as estudiantes experimentan el proceso de construcción de una definición haciendo evolucionar una definición inicial, se enfrentan a tareas tales como explorar, conjeturar, probar, y elaborar ejemplos y contrajemplos, entre otras. Esto permite que modifiquen sus ideas sobre el concepto estudiado y realicen tipos de trabajo matemático de distinto tipo, lo que enriquece su aprendizaje.

En esta unidad se involucra a los/as docentes en formación en la construcción de la definición de borde y perímetro de una figura plana, creando oportunidades para que cuestionen sus conocimientos previos y reconozcan la necesidad de elaborar una definición. El concepto elegido para iniciar este trabajo es muy intuitivo y no se suele abordar con profundidad, ni en la Educación Básica ni en la Educación Media. La construcción de su definición se realiza de manera guiada, reconociendo atributos del concepto, utilizando ejemplos concretos y conceptos geométricos conocidos para definirlo (punto y círculo). Esta definición es probada para comprender su significado y coherencia con nociones previas y utilizada para construir una definición de perímetro.

Después de construir esta definición, los/as estudiantes deben hacer uso riguroso de ella en situaciones desafiantes que implican el cálculo del perímetro de una diversidad de figuras. Los problemas considerados tienen la característica de ser contraintuitivos respecto de la idea de perímetro, además de proporcionar oportunidades para la utilización de argumentos visuales y de razonamientos de tipo inductivo y deductivo. Al finalizar la unidad se proponen actividades para gatillar procesos de reflexión colectiva en torno al sentido de la secuencia de actividades que conforman esta unidad.

En síntesis, se espera que el estudio de esta unidad, además de contribuir a que los/as futuros/as profesores/as profundicen su conocimiento sobre perímetro, aporte a su comprensión de la forma en la que se realiza el trabajo matemático en torno a la definición de conceptos, fortaleciendo su dominio sobre los contenidos escolares relacionados con el perímetro, que les permitirá enfrentar con seguridad su enseñanza.

2. Estructura de la UAFI

UAFI: DEFINICIÓN DE PERÍMETRO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

CLASE 1
Construyendo definiciones

CLASE 2
Definiendo perímetro

CLASE 3
Razonando con el perímetro

TAREA 1
Trabajando con definiciones

TAREA 2
Calculando perímetros

La **primera clase** comienza con una actividad de exploración en la que los/as estudiantes cuestionan sus conocimientos respecto del significado del borde de una figura. Es esperable que también aparezcan cuestionamientos sobre la noción de figura plana. Para ello, la siguiente actividad plantea una definición de este concepto que se pide probar en varias figuras, algunas de ellas atípicas. Esta actividad tiene el propósito de que el conflicto se enfoque en la definición de borde y no en el de figura. Se continúa con una actividad de construcción y profundización de conocimientos, en la que se utiliza una analogía para presentar intuitivamente las ideas de puntos interiores y exteriores a una figura y, de manera indirecta, de puntos del borde (como aquellos que no son ni interiores ni exteriores). Esta actividad culmina con una definición formal de puntos interiores y exteriores en términos de círculos centrados en ellos. La última actividad de la clase es de sistematización, y en ella los/as estudiantes se basan en los resultados de la actividad previa para construir una definición rigurosa de puntos del borde.

En la **tarea 1**, los/as estudiantes se enfrentan al concepto matemático de “diagonal” denominado con el nombre ficticio de *alina*, el cual se presenta solamente a través de ciertos ejemplos. Se les presentan varias situaciones en las que deben reconocer cuales corresponden a este concepto y cuáles no. A partir de este trabajo inductivo se les pide construir una definición formal de este concepto y luego ponerla a prueba en nuevas situaciones. Esta tarea está motivada por un problema del texto “La enseñanza de la Geometría” (López, O. García, S., 2008).

La **segunda clase** comienza con una actividad de aplicación, en la que los/as estudiantes ponen a prueba, en una variedad de figuras, la definición de borde construida en la clase anterior. Continúa con una actividad de construcción de conocimientos en la que analizan y comparan dos definiciones propuestas de perímetro, obtenidas de recursos para la enseñanza de Educación Básica, y se les propone mejorarlas. La última actividad es de aplicación de conocimientos, en la cual comparan perímetros mediante razonamientos visuales basados en la conservación de la longitud.

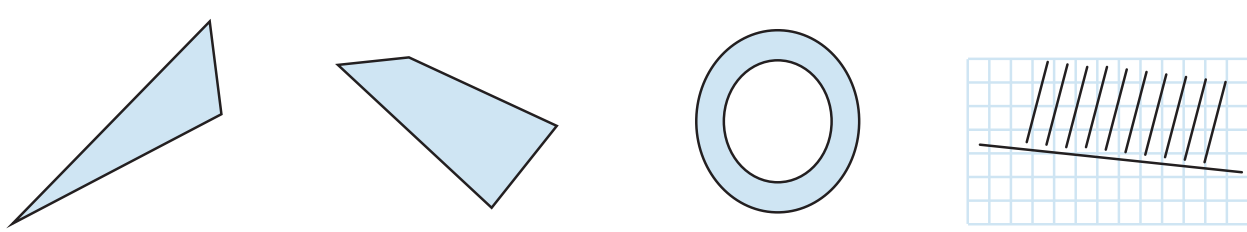
En la **tarea 2**, los estudiantes analizan posibles respuestas al cálculo del perímetro de una figura, reconociendo en ellas el tipo de noción de perímetro al que posiblemente responden. Luego aplican los conocimientos adquiridos de figura plana y borde en el cálculo de perímetros de distintas figuras, incluyendo figuras poco usuales.

La **tercera clase** comienza con tres actividades de construcción de conocimientos, en las cuales se ponen de manifiesto distintos tipos de razonamiento matemático. En la primera se estudia la evolución del perímetro a través de argumentos visuales en una serie de figuras ("escaleras"), y se contrasta con el perímetro de lo que parecería ser la figura límite. Las dos siguientes actividades (2 y 3) tratan de otra secuencia de figuras, denominada el "copo de nieve". En la segunda, se analiza la evolución del número de lados y de la longitud de dichos lados, intentando que los estudiantes elaboren conjeturas de manera inductiva a partir de los primeros casos, y también justificaciones deductivas. La tercera actividad busca que los estudiantes, a partir de los resultados de la actividad previa, deduzcan la evolución del perímetro de la secuencia de figuras, dejando abierta también la posibilidad de la aparición de argumentos inductivos, y así discutir sobre ambos tipos de razonamiento, sus relaciones e importancia. La clase finaliza con una cuarta actividad, de reflexión pedagógica, la que busca que los/as estudiantes reconozcan los distintos tipos de trabajo matemático realizados en la unidad, enfatizando la construcción de definiciones y los diversos tipos de razonamiento utilizados.

3. Profundización de los contenidos

Las definiciones de los diversos conceptos geométricos que hemos desarrollado en la primera clase de esta unidad (esto es, figura plana y borde) fueron construidas para elaborar una definición sólida de perímetro, con el propósito de que los futuros profesores se vieran enfrentados al proceso completo de construcción y prueba de definiciones. Sin embargo, estas no son, de ninguna forma, las únicas posibilidades que se pueden elegir al momento de realizar el trabajo necesario para llegar a construir la noción de perímetro. De hecho, las ideas de figura plana y de borde utilizadas en esta unidad no son apropiadas para ser transmitidas en el aula escolar, debido a su complejidad.

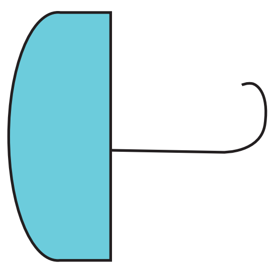
En efecto, es mucho más frecuente encontrar para el nivel escolar definiciones de figura del estilo: "Una figura geométrica plana es cualquier región del plano delimitada por una o más líneas" (sobreentendiendo que el número de dichas líneas es finito, y que ellas son generalmente, pero no necesariamente siempre, cerradas).



Semiplano

Esta definición tiene algunas virtudes, tales como ser fácilmente aplicable a figuras con las que típicamente los estudiantes tratan en la etapa escolar (polígonos, círculos, etc). Además, la noción de borde pasa a ser muy simple para esta clase de figuras: el borde está constituido por la colección de líneas que delimitan la región. Por lo tanto, en apariencia, el borde no necesita ser una preocupación a la hora de tratar con esta colección de figuras, y a la hora de calcular el perímetro, nos podemos remitir directamente a medir el borde, lo que sin duda es conveniente y permite concentrar los esfuerzos del docente sólo en la medición.

Sin embargo, la definición de figura plana descrita tiene también un sinnúmero de debilidades. Por ejemplo, deja fuera algunos subconjuntos del plano que podríamos querer considerarlos figuras, en casos en que ellos modelen matemáticamente objetos de algún problema. Este tipo de subconjuntos podrían ser líneas (modelando muros muy delgados, o riachuelos muy finos) o combinaciones de líneas con figuras en el sentido de esta definición, como la que se muestra a continuación.

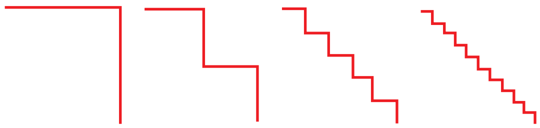


Pero además, hay otros problemas, quizás más serios, que tienen que ver con la estructura misma de la definición. Por ejemplo, ¿qué deberíamos entender por “región”? Pareciera ser que estamos solo empujando el problema de definir figura al de definir región. Y peor aún, ¿qué significa “delimitar”? Si lo pensamos bien, nos damos cuenta de que también hemos empujado la idea de borde hacia el interior de esta definición: si quisiéramos entender la definición de figura, debiéramos tener antes una buena definición de “delimitar” una región, lo que seguramente (luego de haber dado una buena definición de región) debiera conducirnos a un estudio de un concepto similar al de borde. Solamente luego de todo esto, podríamos recién entender nuestra definición de figura.

En cualquier caso, si bien durante el desarrollo de la unidad hemos podido apreciar algunas virtudes de nuestras definiciones, no pretendemos insinuar que carezcan de problemas. De hecho, en nuestra definición de figura hemos tenido que hacer algún compromiso para evitar caer luego en problemas técnicos mayores. Hemos dicho que una figura es una colección de puntos <u>que se puede dibujar</u>. Ya el hablar de dibujar nos saca del mundo de la matemática, a menos que queramos intentar formalizar con conceptos matemáticos estos conjuntos dibujables. Sin embargo, al menos permite catalogar como figura cualquier cosa que veamos dibujada, y como hemos dicho, nos salva de detalles técnicos muy engorrosos que no queremos abordar acá.

Otro punto que es relevante mencionar es que en la unidad no justificamos que el borde que obtenemos de nuestras figuras está constituido por una colección finita de líneas, de modo que podamos después medirles su largo para determinar el perímetro. Más aún, si nos aventurásemos a abrir mucho más la cantidad de subconjuntos del plano que permitimos llamar figura, nos podríamos encontrar muy rápidamente con casos patológicos. A modo de ejemplo, si consideramos el conjunto (<u>no</u> dibujable) de todos los puntos del plano cartesiano cuyas coordenadas son números racionales entre 0 y 1, su borde resulta ser un cuadrado "relleno". La restricción de que las figuras se puedan dibujar nos ayuda a evitar eso, aunque, como hemos dicho, no hemos presentado una justificación de que con esa elección tendremos bordes formados por una colección finita de líneas a las cuales les podemos calcular su longitud.

Es importante mencionar algunos aspectos de la actividad 1 de la clase 3, denominada "La escalera". Hemos visto cómo la secuencia de escaleras siempre mantiene la misma longitud (8 unidades), sin importar cuántos peldaños esta tenga (sólo estamos contando acá la parte correspondiente a los peldaños y no los lados del cuadrado que nunca cambian).

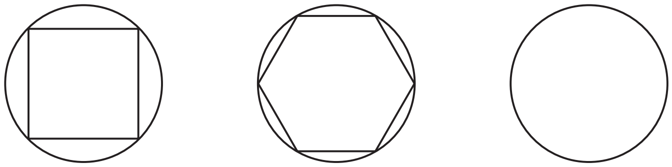


Es natural entonces preguntarse qué está pasando, puesto que cuando el número de peldaños crece mucho, la escalera efectivamente se parece más y más a la diagonal del cuadrado, cuya longitud es considerablemente menor: $4 \cdot \sqrt{2} \simeq 5{,}657$ unidades.

Lo que ocurre es que si bien, en un sentido que se puede hacer muy preciso, la secuencia de escaleras converge a la diagonal cuando el número de peldaños se hace más y más grande, ninguna de las escaleras es la diagonal misma, es siempre una escalera aunque con "dientes" muy pequeños.

Esto es similar a la situación de la secuencia de fracciones $\frac{n-1}{n}$: $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}$, ..., que converge a 1 cuando n se hace más y más grande, sin embargo $\frac{n-1}{n}$ nunca es exactamente 1, es siempre un número estrictamente menor que 1, aunque sea muy cercano a ese valor. Por supuesto, nada garantiza que la convergencia de la secuencia de escaleras a la diagonal traiga como consecuencia que las respectivas longitudes de las escaleras converjan a la de la diagonal. Esta situación es análoga al hecho de que las partes enteras de las fracciones $\frac{n-1}{n}$ son todas 0 y **no** convergen a la parte entera del límite, que es 1.

Es interesante notar que en otros ejemplos de secuencias de líneas convergentes, las longitudes sí podrían converger a la longitud de la línea límite. Este es el caso, por ejemplo, de una secuencia de líneas poligonales regulares de *n* lados inscritas en una circunferencia de radio *r*. A medida que el número de lados crece, las poligonales regulares convergen (en el mismo sentido anterior) a la circunferencia. Por cierto, sin ser ninguna de ellas la circunferencia misma: una circunferencia no contiene ningún segmento de recta.



Pero en este caso, el perímetro de las poligonales inscritas sí converge al perímetro $2\pi r$ de la circunferencia.

4. Referencias bibliográficas

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education, 59 (5), 389-407.

Carrillo, J., Contreras-González, L., Montes, M. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas, enfoques del MKT y del MTSK. Available from: *https://www.researchgate.net/publication/265056008_Conocimiento_del_profesor_de_matematicas_enfoques_del_MKT_y_del_MTSK* [accessed Aug 30 2019].

National Council of Teachers of Mathematics (2014). Developing essential understanding of geometry and measurement for teaching mathematics in grades 3-5. Essential understanding series.

Lakatos, I. (1961 & 1976) Essays in the logic of mathematical discovery, Thesis, & Proofs and refutations, Cambridge University Press.

López, O., García, S. (2008). La enseñanza de la Geometría. Colección: Materiales para apoyar la práctica educativa. Instituto nacional para la evaluación de la educación. México.

Ouvrier-Buffet, C. (2011). A mathematical experience involving defining processes: in-action definitions and zero-definitions. Educational Studies in Mathematics, 76(2), 165-182.

Schoenfeld, A.H., (1983). Problem Solving in the mathematics curriculum: a report, recommendations, and an annotated bibliography. (The Mathematical Association of America. Committee on the Teaching of Undergraduate Mathematics: Washington).

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge growth in Teaching. Educational Researcher, 15(2), 4-14.

Solomon, Y. (2006). Deficit or difference? The role of students' epistemologies of mathematics in their interactions with proof. Educational Studies in Mathematics, 61, 373–393.

Tabach, M., & Nachlieli, T. (2015). Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: the case of function. Educational Studies in Mathematics, 90(2), 163–187.

PLANIFICACIONES

UNIDAD

DEFINICIÓN DE PERÍMETRO Y
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

PLANIFICACIÓN
CLASE 1

UAFI: DEFINICIÓN DE PERÍMETRO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

CLASE 1
Construyendo definiciones

CLASE 2
Definiendo perímetro

CLASE 3
Razonando con el perímetro

TAREA 1
Trabajando con definiciones

TAREA 2
Calculando perímetros

CLASE 1: CONSTRUYENDO DEFINICIONES

DESCRIPCIÓN DE LA CLASE

Meta de la clase	Al finalizar la clase se espera que los futuros profesores[1] hayan vivenciado el proceso de construcción de una definición geométrica de un concepto básico (borde de una figura) apreciando la necesidad de contar con definiciones precisas. Durante la clase comprenderán la necesidad de formalizar ideas intuitivas utilizando conceptos matemáticos conocidos y de evaluar una definición testeándola en distintos casos. También se espera que los estudiantes comprendan el rol del lenguaje matemático como una herramienta para referirse de manera precisa a diversos conceptos.
Descripción de la clase	Para motivar el estudio de las definiciones, esta clase comienza con una actividad en la que los estudiantes se ven enfrentados a reconocer qué líneas se consideran para calcular el perímetro de un grupo de figuras, lo que genera discrepancias respecto de nociones básicas y los hace reconocer la necesidad de contar con definiciones para figura plana y borde. A partir de esto se plantean tres actividades en las cuales los estudiantes trabajarán en torno a la definición de figura plana y a la construcción de la de borde.

[1]Respecto del uso de lenguaje inclusivo: Con el propósito de no provocar una saturación gráfica que dificulte la comprensión de la lectura, en este documento no se considera el uso de "los/las" u "o/a" para hacer referencia a ambos géneros de manera conjunta. En su lugar, se utilizan términos como "el futuro profesor", "el estudiante" y "el profesor" y sus respectivos plurales para aludir de manera inclusiva a hombres y mujeres. Sin embargo, durante la gestión de la clase se sugiere la utilización de lenguaje inclusivo que invite a los y las estudiantes a involucrarse activamente en las actividades.

	La organización de la clase está pensada para que los estudiantes cuestionen sus conocimientos previos, se involucren con esta unidad y den sentido al trabajo que se realizará en ella.
Aprendizajes esperados	Al finalizar la clase se espera que el estudiante: ● Reconozca la necesidad de contar con definiciones de conceptos geométricos. ● Comprenda los alcances de una definición dada poniéndola a prueba. ● Reconozca la complejidad del proceso de definir un concepto. Adopte una definición de figura plana y de borde.
Conocimientos previos	● Nociones de punto, círculo, radio del círculo y plano. ● Nociones básicas de figura plana y de perímetro.
Materiales	Estudiantes ● Hojas de trabajo del estudiante. Profesor ● Computador. ● Proyector.
Tiempo total estimado	90 minutos.

ESQUEMA DE LA CLASE

Tipo de Actividad	Actividades	Tiempo (T) Modalidad (M)
Introducción	**Introducción a la unidad y al modelo de trabajo** Se presenta la unidad y la modalidad de trabajo.	T: 5 min.
Exploración	**Actividad 1: ¿Con qué líneas se calcula el perímetro?** Con esta actividad se busca que los futuros profesores comprendan la necesidad de contar con las definiciones de figura plana y de borde.	T: 25 min. M: Individual y de curso completo.
Aplicación de conocimientos	**Actividad 2: ¿Qué es una figura plana?** Con esta actividad se busca que los futuros profesores se apropien de una definición de figura plana testeándola en distintos casos.	T: 15 min. M: Grupal y de curso completo.
Construcción y profundización	**Actividad 3: El náufrago** Con esta actividad se busca que los futuros profesores formalicen nociones intuitivas de puntos interiores y exteriores de una figura desarrolladas a partir de una analogía y, con ello, de manera indirecta definan los puntos de su borde.	T: 25 min. M: Grupal y de curso completo.
Sistematización	**Actividad 4: Definiendo borde** Con esta actividad se busca que los futuros profesores culminen el proceso de construcción de la definición de borde de una figura plana.	T: 15 min. M: Individual y de curso completo.
Cierre	**Cierre de la clase** El propósito de esta actividad es que los futuros profesores evidencien sus aprendizajes sobre la construcción de definiciones.	T: 5 min. M: De curso completo.

INTRODUCCIÓN A LA UNIDAD

La unidad "Definición de perímetro y resolución de problemas" de perímetro está compuesta por 3 clases en las que estudiaremos definiciones de conceptos geométricos básicos.

Estas clases están diseñadas siguiendo un modelo basado en:

- la resolución de problemas.
- la construcción colaborativa de conocimientos.
- actividades que promueven la reflexión y discusión respecto de los conocimientos matemáticos necesarios para enseñar.

Te invitamos a aprender de tus propios descubrimientos, así como de los de tus compañeros. Para ello, te recomendamos que:

- participes activamente en la solución de los problemas propuestos.
- compartas tus ideas, estrategias y resultados.
- te esfuerces por entender lo que expresan tus compañeros.
- aportes en la construcción colectiva de ideas y conocimientos.

¿Con qué líneas se calcula el perímetro?

Exploración

Tiempo: 25 min.
Modalidad: Individual y de curso completo.
Materiales: Hoja de la Actividad 1

PROPÓSITO

Con esta actividad se busca que los futuros profesores comprendan la necesidad de contar con las definiciones de figura plana y de borde.

Fecha: ____________

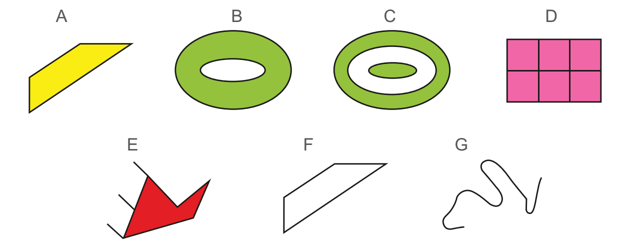
Nombre: ____________

Unidad de Aprendizaje Definición de perímetro y resolución de problemas
Hojas de trabajo - Clase 1

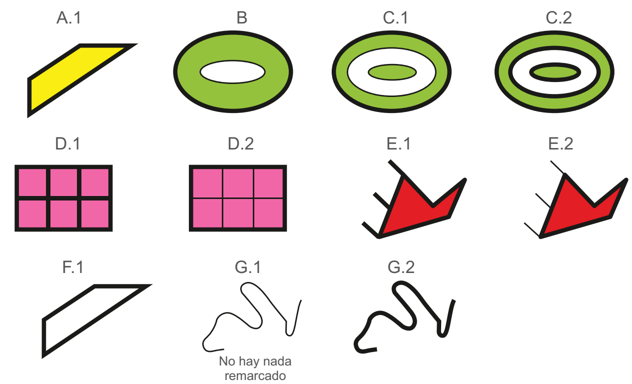
Actividad 1

Trabajo individual

Un formador entrega a sus estudiantes de pedagogía las siguientes figuras:



Luego, les pidió remarcar las líneas que considerarían para calcular su perímetro. A continuación se muestran algunas de sus respuestas:



1. ¿Cuáles de las respuestas consideras correctas y cuáles incorrectas? Justifica.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Es importante que, una vez terminada la encuesta, plantee las preguntas mencionadas en la gestión.

VER MÁS +

Enfatice el hecho de que no hubo acuerdo respecto del significado de los términos “borde” y “figura plana”.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Entregue las hojas de actividades de la clase 1. Advierta que usted les irá indicando qué páginas utilizarán a lo largo de la clase. Informe que es importante que respeten sus indicaciones y no se adelanten.
- Pida que trabajen de forma individual en esta actividad.
- Durante el monitoreo observe el trabajo de los estudiantes sin intervenir y vea si el trabajo de algunos de ellos le da pistas para identificar lo que conciben como figura y borde.
- Puede comentar que no es necesario que redacten las justificaciones, para que no se use mucho tiempo en ello, pero que es importante que tengan sus argumentos claros para el momento de la discusión.

VOLVER

COMPARTIR RESULTADOS (15 min)

Para la puesta en común, puede serle útil considerar las siguientes sugerencias de gestión:

- Puede gestionar este momento a través de una encuesta a mano alzada preguntando: ¿quiénes consideraron correcta las líneas marcadas en la figura A.1…? Sobreentienda que quienes no levantaron su mano es porque la consideraron incorrecta.
- Una vez que termine la encuesta, se sugiere seguir la discusión abordando las preguntas en el orden siguiente:
    - ¿Por qué se podría considerar correcta D.1? ¿Qué características de D hacen que se produzca discrepancia en las respuestas?
    - ¿Por qué se podría considerar correcta C.1?, ¿Qué características de C hacen que se produzca discrepancia en las respuestas?
    - ¿Qué diferencias tienen las figuras F y A? ¿Qué similitudes tienen F y G? Estas diferencias y similitudes ¿se produjeron debido a las líneas que se consideraron?
- En caso de que durante la encuesta no estén surgiendo indicios de que hay distintas concepciones de lo que es figura, puede hacerles preguntas como las siguientes:
    - ¿En C hay solo una figura o hay dos? Plantee preguntas similares para las figuras D y E.
    - ¿Por qué F no está pintada como A?
- Comente que ha observado que al parecer no se han puesto de acuerdo en qué es el borde de una figura, pero sí en que hay que determinarlo.

VOLVER

SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS (5 min)

Se sugiere asociar las respuestas de los estudiantes a las siguientes ideas:

- A excepción de la respuesta A.1, al evaluar si las demás eran correctas, hubo distintas opiniones. El origen de las discrepancias tuvo que ver con la idea de figura plana que cada uno tiene y con lo que se considera como borde.
- Por ejemplo, parece ser que:
  - el estar coloreado o no podría dar alguna indicación de lo que pertenece a la figura y lo que no y sobre las líneas que hay que considerar para el perímetro.
  - el que haya líneas dibujadas sobre la figura puede que indique algo sobre ella.
- El objetivo de esta actividad era justamente hacer notar que en general se tiene poca claridad respecto del significado de dos conceptos básicos: figura plana y borde.
- Explicite que en esta primera actividad no se llega a ningún acuerdo respecto de estos conceptos, es decir, no se definen, ya que eso viene a continuación.
- Señale que al parecer los criterios usados para decidir si eran correctas las líneas marcadas son si ellas constituyen todo lo que consideramos como el borde de la figura. Por lo tanto, pareciera ser que:
  - el concepto de borde es clave para entender el perímetro,
  - no estamos de acuerdo en qué es borde.
- Diga, además, que al parecer no estamos todos de acuerdo en qué es lo que estamos considerando como una figura.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad, comente los puntos que se indican a continuación (puede usar las diapositivas 5 y 6):

- En general, para hacer un trabajo matemático se requiere tener ideas precisas de los objetos y conceptos a los que uno se refiere, es decir, se debe llegar a un acuerdo sobre el significado de los términos que se usarán. A estos acuerdos se les denomina **definiciones**.
- Cuando las definiciones no están claras o no son compartidas, las conclusiones que obtienen distintas personas a partir de ellas pueden ser diferentes.
- En este caso, la discusión nos llevó a darnos cuenta de que el perímetro de una *figura* considera *todas* las líneas que constituyen su *borde*. Por tanto, las ideas de **figura plana** y de **borde** son nociones clave para tratar este concepto. Entonces,
  - es necesario definir qué vamos a considerar como figura plana.
  - tenemos que llegar a una definición de borde.

VOLVER

LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

En la siguiente actividad nos vamos a concentrar en la definición de figura plana.

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Se espera que los estudiantes acepten sin dudar el hecho de que para calcular el perímetro se deben consideran las líneas de una figura. Si no es así, no se detenga a aclarar el significado de perímetro, pues eso se trabajará en la siguiente clase de esta unidad.
- Posiblemente los estudiantes no tengan dudas al considerar correcta la respuesta A.1.
- Es posible que los estudiantes afirmen que E, F y G no son figuras y, por tanto, no tiene sentido hablar de su perímetro. En este caso, puede que estén considerando como figura una región del plano delimitada por una o más líneas.
- Otra respuesta similar, es que solo consideren que G no es figura y pueden estar de acuerdo con G.1. En cambio, para la figura F podrían estar de acuerdo con F.1 pensando que la figura corresponde a la línea dibujada y a "todo lo que ella encierra".
- Debido a preconcepciones similares a las anteriores, en la figura E podrían marcar E.2 ignorando las líneas oblicuas.
- Los estudiantes que estén de acuerdo con D.1 pueden hacerlo argumentando que "son en realidad seis figuras", o bien que "para el perímetro se deben remarcar todas las líneas de la figura".
- Los estudiantes pueden estar de acuerdo con B.1 y C.1 pensando que se marcó "por fuera" de la figura, o bien, que "la figura es todo lo que está dentro del óvalo remarcado".
- En caso de que los estudiantes le soliciten que les aclare qué se entiende por figura y por borde, puede decirles que en este ítem se trata de que surjan y exploren estos conceptos y no de encontrar una "respuesta correcta" para ellos.

VOLVER

¿Qué es una figura plana?
Aplicación de conocimientos

Tiempo: 15 min.
Modalidad: Grupal y de curso completo.
Materiales: Hoja de la Actividad 2.

PROPÓSITO

Con esta actividad se busca que los futuros profesores se apropien de una definición de figura plana testeándola en distintos casos.

Fecha: ______________

Nombre: ______________

Unidad de Aprendizaje Definición de perímetro y resolución de problemas
Hojas de trabajo - Clase 1

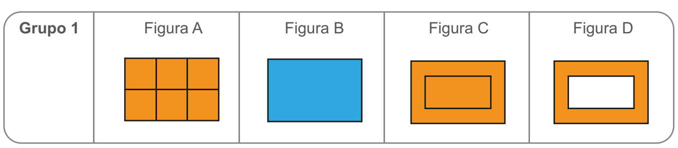
Actividad 2

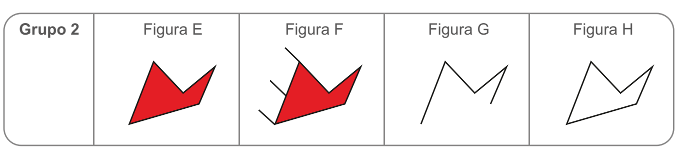
Trabajo grupal

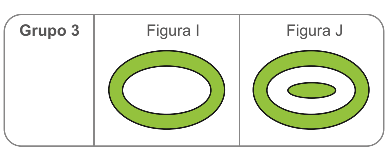
Considera la siguiente definición de figura plana:

> Una **figura plana** es cualquier colección de puntos que se pueda dibujar. Los puntos que son parte de la figura son todos aquellos que están pintados o por los que pasa una línea y los puntos que no son parte de la figura son los que quedan en blanco. Dos figuras planas son iguales si tienen los mismos puntos.

Considera los siguientes grupos de figuras:







1. Para cada uno de los grupos de figuras responde: ¿Cuáles figuras son iguales? ¿Cuáles no lo son? Justifica.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Durante el monitoreo identifique qué estudiantes consideran iguales las figuras A, B y C y cuáles no.

VER MÁS +

Es posible que haya dibujos que no sean considerados como figuras por algunos estudiantes. Revise las anticipaciones.

VER MÁS +

Enfatice que la definición dada caracteriza a las figuras planas como colecciones de puntos que se pueden dibujar.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Organice el curso en grupos de 2 o 3 personas para trabajar en esta actividad. Pídales que pasen a la hoja de la actividad 1 y explique que esta comienza con una definición y léala.
- Durante el monitoreo identifique quiénes consideran iguales las figuras A, B y C y quiénes no.
- Observe las discusiones en los diferentes grupos sin intervenir.

VOLVER

COMPARTIR RESULTADOS (5 min)

Para la puesta en común, puede serle útil considerar las siguientes sugerencias de gestión:

- Para el ítem 1, pregunte a uno de los grupos que haya considerado que las figuras A, B y C son distintas qué parte de la definición de figura plana les sugiere dicha idea.
- Es importante que sea explícito acerca de cómo deben verificar si un dibujo es una figura plana según la definición y cuándo dos figuras son iguales.

VOLVER

SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS (5 min)

Se sugiere asociar las respuestas de los estudiantes a las siguientes ideas:

- A partir de la definición dada, es posible reconocer qué figuras son iguales/distintas en cada grupo:
  - Solo las figuras A, B y C del grupo 1 son iguales.
  - Todas las figuras del grupo 2 son distintas.
  - Las figuras del grupo 3 son distintas.
- Los argumentos para considerarlas iguales deben basarse en la definición; por ejemplo, A, B y C del grupo 1 son la misma figura porque tienen exactamente los mismos puntos. Sin embargo, D es otra figura, porque los puntos del rectángulo interior no pertenecen a D pero sí a A, a B y a C.
- Notemos que a partir de la definición dada pudimos reconocer qué es una figura y cuándo dos de ellas son iguales con la intención de clarificar qué se entenderá por *figura plana* en esta unidad.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad, comente los puntos que se indican a continuación, dado que se establecerá una definición se le sugiere utilizar las diapositivas 10 a 13:

- En esta actividad pusimos a prueba la definición de figura plana considerando para ello una amplia variedad de ejemplos.

- Para efectos de esta unidad, la definición de **figura plana** será la introducida en esta actividad:

  Una **figura plana** es cualquier colección de puntos del plano que se pueda dibujar. Los puntos que son parte de la figura son todos aquellos que están pintados o por los que pasa una línea y los puntos que no son parte de la figura son los que quedan en blanco. Dos figuras planas son **iguales** si tienen los mismos puntos.

- De acuerdo con esta definición, las figuras son "colecciones de puntos". Se conoce una figura si se conocen los puntos que son y los que no son parte de ella. Por lo tanto, dos figuras son iguales cuando tienen exactamente los mismos puntos.

Son figuras **iguales**...

Figura A

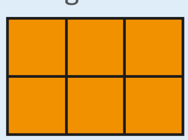
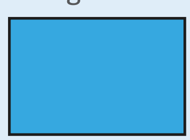


Figura B



Son figuras **distintas**...

Figura E

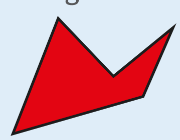
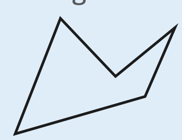


Figura H



- A partir de la definición, si una línea rodea a una figura o está dibujada dentro de ella, los puntos de dicha línea forman parte de la figura. Los colores con los que se pintan las figuras son irrelevantes.

- Esta definición de figura plana incluye las figuras que comúnmente se trabajan en el contexto escolar y otras menos usuales, como combinaciones de líneas y de dichas figuras, por tanto es una definición más amplia que otras posibles.

VOLVER

LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

Ya aclaramos qué consideraremos como figura plana. Ahora debemos aclarar qué significa ser el *borde* de una figura. En la próxima actividad abordaremos algunas ideas intuitivas que nos acercarán a una definición de borde.

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Es posible que los estudiantes respondan que las siguientes figuras son iguales:
  - En el grupo 1: A, B y C; lo que es correcto.
  - En el grupo 2: E y H; lo que es incorrecto. Este error probablemente se debe a que piensen que la región blanca en la figura H es parte de ella.
- Si a los estudiantes les resulta evidente que la figura D en el grupo 1 es distinta del resto, y que las figuras del grupo 3 son distintas, es posible que estén comprendiendo correctamente la definición.
- Aún dada la definición, es probable que los estudiantes no consideren G como una figura plana. Puede hacerles preguntas como las siguientes: ¿está formada por puntos?, ¿se pudo dibujar? haciendo así referencia a los elementos que definen figura.
- Es posible que los estudiantes digan que B es distinta de A y de C porque no es del mismo color. Comente que la definición no hace mención del color, por tanto, no es relevante para considerarlas distintas. Esta misma situación puede surgir cuando a una figura se le trazan líneas encima.
- Si los estudiantes usan el término “congruentes”, acéptelo. Dígales que al realizar la pregunta de si dos figuras son iguales, estas siempre vienen dibujadas en lugares distintos y, en estricto rigor, no son iguales, sino que se convierten en figuras iguales cuando se mueve una y se sobrepone a la otra, lo que corresponde a la idea de congruencia. Mencione esto solamente si los estudiantes usan este término.

VOLVER

El náufrago
Construcción y profundización

Tiempo: 25 min.
Modalidad: Grupal y de curso completo.
Materiales: Hoja de la Actividad 3.
Proyector, conexión a internet y link al recurso interactivo.
Recurso interactivo descargado: Clase 1 - Naufrago.ggb

PROPÓSITO

Con esta actividad se busca que los futuros profesores formalicen nociones intuitivas de puntos interiores y exteriores de una figura desarrolladas a partir de una analogía y, con ello, de manera indirecta definan los puntos de su borde.

Fecha: ______________

Nombre: ______________

Unidad de Aprendizaje Definición de perímetro y resolución de problemas
Hojas de trabajo - Clase 1

Actividad 3

Trabajo grupal

En esta actividad abordaremos algunas ideas intuitivas que nos acercarán a una definición de borde de una figura. Para eso, lean la siguiente historia y respondan las preguntas que están a continuación.

El náufrago

Un náufrago en medio de un gran lago está desesperado por llegar a tierra firme. A pesar de que está muy desorientado, busca una manera que le permita argumentar si es que todavía está en el medio del lago y hace algunas afirmaciones.

1. Señala qué debiera concluir el náufrago en las siguientes afirmaciones:

   Mientras continúe viendo solo agua a mi alrededor, muy cerca, entonces______
   ____.

   Si en algún momento viera a mi alrededor, muy cerca, solo arena, entonces____
   ____.

2. En las frases anteriores, ¿por qué crees que el náufrago dijo “muy cerca”?, ¿da lo mismo que mire cerca o lejos? Explica.

3. Una manera de expresar lo de “ver a su alrededor” es “mirar todo un círculo centrado en el náufrago”. En la siguiente herramienta interactiva considera A1, A2, B1 y B2 como posibles ubicaciones del náufrago. Si se parte con círculos grandes y hacemos variar su radio para hacerlos cada vez más pequeños, ¿cuál es la relación de cada uno de estos círculos con el agua y la arena?

   https://ggbm.at/zpabfffj

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Observe si aparecen los términos “adentro o interior” y “afuera o exterior”.

VER MÁS +

Puede ser necesario que explique el propósito de usar una analogía como la del náufrago. Revise las anticipaciones.

VER MÁS +

Si los estudiantes no pudieron acceder al recurso interactivo, muéstrelo durante la discusión de curso completo.

VER MÁS +

Cierre esta actividad con la definición de borde en términos de puntos interiores y exteriores. Revise el cierre de la actividad.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (10 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Comente que en esta actividad también trabajarán en grupos. Pídales que pasen a la hoja de la actividad 3 y lea el párrafo introductorio.
- Pídales que respondan los ítems 1 y 2 y que cuando se les indique, pasen al ítem 3. Si los estudiantes no pueden utilizar el celular o un computador para el ítem 3, pídale que use el dibujo para hacer círculos y comente que luego proyectará el recurso.
- Durante el monitoreo observe si en las respuestas al ítem 1 aparecen los términos “adentro o interior” y “afuera o exterior”, para la primera y segunda afirmación, respectivamente.

VOLVER

DISCUSIÓN DE CURSO COMPLETO (15 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar la discusión:

- Comience solicitando las respuestas al ítem 1 a quienes hayan usado los términos “adentro o interior” y “afuera o exterior”. Si es necesario, proponga el uso de los términos interior y exterior.
- Pida las respuestas al ítem 2. Si es necesario, puede preguntarles: ¿mirar muy lejos le ayudaría al náufrago a dilucidar si está en agua o en tierra?
- Para el ítem 3, puede comentar que en el recurso interactivo consideraremos que la figura celeste representa el lago, y que el náufrago está representado por un punto. Para iniciar la puesta en común de este ítem, puede afirmar que A1 y A2 son puntos interiores (pensando en un náufrago que mira a su alrededor) y preguntar: ¿cómo se expresa ser un punto interior **usando círculos** en torno a él? Use el recurso interactivo para promover el razonamiento de los estudiantes.
- De manera similar, respecto a los puntos exteriores B_1 y B_2, ¿cómo se expresa ser un punto exterior **usando círculos** en torno a él?

VOLVER

CONCLUSIÓN DE LA DISCUSIÓN (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes ideas al cierre de la discusión:

- En los puntos que son interiores a la figura se puede centrar un círculo pequeño que esté dentro de la figura.
- En los puntos que son exteriores a la figura se puede centrar un círculo pequeño que esté fuera de la figura.
- Si es necesario, puede dibujar una figura cualquiera en la pizarra y representar estas ideas con uno o dos puntos interiores y exteriores.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad, comente los puntos que se indican a continuación (puede usar las diapositivas 18 a 20):

- Un punto del plano se dice **punto interior** a una figura si hay algún círculo, centrado en él, completamente contenido en la figura.
- Un punto del plano se dice **punto exterior** a una figura si hay algún círculo, centrado en él, completamente fuera de la figura.
- Como ya sabemos lo que son los puntos interiores y los exteriores de una figura, podemos usar estos conceptos para dar una primera definición de borde: Un punto del plano estará en el **borde** de una figura si no es ni interior ni exterior a ella.
- Las analogías ayudan a acercarse a una idea abstracta, pero por lo general tienen un rango de validez. En este caso, la idea del náufrago en el lago sirve para entender la idea de interior y exterior, pero deja de ser útil para pensar en el borde, porque identificar el borde de un lago es difuso.

VOLVER

LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

Recordemos que estábamos tratando de aclarar la noción de borde, para la cual ya hemos dado una definición presentada de manera indirecta: son puntos que “no son” interiores ni exteriores. En la actividad siguiente reescribiremos esta definición.

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Los estudiantes podrían no comprender la función de la historia del náufrago en esta actividad. Si es necesario, puede comentarles el propósito de usar esta analogía: construir una idea intuitiva de puntos interiores y exteriores.

- Para el ítem 2, puede ser necesario aclarar que si el náufrago está muy cerca de la orilla, pero todavía en el interior del lago, para ver solamente agua a su alrededor necesita mirar “muy cerca” de él, por lo tanto, la noción de “alrededor cercano” es dependiente de la posición del náufrago en el lago.

VOLVER

Definiendo borde
Sistematización

Tiempo: 15 min.
Modalidad: Individual y de curso completo.
Materiales: Hoja de la Actividad 4.
Conexión a internet o archivo GeoGebra.

PROPÓSITO

Con esta actividad se busca que los futuros profesores culminen el proceso de construcción de la definición de borde de una figura plana.

Fecha: ______________
Nombre: ______________

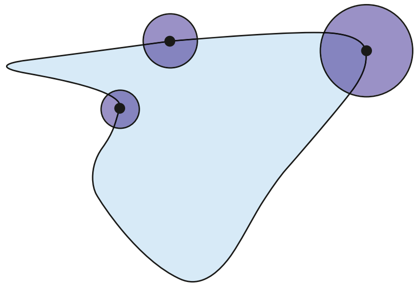
Unidad de Aprendizaje Definición de perímetro y resolución de problemas
Hojas de trabajo - Clase 1

Actividad 4

Trabajo individual
En la actividad anterior concluimos que:

Un punto del plano se dice punto **interior** a una figura si hay algún círculo centrado en él, completamente contenido en la figura.
Un punto del plano se dice punto **exterior** a una figura si hay algún círculo centrado en él, completamente fuera de la figura.
Un punto del plano estará en el **borde** de una figura, si no es ni interior ni exterior a ella.

Piensa en un punto cualquiera en el borde de una figura y en un círculo centrado en él:



1. Basándote en lo que el dibujo sugiere, completa la siguiente definición de borde en términos de círculos:

   Un punto del plano se dice del **borde** de la figura si cualquier círculo centrado en él contiene puntos ______________________ y puntos ______________________
   ______________________.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

El trabajo en el ítem 2 es de carácter lógico, de argumentación. Ver sugerencias.

VER MÁS +

Si los estudiantes se muestran confundidos al dar las explicaciones en el ítem 2, utilice las preguntas sugeridas en esta sección.

VER MÁS +

Enfatice que están participando en un proceso de construcción de una definición formal.

VER MÁS +

Actividad 4

2. Queremos justificar la frase anterior a partir de la definición de borde que construimos en la actividad anterior: Un punto C está en el borde de una figura si no es punto interior ni exterior de ella. Considera un punto C cualquiera en el borde y un círculo centrado en él:

   a) Muestra que este círculo **debe tener** puntos que son de la figura. Para ello, explica por qué si no fuese así, el punto C sería exterior.

   b) Muestra que este círculo también **debe tener** puntos que no son de la figura. Para ello, explica por qué si no fuese así, el punto C sería interior.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Comente que en esta actividad también trabajarán en grupos y pídales que pasen a la hoja de la actividad 4.
- Intervenir en el trabajo grupal durante el monitoreo puede extender demasiado el desarrollo de esta actividad. Por lo tanto, se recomienda que observe qué grupos responden los ítems según lo esperado.
- Para el ítem 3, pueden surgir distintas expresiones de la definición. Acéptelas en esta etapa y espere a que compartan resultados para que se pongan de acuerdo en una frase más formal.
- En caso de que haya estudiantes que solo se apoyan en el dibujo dado en el ítem 1 para responder el ítem 2, pídales que se abstraigan del dibujo, pues este les puede dificultar el razonamiento.

VOLVER

COMPARTIR RESULTADOS (10 min)

Para la puesta en común, puede serle útil considerar las siguientes sugerencias de gestión:

- Puede comenzar este momento proyectando la figura disponible en la diapositiva 23. Marque la intersección entre un círculo y la figura, y entre otro círculo y lo que no es figura. Luego, pregunte cómo completaron la definición.
- Si los estudiantes utilizan la analogía del lago en el ítem 1, comente que identificar el borde de un lago es complejo y que en esta actividad deben abstraerse del contexto y pensar en términos de una figura cualquiera.
- En caso de que en la definición hayan escrito que el círculo contiene puntos “interiores” en vez de puntos “de la figura”, explíqueles la diferencia usando el ejemplo del segmento (diapositiva 25) en el que “en los círculos no hay puntos interiores de la figura, pero sí hay puntos de la figura”. De manera similar, en caso de que también digan que en el círculo hay puntos “exteriores”, indíqueles que se pueden encontrar ejemplos análogos.
- Si los estudiantes se muestran confundidos al dar las explicaciones en el ítem 2, puede preguntarles en el caso a): si el círculo centrado en C no tiene ningún punto de la figura, entonces, ¿dónde tiene todos sus puntos?; para el caso b): si el círculo centrado en C no tiene ningún punto fuera de la figura, entonces, ¿dónde tiene todos sus puntos?

VOLVER

SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS (5 min)

Se sugiere asociar las respuestas de los estudiantes a las siguientes ideas:

- Un punto del plano se dice del **borde** de la figura si cualquier círculo centrado en él contiene “puntos de la figura y puntos que no son de la figura”.
- Se justificó que esta expresión equivale a la que se había propuesto en la actividad anterior, esto es “un punto del plano es del borde de la figura si no es interior ni exterior a ella”.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad, comente los puntos que se indican a continuación (puede usar las diapositivas 26 y 27):

- En esta actividad logramos dar una **definición de puntos del borde** de una figura en términos de círculos construidos en torno a ellos. Esto fue posible porque el borde había quedado definido utilizando las nociones del interior y exterior de la figura, y teníamos definiciones de esos conceptos en función de círculos.
- El trabajo de construcción de la noción de borde concluyó con una definición formal. Para llegar a esta, desarrollamos esta clase comenzando con ideas intuitivas sobre perímetro y reconociendo que al hablar de perímetro se requiere hacer referencia al borde de una figura, de lo que surgió la necesidad de obtener su definición a partir de las características que este debería cumplir. Algo análogo se realizó en las primeras actividades de la clase con la noción de figura.
- En matemática, cuando queremos resolver nuevos problemas, nos encontramos con nociones con las que es necesario trabajar y es importante que precisemos claramente qué significarán, de manera tal que estas ayuden a resolver el problema y que todos comprendan lo mismo respecto a ellas. Precisar esta nociones es construir sus definiciones.
- Para comprender una definición y decidir si satisface las expectativas que tuvimos al construirla es necesario ponerla a prueba en una variedad de situaciones, como se hizo con la definición de figura plana al utilizarla para distinguir cuándo dos figuras son iguales en una colección de varias figuras. Pondremos a prueba la definición de borde en la siguiente clase.

VOLVER

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Es posible que a los estudiantes les cueste comprender la idea general de que todos los círculos centrados en puntos del borde contienen puntos que son parte de la figura y otros que no lo son. Si considera necesario, puede proyectar el siguiente recurso interactivo para ayudarlos a visualizar dicha idea: https://ggbm.at/wwzvxuks.

- Es posible que en el ítem 2 algún estudiante afirme que "es obvio que el círculo que está en el dibujo tiene puntos de la figura" y no vea la necesidad de justificarlo. Puede comentarles que lo que se pide no es que describan lo que ellos observan en el dibujo, sino que justificar en función de la definición de borde dada en la actividad anterior (es decir, un punto que no es interior ni exterior).

- Es posible que para algunos estudiantes sea demasiado obvio que si "ningún punto del círculo está en la figura, entonces todos están fuera de la figura" y, por tanto, se confundan y no sean capaces de dar la respuesta. Comente en este caso que esto puede resultar obvio para algunos.

VOLVER

Cierre de la clase
Gestión sugerida

Tiempo: 5 min

1º - Para el cierre de la clase se sugiere proyectar las diapositivas 30 y 31 y comentar las siguientes ideas:

- En la Educación Básica y Media no se aborda una definición formal de borde. Este concepto se trabaja más bien mediante el uso de ejemplos variados. Que nosotros como futuros profesores tengamos claro qué constituye el borde de una figura nos permite ser precisos y afrontar con confianza la enseñanza de perímetro de figuras.

- Durante esta clase experimentamos inseguridad acerca de nuestros conocimientos respecto a conceptos básicos. Esto nos acerca a las vivencias que pueden tener los niños al abordar tareas matemáticas que desafían sus preconcepciones o que incluyen nuevos conceptos.

- Esta inseguridad fue clave en el desarrollo de la clase. Si hubiésemos estado todos de acuerdo, difícilmente podríamos haber trabajado arduamente en la búsqueda y evaluación de las definiciones, y valorado su importancia para el trabajo matemático.

- Para las definiciones que normalmente se abordan en la Educación Básica, debería seguirse un proceso de construcción similar al realizado en esta clase. Se debe problematizar para hacer surgir la necesidad de definir, y partir de un significado intuitivo del concepto que se desea formalizar. También hay que utilizar ideas matemáticas conocidas para los niños en la construcción de la definición, y delimitarla mediante el uso de variados ejemplos. Es un proceso largo y, por lo tanto, probablemente, no se pueden desarrollar todas sus partes para todos sus conceptos.

- El uso de un lenguaje matemático correcto y preciso es clave para el proceso de definir un concepto. Más aún, este proceso nos ayuda a valorar y ampliar nuestro lenguaje matemático.

2º Entregue la ficha de sistematización y proponga a los alumnos usarla después de la clase para evaluar y repasar sus aprendizajes. Invítelos a que respondan las preguntas que ahí aparecen, a que revisen las ideas del Recapitulemos y si lo requieren a que consulten la bibliografía sugerida para profundizar.

3º Entregue la hoja de la tarea 1 y explíquela brevemente.

RESPUESTAS EXPERTAS

Actividad	Respuesta experta
Actividad 1 ¿Con qué líneas se calcula el perímetro?	**1.** La respuesta ideal de un estudiante sería considerar correctas solamente las figuras A.1, C.2, D.2, E.1, F.1 y G.2. Sin embargo, con esta actividad se espera que aparezcan respuestas diferentes para dar pie a la necesidad de definir figura plana y borde.
Actividad 2 ¿Qué es figura plana?	**1.** Las figuras A, B y C del grupo 1 son iguales entre sí, porque tienen los mismos puntos pintados o con líneas sobre ellos, y la D no, porque algunos de los puntos de las otras figuras aparecen en blanco.
	2. Todas las figuras del grupo 2 son distintas entre sí, porque ningún par de ellas tienen pintados o con líneas exactamente los mismos puntos.
	3. Las figuras del grupo 3 son distintas, por la misma razón anterior.
Actividad 3 En náufrago	**1.** La redacción de las respuestas puede variar: ● Mientras continúe **viendo solo agua** a mi alrededor, muy cerca, entonces aún estoy en el agua. ● Si en algún momento viera a mi alrededor, muy cerca, **solo arena**, entonces ya salí del lago y estoy sobre tierra firme.
	2. La redacción de las respuestas puede variar: Si el náufrago está en el agua y mira suficientemente lejos verá tierra, por lo tanto, mirar lejos no lo ayuda a saber si está o no en el agua. Debe mirar cerca.
	3. ● Los puntos A_1 y A_2 son tales que hay círculos de radios suficientemente pequeños en torno a ellos, que están completamente contenidos en el agua. ● Los puntos B_1 y B_2 son tales que hay círculos de radios suficientemente pequeños en torno a ellos, que están completamente contenidos en la arena.
Actividad 4 Definiendo borde	**1.** Un punto del plano se dice del **borde** de la figura si cualquier círculo centrado en él contiene puntos de la figura y puntos que no son de la figura.
	2. a. Si no fuese así, es decir, si no tiene ningún punto que **sea** de la figura, entonces todos sus puntos **no son** de la figura, y por lo tanto el punto C tiene un círculo a su alrededor compuesto exclusivamente por puntos que no son de la figura. Luego, por definición, el punto C sería **exterior.** b. Si no fuese así, es decir, si no tiene ningún punto que **no sea** de la figura, entonces todos sus puntos **son** de la figura, y por lo tanto el punto C tiene un círculo a su alrededor compuesto exclusivamente por puntos de la figura. Luego, por definición, el punto C sería **interior**.

PLANIFICACIÓN
CLASE 2

UAFI: DEFINICIÓN DE PERÍMETRO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

CLASE 1
Construyendo definiciones

CLASE 2
Definiendo perímetro

CLASE 3
Razonando con el perímetro

TAREA 1
Trabajando con definiciones

TAREA 2
Calculando perímetros

CLASE 2: DEFINIENDO PERÍMETRO
DESCRIPCIÓN DE LA CLASE

Meta de la clase	Al finalizar la clase se espera que los futuros profesores[1] definan perímetro como la medida del borde de una figura y usen argumentos visuales para justificar comparaciones entre perímetros.
Descripción de la clase	Para recuperar algunos aspectos del trabajo matemático desarrollado en la clase anterior, en esta se comienza con una actividad en la que se testea, en una variedad de figuras, la definición de borde. En la segunda actividad, a través del estudio del perímetro el estudiante tendrá que analizar críticamente distintas definiciones de este concepto, reconociendo la importancia de usar términos precisos y bien definidos. En la tercera actividad se resuelve un problema de perímetro en el que una figura se modifica mediante cortes considerando la propiedad de conservación de la longitud.

[1]Respecto del uso de lenguaje inclusivo: Con el propósito de no provocar una saturación gráfica que dificulte la comprensión de la lectura, en este documento no se considera el uso de "los/las" u "o/a" para hacer referencia a ambos géneros de manera conjunta. En su lugar, se utilizan términos como "el futuro profesor", "el estudiante" y "el profesor" y sus respectivos plurales para aludir de manera inclusiva a hombres y mujeres. Sin embargo, durante la gestión de la clase se sugiere la utilización de lenguaje inclusivo que invite a los y las estudiantes a involucrarse activamente en las actividades.

Aprendizajes esperados	Al finalizar la clase se espera que el estudiante: • Ponga a prueba una definición de borde en una variedad de figuras. • Evalúe definiciones de perímetro. • Defina perímetro. • Establezca relaciones entre los perímetros de figuras usando propiedades de la longitud.
Conocimientos previos	• Nociones básicas de perímetro. • Propiedades de conservación de la longitud.
Materiales	Estudiantes • Hojas de trabajo del estudiante. Profesor • Computador. • Proyector.
Tiempo total estimado	85 minutos.

ESQUEMA DE LA CLASE

Tipo de Actividad	Actividades	Tiempo (T) Modalidad (M)
Aplicación de conocimientos	**Actividad 1: Remarcando el borde** Con esta actividad se busca que los futuros profesores testeen la definición de borde, construida la clase anterior, en una amplia variedad de figuras.	T: 20 min. M: Individual y de curso completo.
Construcción de conocimientos	**Actividad 2: Analizando definiciones de perímetro** Con esta actividad se busca que los futuros profesores evalúen definiciones de perímetro en una variedad de figuras de acuerdo con la claridad y precisión con la que están formuladas y con cuán amplia es la variedad de figuras a las cuales son aplicables.	T: 30 min. M: Grupal y de curso completo.
Aplicación de conocimientos	**Actividad 3: Comparando perímetros** Con esta actividad se busca que los futuros profesores comparen los perímetros de ciertas figuras y justifiquen los resultados mediante razonamientos visuales.	T: 25 min. M: Grupal y de curso completo.
Cierre	**Cierre de la clase** El propósito de esta actividad es que los futuros profesores evidencien sus aprendizajes sobre la definición de perímetro.	T: 10 min. M: curso completo.

Remarcando el borde
Aplicación

Tiempo: 20 min.
Modalidad: Individual y de curso completo.
Materiales: Hoja de la Actividad 1.

PROPÓSITO

Con esta actividad se busca que los futuros profesores testeen la definición de borde, construida la clase anterior, en una amplia variedad de figuras.

Fecha: ____________
Nombre: ____________

Unidad de Aprendizaje Definición de perímetro y resolución de problemas
Hojas de trabajo - Clase 2

Actividad 1

Trabajo individual

En la clase anterior nos pusimos de acuerdo en la siguiente definición:

> Un punto del plano se dice del **borde** de la figura si cualquier círculo centrado en él contiene puntos de la figura y puntos que no son de la figura.

Teniendo la definición anterior en mente, remarca el borde de las siguientes figuras:

Figura A

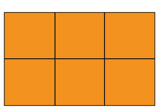


Figura B

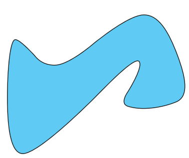


Figura C

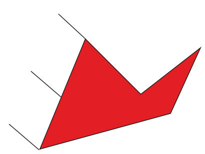


Figura D

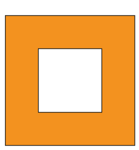


Figura E

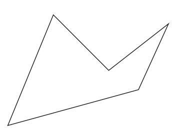
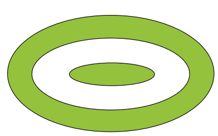


Figura F



Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Recuerde la definición de borde construida previamente a los estudiantes que manifiesten dudas.

VER MÁS +

Revise las anticipaciones relativas a la figura E.

VER MÁS +

Después de proyectar las respuestas correctas, pregunte si alguien tiene otras distintas.

VER MÁS +

Explique por qué es necesario usar figuras poco usuales para poner a prueba una definición.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Entregue las hojas de actividades de la Clase 2. Advierta que usted les irá indicando qué páginas utilizarán a lo largo de la clase . Informe que es importante que respeten sus indicaciones y que no se adelanten.
- Señale que en esta actividad trabajarán individualmente.
- Observe sin intervenir el trabajo individual de los estudiantes.
- Esté atento a si hay muchos estudiantes que tienen dudas sobre las figuras C y D. Si es así, puede recordarles el significado de borde y de figura al compartir los resultados.

VOLVER

COMPARTIR RESULTADOS (5 min)

Para la puesta en común, puede serle útil considerar las siguientes sugerencias de gestión:

- Dado que esta es una actividad de aplicación de conocimientos de la clase anterior, se sugiere que proyecte las respuestas correctas (diapositiva 4). Pregunte si algún estudiante tiene una respuesta distinta. En dicho caso, puede pedirle a un estudiante que haya marcado correctamente el borde que explique cómo lo hizo. Luego, puede consultar al estudiante que dio la respuesta incorrecta si aclaró su discrepancia.
- Si las dudas persisten con las figuras C y E, use las preguntas de la sección Anticipaciones y sugerencias.

VOLVER

SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS (5 min)

La síntesis se dará en el cierre de esta actividad.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad, comente los puntos que se indican a continuación (puede usar la diapositiva 5):

En esta actividad dibujamos el borde de una variedad de figuras con el objetivo de utilizar su definición para:

- apropiarse de ella.
- ponerla a prueba en figuras menos usuales, que es lo que siempre se debe hacer con una definición, esto es, ver cómo se comporta en una variedad de casos.

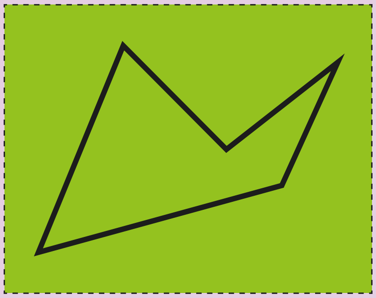
VOLVER

LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

En la siguiente actividad aprovecharemos lo que hemos aprendido sobre borde para comparar dos definiciones de perímetro comúnmente encontradas en la literatura matemática.

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Los estudiantes no deberían tener mayores problemas con las figuras A, B, D y F.
- En caso de que surjan dudas con la figura E, por ejemplo, que haya estudiantes que no marquen nada, asegúrese primero de que el estudiante está de acuerdo en que E es una figura y que entiende cuál es (solo la línea y no lo que ella encierra). Si hay estudiantes que aún tienen dudas, puede preguntar qué pasa si se marca un punto en la figura E y se hacen círculos centrados en él, y que respondan si estos círculos tienen puntos que son de la figura y puntos que no son de ella.
- En la figura E el término puntos exteriores puede causar confusión, puesto que en ella son puntos exteriores los que quedan fuera de la línea y también los encerrados por ella, lo que está pintado de color verde en el siguiente dibujo:



  Si dicha confusión ocurre, se sugiere considerar un punto de la región encerrada por la línea y dibujar círculos centrados en él para convencerse de que son puntos exteriores. Conviene recalcar en todo momento que la figura es solo la línea.
- Con argumentos similares se puede aclarar dudas y corregir errores acerca de la figura C en caso de que algún estudiante remarque algo distinto.

VOLVER

Analizando definiciones de perímetro

Construcción de conocimientos

Tiempo: 30 min.
Modalidad: Grupal y de curso completo.
Materiales: Hoja de la Actividad 2.

PROPÓSITO

Con esta actividad se busca que los futuros profesores evalúen definiciones de perímetro en una variedad de figuras de acuerdo con la claridad y precisión con la que están formuladas y con cuán amplia es la variedad de figuras a las cuales son aplicables.

Fecha: ____________

Nombre: ____________

Unidad de Aprendizaje Definición de perímetro y resolución de problemas
Hojas de trabajo - Clase 2

Actividad 2

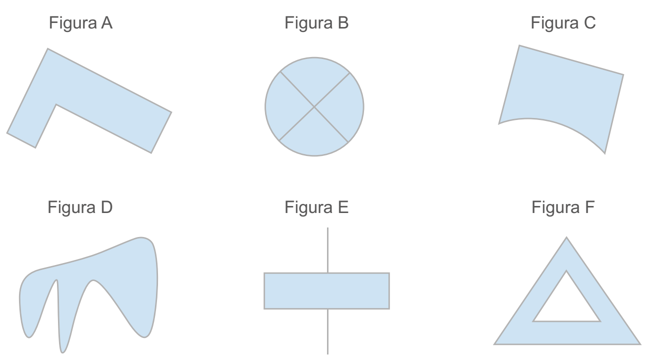
Trabajo grupal

Considera las siguientes dos definiciones de perímetro dadas en textos escolares:

Definición 1
El perímetro de una figura es la suma de sus lados.

Definición 2
El perímetro de una figura es la longitud total de su frontera o contorno.

A continuación las pondremos a prueba considerando el siguiente grupo de figuras.



1. Marca las líneas que de acuerdo con cada definición habría que considerar para calcular el perímetro.
2. ¿Cuál de las definiciones encontradas permite calcular el perímetro a una mayor variedad de figuras? ¿Por qué?

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Observe si los estudiantes tienen dificultades respecto a los términos “lado”, “frontera” y “contorno”.

VER MÁS +

Apóyese en la definición del término “borde” para resolver dudas respecto de los términos “frontera” y “contorno”.

VER MÁS +

Revise las anticipaciones respecto al término “lados” para resolver posibles dudas de los estudiantes.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (10 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

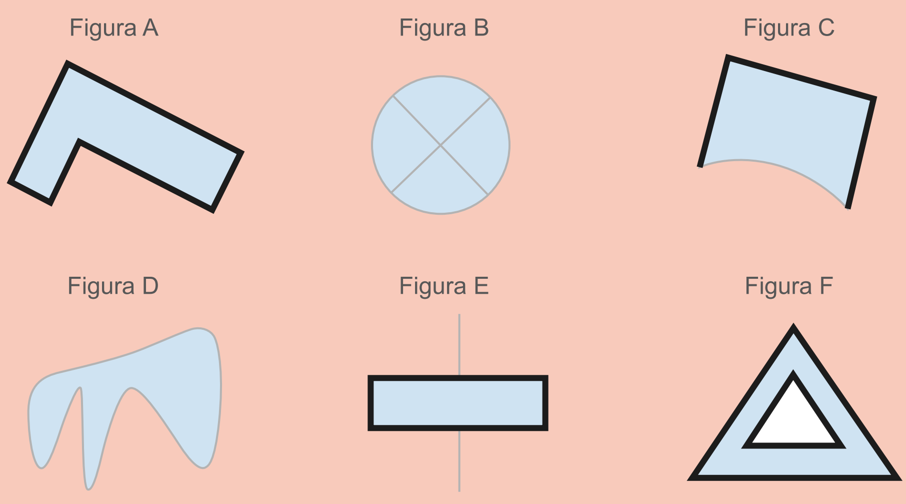
- Organice el curso en grupos de 2 o 3 personas para trabajar en esta actividad y la siguiente.
- Observe el trabajo de los estudiantes, en lo posible, sin intervenir. Si es necesario, puede indicarles que remarquen con distinto color las líneas que considerarían para calcular el perímetro de acuerdo con cada definición.
- Identifique si algún grupo tiene dificultades para poner a prueba las definiciones y si se presentan dudas respecto de los términos “frontera, “contorno” o “lados”.

VOLVER

COMPARTIR RESULTADOS (15 min)

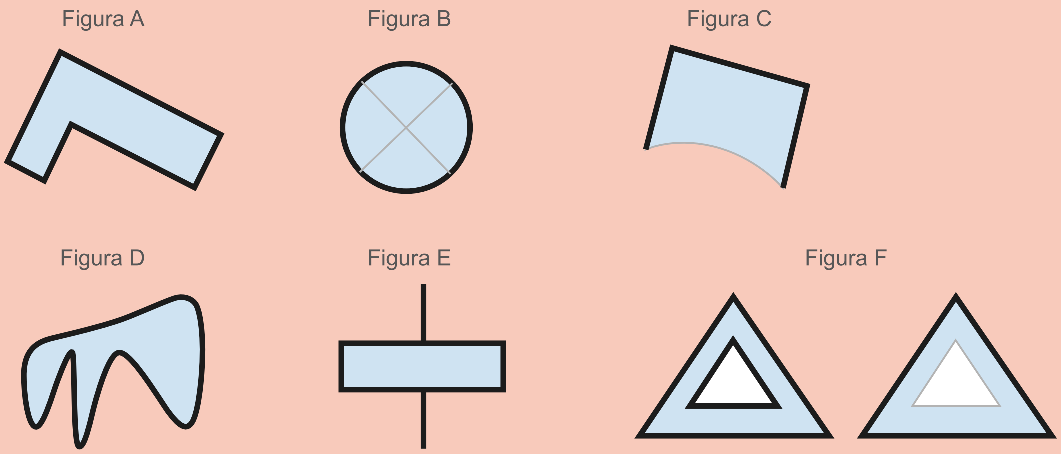
Para la puesta en común, puede serle útil considerar las siguientes sugerencias de gestión:

- Indique que partirán con la Definición 1. Para comenzar la puesta en común, muestre las figuras en las que se han remarcado las líneas que se utilizarían para calcular el perímetro usando la Definición 1 (diapositiva 10).



- Luego, pregunte:
    - En el caso de la figura C, ¿considerarías solamente esas líneas para calcular el perímetro?
    - De manera similar, para las figuras B y D pregunte: ¿estas figuras no tienen perímetro?
    - Para la figura E pregunte: ¿en esta figura nos olvidamos de las líneas verticales?
    - ¿La Definición 1 está considerando todas las líneas necesarias en estas figuras?

- Pregúnteles si les parece que la Definición 1 permite calcular el perímetro de muchos tipos de figuras. Se espera que respondan que no. Luego consúlteles qué elemento presente en la definición restringe la cantidad de figuras a las cuales es aplicable.
- Durante la gestión de esta actividad enfatice el uso apropiado del lenguaje matemático, especialmente aquellos términos definidos durante esta unidad.
- Para poner en común lo correspondiente a la Definición 2, muestre la diapositiva 11 indicándoles que se habían anticipado dos respuestas para la figura F:



- Pregúnteles qué parte de la definición podría habernos hecho pensar que existen dos posibles respuestas para la figura F. Una vez que ellos mencionen que es la aparición de los dos términos similares “frontera” o “contorno”, puede consultarles: ¿son lo mismo? Si fueran iguales, ¿por qué se escribieron los dos? Si no son lo mismo, ¿qué son, en qué se diferencian y cuál se elige?
- Luego, pregunte: ¿de qué manera podríamos modificar esta definición para eliminar la ambigüedad producida? Se espera que digan que en vez de “frontera” o “contorno” se diga “borde”. En caso de que prefieran usar el término “frontera”, por ejemplo, puede preguntarles si ese término está definido, con el fin de que se den cuenta de que basta usar el término borde, que sí está definido.

VOLVER

SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS (5 min)

Se sugiere asociar las respuestas de los estudiantes a las siguientes ideas:

- En la Definición 1 el término "lados" hace que esta no sea aplicable a figuras cuyo borde no esté constituido únicamente por "lados", como las figuras B, C, D y E.
- La Definición 2 es aplicable a una mayor cantidad de figuras, ya que se refiere directamente al borde.
- Sin embargo, la Definición 2 contiene los términos "frontera" y "contorno", lo que lleva a confusión. Este inconveniente se soluciona poniéndose de acuerdo en que se considerarán iguales (ambas refiriéndose al borde) y, además, para evitar confusiones, usando solo uno de estos términos o, mejor aún, utilizando "borde".

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

- En la literatura matemática es común encontrar definiciones distintas para un mismo concepto. Esto, frecuentemente, ocurre cuando diversos autores tienen propósitos diferentes al abordar un mismo tema. Es conveniente ser cuidadoso al momento de recoger definiciones de varias fuentes y chequear que las que se elijan respondan a las necesidades del trabajo que se desea realizar. Además, hay que ser crítico, puesto que en ocasiones podrían presentar ambigüedades o errores.

- En esta actividad se consideraron los puntos previos y elegimos para efectos de esta unidad la siguiente definición de perímetro: *El perímetro de una figura es la longitud total de su borde*.

- La Definición 1 no fue elegida, puesto que si bien es común encontrarla en textos escolares, tiene un rango de aplicación bastante restringido: por ejemplo, no nos permite calcular el perímetro de un círculo. Por el contrario, la definición escogida es aplicable a muchísimas figuras, en particular, a todas las que se usan comúnmente en la enseñanza escolar.

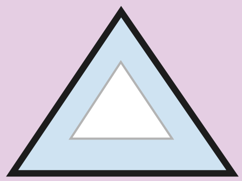
VOLVER

LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

En la siguiente actividad vamos a analizar si al modificar una figura varía el perímetro.

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Puede haber estudiantes que al usar la Definición 1 en E no sepan si considerar las líneas sobresalientes como "lados". Comente que de la misma manera como se hizo con figura plana y borde, comprender el término "lados" requiere precisar su significado, es decir, construir su definición. Usando la Definición 2 no ocurre este problema.
- Es posible que haya estudiantes que diferencien el término "contorno" de "frontera", o bien que haya algunos estudiantes que no consideren como "lados" los del triángulo interior en la figura F. Así, por ejemplo, marcarían lo siguiente para calcular el perímetro:



VOLVER

Comparando perímetros

Aplicación de conocimientos

Tiempo: 25 min.
Modalidad: Grupal y de curso completo.
Materiales: Hojas de la actividad 3.

PROPÓSITO

Con esta actividad se busca que los futuros profesores comparen los perímetros de ciertas figuras y justifiquen los resultados mediante razonamientos visuales.

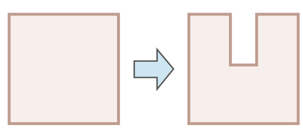
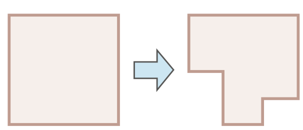
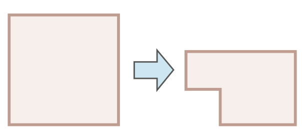
Fecha: ____________
Nombre: ____________

Unidad de Aprendizaje Definición de perímetro y resolución de problemas
Hojas de trabajo - Clase 2

Actividad 3

Trabajo grupal

Las siguientes secuencias de figuras comienzan con un cuadrado al que se le hicieron distintos cortes y se obtuvieron nuevas figuras, como se muestra en las siguientes imágenes:

Secuencia A	
Secuencia B	
Secuencia C	

Considera que todos los ángulos en las figuras son rectos. Sin medir los lados de las figuras, responde la siguiente pregunta:

¿Cuál es la relación entre el perímetro del cuadrado inicial y el de las figuras obtenidas en cada una de las secuencias? ¿Por qué?

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Identifique qué términos usan los estudiantes para referirse a las transformaciones del cuadrado.

VER MÁS +

Invite a los estudiantes a reflexionar sobre las posibles consecuencias de sus afirmaciones. Ver compartir resultados.

VER MÁS +

Fomente la discusión entre estudiantes que plantean conclusiones incompatibles.

VER MÁS +

Enfatice las justificaciones de los casos en los que el perímetro se mantiene, aumenta o disminuye.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (10 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Pida a los estudiantes que pasen a la hoja de la actividad 3 y que continúen trabajando en los grupos definidos en la actividad anterior.
- Ponga atención a si hay estudiantes a quienes les cueste reconocer las relaciones entre los perímetros de las figuras. En este caso, puede sugerirles recortar las figuras y comparar sus perímetros superponiéndolas.
- Durante el monitoreo observe si los estudiantes usan términos como traslación o movimiento de segmentos.

VOLVER

COMPARTIR RESULTADOS (10 min)

Para la puesta en común, puede serle útil considerar las siguientes sugerencias de gestión:

- Indique que comenzarán compartiendo las relaciones sobre los perímetros de la secuencia A. Pida a uno de los grupos que comparta su respuesta y pregunte: ¿qué hicieron para comparar los perímetros?
- Si lo estima necesario, pídales que marquen en la figura obtenida los segmentos que se agregaron al cuadrado y que se consideran en el perímetro de esta nueva figura.
- De manera similar, pida a distintos grupos que compartan sus respuestas respecto de las secuencias B y C.
- Si hay estudiantes que argumentan que:
  - al aumentar la cantidad de recortes que se hicieron al cuadrado, se incrementa el perímetro de la figura obtenida, puede plantear la siguiente situación: *En la secuencia A se extrajo solo un pedazo del cuadrado y el perímetro aumentó; entonces, ahora que en la secuencia B se sacan dos pedazos, significa que el perímetro en B se incrementa aún más?*
  - el perímetro aumenta porque aumenta la cantidad de lados de las figura, se les puede hacer preguntas como las siguientes:
    - En la secuencia B aumentó aún más que en A la cantidad de lados de la figura. ¿Creció más el perímetro, entonces?
    - Al aumentar la cantidad de lados, ¿se mantuvo el largo de los lados iniciales?
    - ¿Podrías subdividir los lados del cuadrado inicial para comparar mejor su perímetro con el de la figura obtenida?

VOLVER

SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS (5 min)

Se sugiere asociar las respuestas de los estudiantes a las siguientes ideas:

- En esta actividad se hicieron distintas modificaciones a una figura (cortes). Para relacionar el perímetro de ambas figuras, visualizamos que algunos de sus lados o partes de ellos se trasladaban, o se agregaban o se eliminaban segmentos.

- El visualizar las modificaciones de este modo nos permitió reconocer cómo varió el perímetro.

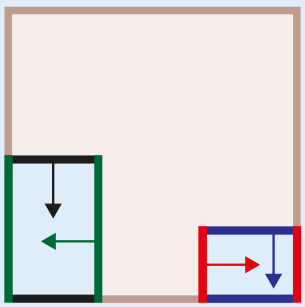
- Pudimos justificar que el perímetro de la nueva figura, respecto de la original:
  - **Se mantenía** cuando para formar la nueva figura, solamente se trasladaban los lados de la figura inicial, o partes de ellos.
  - **Aumentaba** cuando para formar la nueva figura, además de trasladar, se requería agregar segmentos a la figura inicial.
  - **Disminuía** cuando para formar la nueva figura, además de trasladar, se requería eliminar segmentos.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad, comente los puntos que se indican a continuación (puede usar las diapositivas 17 y 18):

- En esta actividad nos vimos enfrentados a comparar los perímetros de dos figuras sin conocer sus medidas. Una de las maneras de lograr esto fue visualizar que determinadas partes del borde de una de las figuras se trasladaban para formar la otra. Este tipo de razonamiento es útil y válido en cierto tipo de situaciones y se conoce como *argumento visual*.

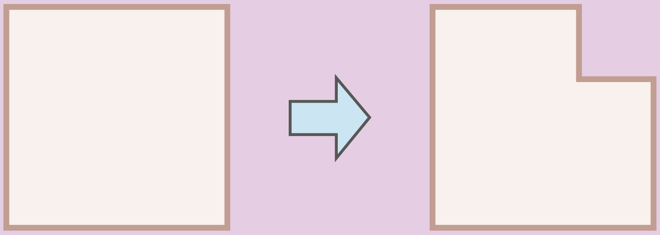


- Esta forma de comparar se sustenta en la propiedad de *conservación de la longitud*, la cual establece que al mover un segmento sin deformarlo, su longitud se conserva.

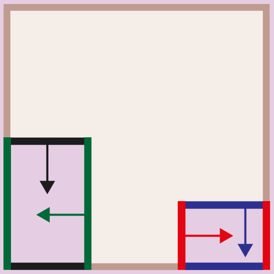
VOLVER

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Es posible que haya estudiantes que asignen medidas arbitrarias a los lados del cuadrado, que calculen los perímetros de las figuras obtenidas (estableciendo algunos supuestos) y que fundamenten a partir de los datos encontrados. En este caso puede preguntar: ¿cambiarán dichos resultados si las medidas son otras? ¿Por qué?
- Se espera que los estudiantes den argumentos visuales como los siguientes: un segmento se mueve, se agrega o se acorta.
- Es probable que haya estudiantes que identifiquen correctamente las relaciones entre los perímetros en las secuencias argumentando que es fácil visualizar que el perímetro aumenta cuando se agregan segmentos, se mantiene cuando se trasladan segmentos (sin modificar su longitud) y disminuye cuando se acortan los lados del cuadrado inicial.
- Algunas posibles afirmaciones basadas en razonamientos incorrectos pueden ser las siguientes:
    - No se puede establecer una relación porque falta información, como las dimensiones del cuadrado y las de los cortes.
    - En todos los casos los perímetros son menores porque al quitar un pedazo de la figura, su perímetro disminuye.
    - El perímetro aumenta porque aumenta la cantidad de lados de las figuras.
- Si en la secuencia B algún estudiante tiene dificultades para identificar la relación, puede pedirle que analice la siguiente secuencia:



- Es admisible que algunos estudiantes usen dibujos para mostrar sus respuestas, no pudiendo quizás verbalizar lo que ocurre. Por ejemplo, en la secuencia B podrían mostrar lo siguiente:



VOLVER

Cierre de la clase
Gestión sugerida

Tiempo: 10 min.

1º Para el cierre de la clase, se sugiere proyectar la diapositiva 20 y comentar las siguientes ideas:

- Las actividades realizadas en estas dos clases apuntan a trabajar con definiciones formales muy generales, que típicamente adquieren sentido cuando se consideran figuras que van más allá de las que se suelen trabajar en la matemática escolar. Profundizar conceptos básicos de esta manera es importante para un futuro profesor, pues le dan dominio y confianza al abordar los contenidos escolares. Sin embargo, es importante tener en claro que actividades de este tipo no corresponden a los niveles escolares.

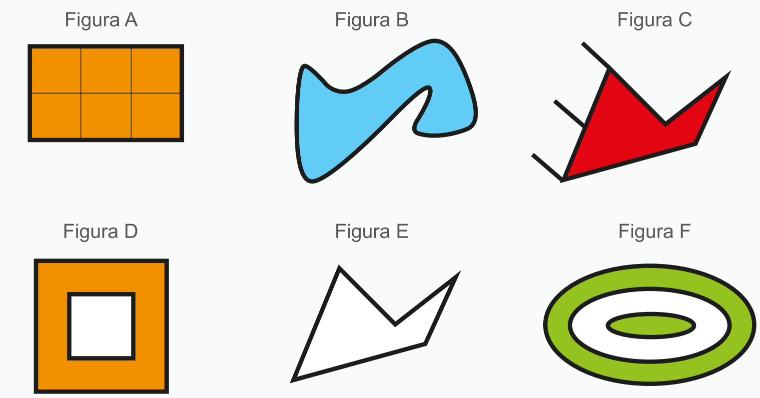
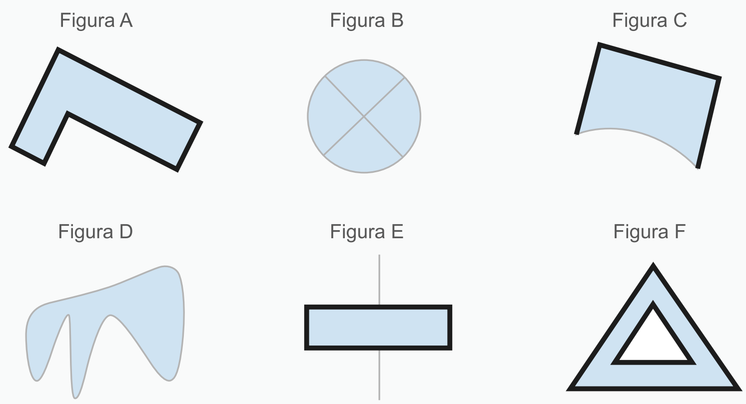
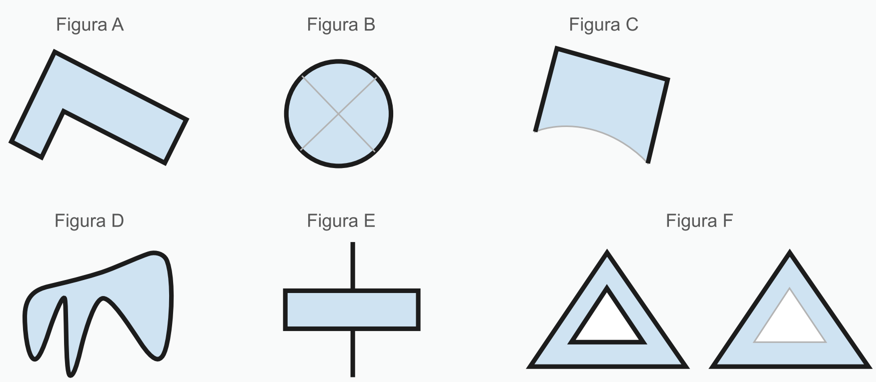
- Es importante que un profesor seleccione cuidadosamente las definiciones que utilizará en el trabajo con los estudiantes, especialmente, aquellas que construirá con ellos. Para esto debe tener en consideración el currículum, el conocimiento de los estudiantes y el aporte que este trabajo significa para el aprendizaje de la matemática. En el caso de estas dos clases, la elección de la definición y de los conceptos con que trabajamos fue hecha con propósitos pedagógicos claros.

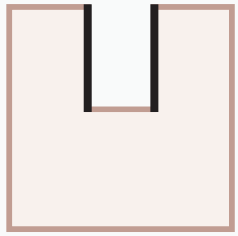
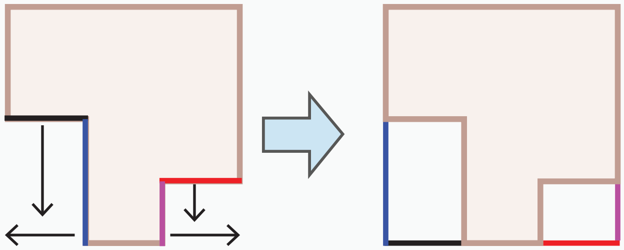
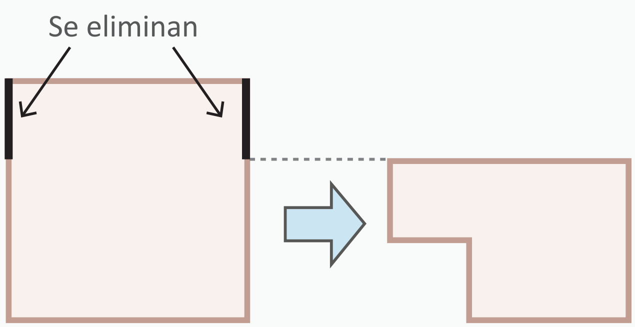
2º Entregue la ficha de sistematización y proponga a los alumnos usarla después de la clase para evaluar y repasar sus aprendizajes. Invítelos a que respondan las preguntas que ahí aparecen, a que revisen las ideas del Recapitulemos y, si lo requieren, a que consulten la bibliografía sugerida para profundizar.

3º Entregue la hoja de la tarea 2 y explíquela brevemente.

4º Hacer el lanzamiento de la siguiente clase, indicando a grandes rasgos su propósito o planteando una pregunta o situación que dé cuenta de la necesidad de avanzar en el estudio del tema propuesto en la Unidad.

RESPUESTAS EXPERTAS

Actividad	Respuesta experta
Actividad 1 Remarcando el borde	**1.** 
Actividad 2 Analizando definiciones de perímetro	**1.** Las líneas por considerar en el perímetro según cada definición son las siguientes: • Según la Definición 1:  • Según la Definición 2:  Las dos opciones para la figura F se deben a las dos posibles interpretaciones de la palabra “contorno”.
	2. La Definición 2 porque, por ejemplo, permite determinar el perímetro de las figuras B y D.

<table>
<tr><th>Actividad</th><th>Respuesta experta</th></tr>
<tr><td>Actividad 3
Comparando perímetros</td><td>
<table>
<tr><td>Secuencia A</td><td>El perímetro de la nueva figura formada es mayor que el del cuadrado porque se agregan dos segmentos:
</td></tr>
<tr><td>Secuencia B</td><td>El perímetro de la nueva figura formada es igual que el del cuadrado porque es posible trasladar segmentos, de forma paralela, y reconstruir el borde del cuadrado.
</td></tr>
<tr><td>Secuencia C</td><td>El perímetro de la nueva figura formada es menor que el del cuadrado, porque al trasladar segmentos algunos quedan del mismo tamaño y otros se eliminan.

</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

PLANIFICACIÓN

CLASE 3

UAFI: DEFINICIÓN DE PERÍMETRO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

CLASE 1
Construyendo definiciones

CLASE 2
Definiendo perímetro

CLASE 3
Razonando con el perímetro

TAREA 1
Trabajando con definiciones

TAREA 2
Calculando perímetros

CLASE 3: RAZONANDO CON EL PERÍMETRO

RESUMEN DE LA CLASE

Meta de la clase	Al finalizar la clase se espera que los futuros profesores[1] distingan y valoren distintos tipos de razonamiento matemáticos involucrados en la resolución de problemas asociados a la noción de perímetro.
Descripción de la clase	Esta clase inicia con una actividad que tiene como propósito evaluar la veracidad de una conjetura formulada a partir de la intuición, fundamentando con propiedades de la longitud. Las dos actividades que continúan tienen como fin desarrollar los razonamientos inductivo y deductivo mediante el análisis de una secuencia de figuras generadas por procesos iterativos, en las que se descubren reglas de cálculo recursivas para obtener la cantidad y longitud de los lados de cada figura y también su perímetro. Al finalizar la clase, se propone una actividad de reflexión pedagógica en la que los estudiantes tendrán que identificar los distintos tipos de trabajo matemático que fueron desarrollados en cada una de las clases de esta unidad.

[1]Respecto del uso de lenguaje inclusivo: Con el propósito de no provocar una saturación gráfica que dificulte la comprensión de la lectura, en este documento no se considera el uso de “los/las” u “o/a” para hacer referencia a ambos géneros de manera conjunta. En su lugar, se utilizan términos como “el futuro profesor”, “el estudiante” y “el profesor” y sus respectivos plurales para aludir de manera inclusiva a hombres y mujeres. Sin embargo, durante la gestión de la clase se sugiere la utilización de lenguaje inclusivo que invite a los y las estudiantes a involucrarse activamente en las actividades.

Aprendizajes esperados	Al finalizar la clase se espera que el estudiante: • Reconozca y aplique la propiedad de conservación de la longitud para resolver problemas que involucran perímetro. • Utilice argumentos basados en la visualización para justificar las relaciones que se dan entre los perímetros de ciertas figuras. • Analice la veracidad de una conjetura fundamentando con argumentos basados en propiedades geométricas. • Resuelva problemas mediante razonamientos de tipo inductivo y deductivo. • Identifique y distinga tipos de estrategias y razonamientos para resolver problemas.
Conocimientos previos	Figuras planas, perímetro.
Materiales	Estudiantes • Hojas de trabajo del estudiante. Profesor • Hojas de actividades. • Computador y proyector. • Conexión a internet o archivo GeoGebra.
Tiempo total estimado	90 minutos.

ESQUEMA DE LA CLASE

Tipo de Actividad	Actividades	Tiempo (T) Modalidad (M)
Construcción de conocimientos	**Actividad 1: La escalera** Esta actividad busca que los futuros profesores evalúen la veracidad de una conjetura sobre el perímetro de una secuencia de figuras, contrastando la intuición con argumentos visuales.	T: 20 min. M: Grupal y de curso completo.
Construcción de conocimientos	**Actividad 2: Presentando el Copo de nieve** Esta actividad busca que los futuros profesores identifiquen los tipos de razonamiento inductivo y deductivo, que surgen a partir de la resolución de problemas de recurrencia.	T: 15 min. M: Grupal y de curso completo.
Construcción de conocimientos	**Actividad 3: Analizando el Copo de nieve** Esta actividad busca que los futuros profesores identifiquen relaciones entre el razonamiento inductivo y deductivo, a través de la resolución de problemas de recurrencia.	T: 25 min. M: Grupal y de curso completo.
Reflexión pedagógica	**Actividad 4: Analizando el trabajo matemático de la unidad** Esta actividad busca que los futuros profesores identifiquen el tipo de trabajo matemático realizado en esta unidad, distinguiendo entre la construcción de definiciones y los tipos de razonamiento.	T: 25 min. M: Grupal y de curso completo.
Cierre	**Cierre de la clase:** El propósito de esta actividad es que los futuros profesores evidencien sus aprendizajes sobre [tema de la clase].	T: 5 min. M: De curso completo.

La escalera
Construcción de conocimientos

Tiempo: 20 min.
Modalidad: Grupal y de curso completo.
Materiales: Hojas de la actividad 1.
Archivo GeoGebra "Escalera.ggb".

PROPÓSITO

Con esta actividad se busca que los futuros profesores evalúen la veracidad de una conjetura sobre el perímetro de una secuencia de figuras, contrastando la intuición con argumentos visuales.

Fecha: ____________

Nombre: ____________

Unidad de Aprendizaje Definición de perímetro y resolución de problemas
Hojas de trabajo - Clase 3

Actividad 1

Trabajo grupal
Un profesor del curso de enseñanza de la geometría, presenta las siguientes figuras a sus estudiantes y les pide calcular el perímetro, sabiendo que la Figura 1 es un cuadrado cuyo lado mide 4 unidades.

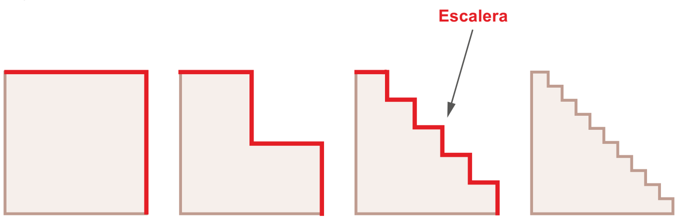


Figura 1 **Figura 2** **Figura 3** **Figura 4**

1. Resuelve la tarea pedida por el formador a sus estudiantes.

Luego, se genera el siguiente diálogo entre el profesor y un alumno:

Profesor: *Si la escalera tuviera muchísimos más peldaños... ¿Qué pasaría con el perímetro de la figura correspondiente?*

Alumno: *Sería igual a la longitud de la diagonal del cuadrado más la de dos lados del cuadrado.*

2. ¿Es cierta la afirmación del alumno? Justifica tu respuesta.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Centre las discusiones en las justificaciones y no en el cálculo.

VER MÁS +

Use el recurso interactivo para contrarrestar la idea de que en algún momento el perímetro de la figura disminuye.

VER MÁS +

Asegúrese de que todos aceptan que el perímetro en las distintas figuras es el mismo.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (10 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Organice el curso en grupos de 2 o 3 personas y pídales que pasen a la hoja de la actividad 1.
- Monitoree el trabajo de los estudiantes, en lo posible sin intervenir.
- Identifique quienes respondieron correctamente el ítem 1.
- Identifique distintas respuestas y justificaciones en el ítem 2.

VOLVER

COMPARTIR RESULTADOS (5 min)

Para la puesta en común puede serle útil considerar las siguientes sugerencias de gestión:

- Indique que comenzarán revisando el primer ítem. Para comenzar, puede decir que el perímetro de cada figura es 16 unidades y pedir a alguno de los estudiantes que haya respondido correctamente que argumente por qué.
- Si es necesario, pídales que centren sus intervenciones en la justificación y no en el cálculo de la medida de los peldaños en cada figura.
- Enfatice que en este ítem se ponen en juego los argumentos visuales de la última actividad de la clase anterior.
- Puede iniciar la puesta en común del ítem 2 preguntando ¿quiénes piensan que es cierta la afirmación del alumno? ¿por qué?
- Pídale algún estudiante que haya respondido que la afirmación del estudiante no es cierta que explique sus argumentos y compleméntelo mostrando el recurso GeoGebra “Escalera.ggb” para que puedan convencerse de que por muchos peldaños que tenga la escalera, esta tiene el mismo perímetro que el cuadrado inicial. En el recurso, se sugiere proceder aumentando el número de escalones hasta que llegue al máximo, en el que la escalera aparenta ser una diagonal y luego haga zoom para mostrar que de todos modos la escalera sigue teniendo escalones.

VOLVER

SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS (5 min)

Se sugiere asociar las respuestas de los estudiantes a las siguientes ideas:

- El perímetro de las figuras presentadas es el mismo, ya que los segmentos que forman los peldaños de las escaleras son subdivisiones de los lados que se trasladan paralelamente, conservando su longitud.

- Por muy pequeños que sean los peldaños de la escalera, estos siempre tendrán un segmento horizontal y otro vertical, pues de lo contrario dejaría de ser escalera. De esta manera se concluye que los perímetros de todas las "escaleras" así formadas son iguales.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad comente los puntos que se indican a continuación (puede usar las diapositivas 5 y 6):

- En esta actividad visualizamos la construcción de una figura recursivamente, es decir, pensamos en ir agregando consecutivamente "peldaños a la escalera" en cada uno de los pasos. Concluimos que todas estas figuras tienen igual perímetro, por muchos peldaños que tengan.

- Vimos que a partir de la intuición podrían obtenerse conclusiones erradas, por esto en matemática es necesario justificar las afirmaciones usando definiciones y propiedades.

VOLVER

LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

En la siguiente actividad trabajaremos con una nueva secuencia de figuras construidas recursivamente.

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Algunos estudiantes pueden pensar que la conjetura es cierta basándose solamente en la intuición, es decir, que la escalera con muchos peldaños aproxima la diagonal del cuadrado.

- Es posible que haya estudiantes que solo recurran a un cálculo aritmético para determinar el perímetro de cada una de las figuras, y que por lo tanto no puedan generalizar.

- Es posible que haya estudiantes que no le encuentren sentido al problema, argumentando por ejemplo que no es posible aumentar arbitrariamente la cantidad de peldaños en una escalera. Si bien tienen razón cuando se refieren a una escalera real, puede comentarles que este es un problema idealizado en el que nos podemos permitir aumentar la cantidad de peldaños tanto como queramos.

- Si en el ítem 2 algún estudiante cree concluir que la afirmación del alumno es correcta, solamente basándose en un posible dibujo "límite" y sin recurrir a los cálculos del perímetro pedidos en el ítem 1, puede indicarle que en el enunciado se habla de una escalera con muchos escalones, por muy pequeños que estos sean. De hecho, en el recurso geogebra la hacer el zoom en la escalera que pareciera ser una diagonal se ve que en realidad tiene pequeños escalones.

- Puede ser útil que mientras muestre el recurso GeoGebra pregunte a los estudiantes por el perímetro de las distintas figuras que van apareciendo.

VOLVER

Construyendo figuras recursivamente

Construcción de conocimientos

Tiempo: 15 min.
Modalidad: Grupal y de curso completo.
Materiales: Hojas de la actividad 2.

PROPÓSITO

Con esta actividad se busca que los futuros profesores identifiquen los tipos de razonamiento inductivo y deductivo, que surgen a partir de la resolución de problemas de recurrencia.

Fecha: ____________

Nombre: ____________

Unidad de Aprendizaje Definición de perímetro y resolución de problemas
Hojas de trabajo - Clase 3

Actividad 2

Trabajo grupal

Considera la secuencia de figuras que se construye a partir de un triángulo equilátero (Fig. 0) mediante el siguiente proceso:

- Se subdivide cada lado del triángulo equilátero en tres segmentos iguales y sobre el tercio central de cada segmento se dibuja un nuevo triángulo equilátero (Fig. 1).
- Luego, sobre cada nuevo segmento se repite este mismo proceso, obteniendo en cada paso una nueva figura.

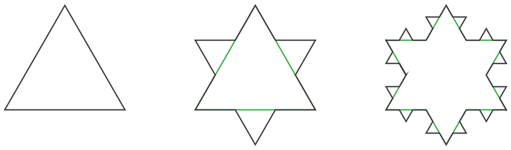


Figura 0 Figura 1 Figura 2

1. ¿Cuántos lados tienen las figuras 1 y 2?

2. Si el lado de la figura 0 mide 27 unidades, ¿cuánto miden los lados de las figuras 1 y 2?

3. Describe una regla que permita encontrar la cantidad de lados de una de las figuras en función de la cantidad de lados de la figura anterior.

4. Describe una regla que permita encontrar la longitud de los lados de una de las figuras en función de la longitud de los lados de la figura anterior.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Observe las estrategias que utilizan para encontrar la cantidad de lados y sus longitudes.

VER MÁS +

Si es necesario ayudar a los estudiantes, plantee las preguntas sugeridas. Revíselas.

VER MÁS +

Promueva la distinción entre las reglas basadas en los datos numéricos y las basadas en la construcción de la secuencia.

VER MÁS +

Asegúrese de que distingan los dos tipos de razonamientos involucrados en esta actividad.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (5 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Monitoree el trabajo de los grupos, en lo posible, sin intervenir.
- Identifique quiénes respondieron correctamente los ítems 1 y 2.
- En el caso que los estudiantes se muestran muy confundidos, al calcular la longitud de los lados de la Figura 2, puede preguntarles:
    - De una figura a la siguiente, ¿la longitud de los lados aumenta o disminuye?
    - ¿Cómo se puede determinar la longitud de los lados de la Figura 1? ¿Cómo esto podría ser útil para encontrar la longitud de los lados de la Figura 2?
- Identifique si surgen distintas estrategias (como las descritas en la síntesis) para obtener las respuestas a los ítems 3 y 4.

VOLVER

COMPARTIR RESULTADOS (5 min)

Para la puesta en común puede serle útil considerar las siguientes sugerencias de gestión:

- Comience preguntando los resultados de los ítems 1 y 2, a quienes hayan hecho los cálculos correctos. Pregunte si alguien tiene una respuesta distinta y si la hay, permita que los estudiantes expliquen cómo obtuvieron sus resultados.
- Pida a distintos grupos que compartan las reglas encontradas en los ítems 3 y 4 y regístrelas en la pizarra. No descarte aún ninguna de estas respuestas.
- Para poner a prueba las reglas encontradas, promueva la discusión respecto a la justificación de ellas, comenzando por aquellos estudiantes cuya regla haya sido extraída solamente de los datos numéricos sin referencia al método de construcción de la secuencia de figuras.
- Después pregunte ¿alguien puede justificar su regla basándose en el procedimiento de construcción de la secuencia de figuras? ¿Cómo?
- En el caso que ningún estudiante pueda responder la pregunta anterior, plantee lo siguiente:
    - Un lado de una figura, ¿por cuántos lados se reemplaza en la figura siguiente?
    - ¿Cómo están relacionados los tamaños de los lados?
- El propósito de esto es asegurarse que los estudiantes terminen concluyendo que “cada lado se reemplaza por otros cuatro lados, cuya longitud es un tercio de la original”.

VOLVER

SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS (5 min)

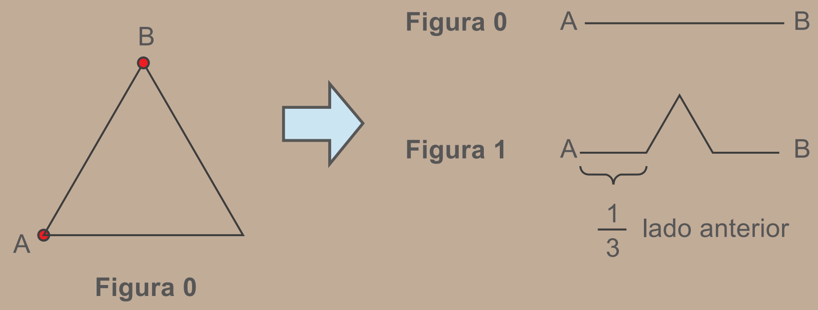
Se sugiere asociar las respuestas de los estudiantes a las siguientes ideas:

Las reglas obtenidas en 3 y 4 pueden obedecer a dos tipos de razonamientos:

- Uno centrado en detectar regularidades que cumplen los valores numéricos calculados en las preguntas 1 y 2:
  - la cantidad de lados se multiplica por 4 cada vez,
  - la longitud de cada lado se divide por 3, en cada paso.

  Esto, sin ninguna consideración respecto a la regla de construcción de la secuencia de figuras.

- Otro basado en deducir la relación entre los lados a partir de la regla de construcción de la secuencia de figuras:
  - Cada lado se reemplaza por 4 lados en la figura siguiente.
  - Cada lado se divide en 3 partes iguales, por lo tanto, su longitud se divide por 3 para formar los lados de la figura siguiente.



VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad comente que podemos distinguir dos tipos de razonamiento que nos llevaron a encontrar las reglas pedidas. Por una parte, razonamos **inductivamente**, pues a partir de solo tres datos conjeturamos una regla general. Por otro lado también abordamos el problema razonando **deductivamente** para justificar nuestra regla a partir del procedimiento de construcción de las figuras.

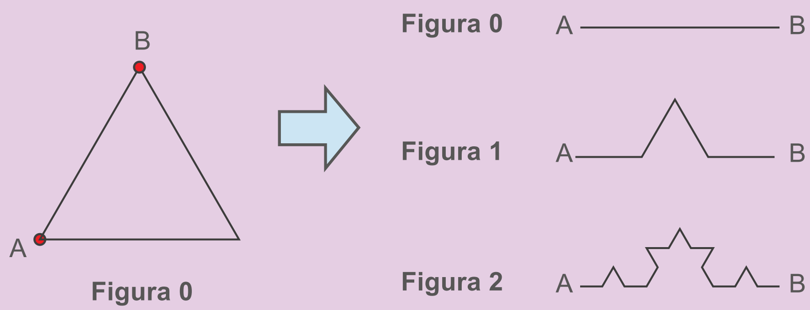
VOLVER

LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

En la próxima actividad analizaremos utilizaremos los resultados de esta actividad para descubrir cómo evoluciona el perímetro en las figuras que continúan la secuencia.

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Los estudiantes podrían responder sin problemas cuántos lados tiene la figura 1, y podrían remarcar los lados de la figura 2 como estrategia para organizar el conteo.
- Una posible estrategia para determinar la longitud de los lados de la figura 2, es analizar lo que ocurre en uno de los lados del triángulo inicial y reconocer que los otros lados de la figura 0 varían de la misma manera:



- En la pregunta 3, es posible que haya estudiantes que traten de encontrar una regularidad a partir de los primeros tres casos comparando por diferencia y por tanto, no logren establecer la recurrencia. A modo de ejemplo:

Diferencias		
12 - 3	9	$(1 \bullet 3)^2$
48 - 12	36	$(2 \bullet 3)^2$

En este caso podrían conjeturar que la tercera diferencia es $(3 \bullet 3)^2 = 81$, lo que no corresponde a la secuencia de figuras. Es necesario revisar este tipo de conjeturas, pues en algunos casos podrían ser correctas. Por ejemplo, si ellos afirman que las diferencias son 9, $9 \bullet 4$, $9 \bullet 4^2$, $9 \bullet 4^3$, etc., es correcto, pero debe justificarse.

- En el caso que haya estudiantes a quienes les sea muy difícil responder las preguntas 3 y 4, puede ayudarlos haciéndoles preguntas que los orienten a distinguir el patrón en ellas: ¿Hay alguna operación aritmética que permita hacer pasar del número de lados de la figura 0 a la de la figura 1? Esa misma operación aritmética, ¿permite encontrar la cantidad de lados de la figura 2 a partir de los de la figura 1? Preguntas similares puede hacer para las longitudes de los lados.

VOLVER

Calculando perímetros recursivamente

Construcción de conocimientos

Tiempo: 25 min.
Modalidad: Grupal y de curso completo.
Materiales: Hojas de la actividad 3.

PROPÓSITO

Con esta actividad se busca que los futuros profesores identifiquen relaciones entre el razonamiento inductivo y deductivo, a través de la resolución de problemas de recurrencia.

Fecha: __________

Nombre: __________

Unidad de Aprendizaje Definición de perímetro y resolución de problemas
Hojas de trabajo - Clase 3

Actividad 3

Trabajo grupal

Si se mantiene el proceso de construcción de figuras planteado en la actividad anterior, responde:

1. Conociendo la cantidad de lados de alguna de las figuras de la secuencia y la longitud de sus lados, ¿cómo calcularía su perímetro?

2. ¿Cuál es el perímetro de cada una de las seis primeras figuras de la secuencia?

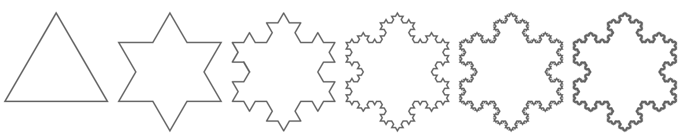


Figura 0 **Figura 1** **Figura 2** **Figura 3** **Figura 4** **Figura 5**

Para tener un registro ordenado de la información utiliza la siguiente tabla:

Figura	Cantidad de lados	Longitud del lado (en unidades de longitud)	Perímetro (en unidades de longitud)
Figura 0			
Figura 1			
Figura 2			
Figura 3			
Figura 4			
Figura 5			

3. Describe y justifica una regla que permita encontrar el perímetro de cada una de las figuras en función del perímetro de la figura anterior.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Ayúdelos a encontrar el significado del factor $\frac{4}{3}$ en el cálculo del perímetro.

VER MÁS +

Oriéntelos a analizar lo que ocurre con la cantidad de lados y su longitud a partir de uno de los lados del triángulo inicial.

VER MÁS +

Promueva la diferenciación entre razonamiento inductivo y deductivo según el trabajo realizado. Consulte la gestión.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (10 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Si algún estudiante no se ha dado cuenta de que para una figura de la secuencia, la longitud de todos sus lados es la misma, hágale preguntas que lo lleven a dicha conclusión.
- Observe si los estudiantes aplican las reglas obtenidas en la actividad anterior para completar las dos primeras columnas de la tabla del ítem 2.

VOLVER

COMPARTIR RESULTADOS (10 min)

Para la puesta en común puede serle útil considerar las siguientes sugerencias de gestión:

- Para comenzar la puesta en común proyecte la tabla en la pizarra y complete con ellos en primer lugar la columna de la cantidad de lados, luego la columna de la longitud de los lados y finalmente la columna del perímetro.
- Una vez que la tabla esté completa, pregunte ¿qué regla permite encontrar el perímetro de cada una de las figuras en función del **perímetro** de la figura anterior?
- Asegure que aparezcan las dos maneras de abordar el problema indicadas en la síntesis (inductiva y deductiva).

VOLVER

SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS (5 min)

Se sugiere asociar las respuestas de los estudiantes a las siguientes ideas:

- La regla que permite obtener el perímetro de cada figura en función de la anterior, puede encontrar razonando:
  - Inductivamente, si se establece una regla a partir de los números de la columna del perímetro, haciendo el cociente entre cada perímetro y el anterior, en todos los casos se obtiene $\frac{4}{3}$. De esto es posible conjeturar que en general en la secuencia, el perímetro siguiente es $\frac{4}{3}$ del anterior.
- Deductivamente: a partir de las dos reglas de la actividad anterior: la columna cantidad de lados se multiplica por 4 y la longitud se va dividiendo por 3, por tanto, la regla para el perímetro es “multiplicar por 4 y dividir por 3”, esto es, multiplicar por $\frac{4}{3}$.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad comente los puntos que se indican a continuación (puede usar las diapositivas 17 y 18):

- El razonamiento inductivo es intuitivo y tendemos inconscientemente a preferir su uso. De hecho, es muy común que aún en situaciones en las que se podría usar directa y fácilmente el razonamiento deductivo, optamos por usar primero un razonamiento inductivo. Por ejemplo, pese a que en la actividad anterior obtuvimos y justificamos reglas de recurrencia a partir de las cuales se podría obtener rápidamente una recurrencia para el perímetro, es usual usar previamente razonamiento inductivo y, a partir de los datos numéricos, encontrar una regla.
- El futuro profesor debe reconocer que el razonamiento inductivo es una poderosa herramienta para generar conocimiento, aun en los casos en el que el razonamiento deductivo puede entregar respuestas más rápidamente.
- El razonamiento inductivo es muy importante en matemática, ya que permite levantar conjeturas que luego deben ser confirmadas mediante el razonamiento deductivo.

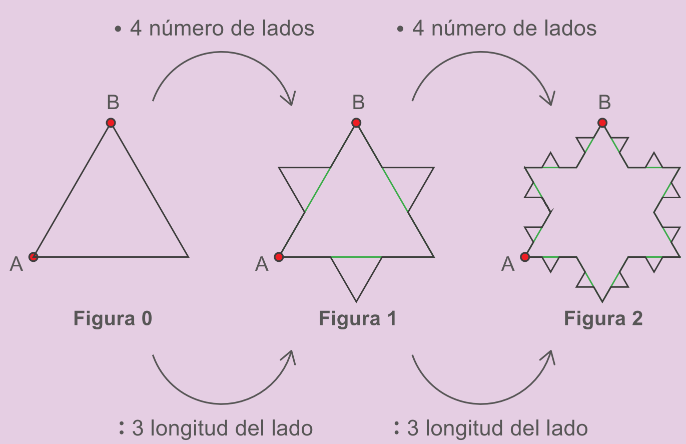
VOLVER

LANZAMIENTO DE LA PRÓXIMA ACTIVIDAD

En la siguiente actividad vamos a cerrar esta esta unidad analizando el tipo de trabajo matemático que hemos realizado.

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Los estudiantes podrían encontrar el perímetro estudiando primero solo lo que ocurre en las figuras entre los vértices A y B, multiplicando este resultado por $\frac{3}{4}$.



- Es posible que los estudiantes describan de manera verbal la relación entre los perímetros de una forma equivalente a la siguiente expresión:

  $$P = 4 \bullet \textit{cant. lados fig. anterior} \bullet \frac{\textit{long. lados fig. anterior}}{3}$$

  Y de esta manera descubran la aparición de $\frac{4}{3}$.

- Puede haber estudiantes que les sea difícil relacionar el que se haya multiplicado por 4 y luego se haya dividido por 3 con el que se multiplique por $\frac{4}{3}$. En este caso, puede mostrar el siguiente desarrollo:

  $$P = 4 \bullet \textit{cant. lados fig. anterior} \bullet \frac{\textit{long. lados fig. anterior}}{3}$$

  $$P = \frac{4 \bullet \textit{cant. lados fig. anterior} \bullet \textit{long. lados fig. anterior}}{3}$$

  $$P = \frac{4 \bullet \textit{perímetro fig. anterior}}{3} = \frac{4}{3} \bullet \textit{perímetro fig. anterior}$$

VOLVER

Analizando el trabajo matemático de la unidad

Reflexión pedagógica

Tiempo: 25 min.
Modalidad: Grupal y de curso completo.
Materiales: Hojas de trabajo de la actividad 4.

PROPÓSITO

Con esta actividad se busca que los futuros profesores identifiquen el tipo de trabajo matemático realizado en esta unidad, distinguiendo entre la construcción de definiciones y los tipos de razonamiento.

Fecha: ____________

Nombre: ____________

Unidad de Aprendizaje Definición de perímetro y resolución de problemas
Hojas de trabajo - Clase 3

Actividad 4

Trabajo grupal

El propósito de las clases 1 y 2 fue construir y probar las definiciones de algunos conceptos matemáticos básicos. El trabajo matemático para lograr esto requiere considerar distintos aspectos:

- Partir de una idea intuitiva.
- Delimitar las características de la noción a definir, en este caso, qué segmentos estaban en el borde y qué segmentos no.
- Formular la definición a partir de conceptos previos, en este caso, definir borde a partir de estar dentro y fuera de un círculo.
- Testear la definición construida.

1. De acuerdo con las actividades de las clases 1 y 2, discutan de qué manera cada una de ellas se hizo cargo de los aspectos de la construcción de la definición mencionados. ¿Qué podrían decir de la elección de la secuencia de actividades propuesta en dichas clases?

2. En esta tercera clase, uno de los propósitos fue analizar los distintos tipos de razonamiento involucrados en la resolución de problemas de perímetro. Distinguimos *razonamiento inductivo* y *deductivo* y también identificamos *razonamientos visuales*. De acuerdo con esta clasificación, ¿qué tipos de razonamientos desarrollamos en cada una de las actividades de la clase?

Clase 3	
Actividades	Tipos de razonamientos abordados en la actividad
1.- La escalera infinita.	
2.- Presentando el Copo de nieve.	
3.- Analizando el Copo de nieve.	

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Proyecte las actividades de las clases anteriores para ayudarlos a realizar esta tarea.

VER MÁS +

Ayúdelos a reconocer cuál es el trabajo matemático relevante en cada actividad. Revise las anticipaciones.

VER MÁS +

Mencione los distintos tipos de trabajo matemático realizados, diferenciándolos de la descripción de las actividades.

VER MÁS +

PRESENTACIÓN Y MONITOREO (10 min)

Se sugiere considerar las siguientes indicaciones para gestionar el trabajo de los estudiantes:

- Monitoree el trabajo grupal, fomentando la discusiones al interior de los grupos con preguntas como ¿de qué manera estaban organizadas las actividades de la clase 1? ¿y las de la clase 2?
- Si nota que los estudiantes no recuerdan de qué se tratan exactamente las actividades de las clases anteriores, recuérdelas proyectando las diapositivas 23 a 29.

VOLVER

COMPARTIR RESULTADOS (10 min)

Para la puesta en común puede serle útil considerar las siguientes sugerencias de gestión:

- Puede comenzar recordando las actividades de las clases 1 y 2, que se resumen en las diapositivas 23 a 29. Luego, pida a algún grupo que comparta la manera en que las actividades de la clase 1 se hicieron cargo de la construcción de la definición de borde. Dé la palabra a otros grupos y pídales que se refieran a lo trabajado en la clase 2.
- Durante el análisis de las clases anteriores, si hay estudiantes que solo describen las actividades, se sugiere que les presente los siguientes tipos de trabajo matemático: exploración, búsqueda de ejemplos y contraejemplos, encontrar distintas respuestas, conjeturar, comunicar, argumentar para justificar, clasificar, reconocer regularidades y demostrar; con el objetivo de que ellos identifiquen cuál de estas tareas desarrollaron en cada actividad y cómo esta tarea ayudó al logro del objetivo de la clase.
- Para poner en común el ítem 2, comente que durante esta clase, se intencionó el trabajo con distintos tipos de razonamientos: inductivo, deductivo y visual y pida algún grupo que comparta sus respuestas.
- Dirija la discusión de este ítem de manera que los estudiantes se enfoquen en el análisis de la forma en que las actividades desarrolladas en esta clase contribuyeron al desarrollo de los distintos tipos de razonamiento. Puede hacer preguntas como: ¿por qué el trabajo con el problema de “la escalera infinita” te permitió razonar inductivamente?

VOLVER

SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS (5 min)

La síntesis de esta actividad estará dada en su cierre.

VOLVER

CIERRE DE LA ACTIVIDAD

Para finalizar la actividad comente los puntos que se indican a continuación (puede usar las diapositivas 30 y 31):

- En nuestra formación docente es importante adquirir el hábito de analizar cómo se organizan sus actividades y los propósitos que cada una de ellas persigue.
- Para un docente es fundamental distinguir los distintos tipos de trabajo matemático, para en el futuro poder planificar clases que permitan a los estudiantes desarrollar conocimientos y habilidades matemáticas amplias.
- Adquirir distinciones entre los distintos tipos de trabajo matemático, promueve el desarrollo de un lenguaje profesional que es esencial para la práctica docente.

VOLVER

ANTICIPACIONES Y SUGERENCIAS

- Es posible que haya estudiantes que entreguen solo descripciones de las actividades de las clases 1 y 2, sin identificar qué trabajo matemático se realizó en ellas. Para enfrentar esto, enfatice su gestión a la necesidad de referirse a los tipos de trabajo matemático identificados en esta actividad.
- Es posible que a los estudiantes les sea simple distinguir las actividades que tienen como objetivo trabajar contenidos matemáticos de aquellas que son de índole pedagógica.
- Los estudiantes podrían identificar que una actividad persigue varios objetivos ya que en ella se realizan varios trabajos matemáticos, por ejemplo, el trabajo de argumentación puede estar presente en varias actividades. Si bien es correcto, asegúrese que distingan cuál es el trabajo matemático principal de cada actividad.

VOLVER

Cierre de la clase

Gestión sugerida

Tiempo: 10 min.

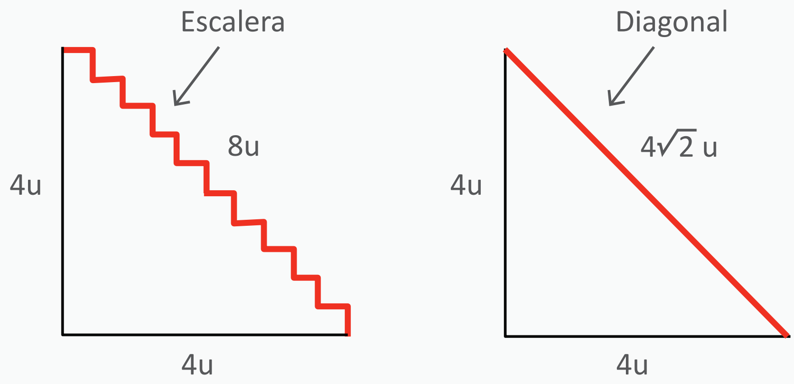
1º Para el cierre de la clase se sugiere proyectar la diapositiva 33 y comentar las siguientes ideas:

- El *razonamiento inductivo* es muy importante en matemática, ya que permite, a partir del análisis de casos particulares, producir afirmaciones generales, también llamadas conjeturas, que luego pueden ser justificadas mediante *razonamiento deductivo*. Este razonamiento deductivo nos permite obtener conclusiones y justificaciones generales a partir de otras reglas, propiedades o principios generales.

- En nuestra formación docente es importante adquirir el hábito de analizar cómo se organizan sus actividades, reconocer los propósitos que cada una de ellas persigue y los distintos tipos de trabajo matemático involucrados, para en el futuro poder planificar clases que permitan a los estudiantes desarrollar conocimientos y habilidades matemáticas amplias.

2º Entregue la ficha de sistematización y proponga a los alumnos usarla después de la clase para evaluar y repasar sus aprendizajes. Invítelos a que respondan las preguntas que ahí aparecen, a que revisen las ideas del Recapitulemos y si lo requieren a que consulten la bibliografía sugerida para profundizar.

RESPUESTAS EXPERTAS

Actividad	Respuesta experta
Actividad 1 La escalera	**1.** El perímetro de cada una de las figuras es 16 unidades.
	2. La afirmación del alumno no es cierta, pues por muy pequeños que sean los peldaños de la escalera, estos siempre van a estar constituidos por segmentos horizontales y verticales, y el perímetro es siempre el del cuadrado original. Sin embargo, el perímetro de la figura en la que se reemplaza la escalera por la diagonal del cuadrado, es estrictamente menor, puesto que la longitud de la diagonal es menor que cualquiera de las escaleras ($4\sqrt{2}$ unidades). 
Actividad 2 Construyendo figuras recursivamente	**1.** Las figuras 1 y 2 tienen 12 y 48 lados, respectivamente.
	2. Las longitudes de los lados de las figuras 1 y 2 son 9 cm y 3 cm, respectivamente.
	3. Multiplicar por 4 la cantidad de lados de una figura para obtener la cantidad de lados de la figura siguiente.
	4. Dividir por 3 la longitud del lado de una figura para obtener la longitud del lado de la figura siguiente.

Actividad	Respuesta experta
Actividad 3 Calculando perímetros recursivamente	**1.** Multiplicando la cantidad de lados de una figura con la longitud de sus lados.
	2. Se puede argumentar que: a) Los problemas de comparación (A y D) son más difíciles que los de cambio (B y C). b) Los problemas directos (A y B) suelen ser más fáciles que los que no lo son (C y D). Esto nos indica que el problema B es el más fácil, y el D el más difícil. Sin embargo, los criterios anteriores no permiten establecer si un problema de cambio no directo (C) es más fácil o difícil que uno de comparación directo (A). Debido a esto, se pueden proponer las siguientes dos secuencias:

Figura	Cantidad de lados	Longitud del lado (en unidades de longitud)	Perímetro (en unidades de longitud)
Figura 0	3	27	81
Figura 1	12	9	108
Figura 2	48	3	144
Figura 3	192	1	192
Figura 4	768	$\frac{1}{3}$	256
Figura 5	3.072	$\frac{1}{9}$	$\frac{1.024}{3}$

Actividad	Respuesta experta
	3. $P_{figura} = \frac{4}{3} \cdot P_{figura\ anterior}$ Esta regla se puede justificar a partir de las respuestas a las preguntas 3 y 4 de la actividad anterior. Pues, para la cantidad de lados en cada paso se multiplica por 4 y para su longitud se divide por 3, lo que en el perímetro corresponde a multiplicar por $\frac{4}{3}$.

<table>
<tr><th>Actividad</th><th>Respuesta experta</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Actividad 4 Analizando el trabajo matemático de la unidad</td><td>1. La clase 1 comienza generando un conflicto sobre lo que se entiende por perímetro, a partir de ideas intuitivas, concluyendo la necesidad de contar con las definiciones de borde y figura plana. Luego, se pone a prueba una definición de figura plana en un grupo de figuras no convencionales. Se continúa con una actividad en la que se utiliza la analogía del náufrago para presentar intuitivamente las ideas de puntos interiores, exteriores y del borde de una figura. Esta clase termina con una definición de puntos interiores y exteriores en términos de círculos centrados en ellos y, la redacción de una definición de borde.

La clase 2 comienza poniendo a prueba la definición de borde construida, en una variedad de figuras. Se continúa luego con una actividad en la que se evalúan dos definiciones de perímetro, provenientes de textos escolares, modificando una de ellas para adoptarla. En la última actividad se comparan perímetros mediante razonamientos visuales.</td></tr>
<tr><td>2.
<table>
<tr><th rowspan="4">Clase 3</th><th>Actividades</th><th>Tipos de razonamientos abordados en la actividad</th></tr>
<tr><td>1.- La escalera infinita.</td><td>Razonamiento visual.</td></tr>
<tr><td>2.- Construyendo figuras recursivamente.</td><td>Razonamiento inductivo.</td></tr>
<tr><td>3.- Calculando perímetros recursivamente.</td><td>Razonamiento deductivo.</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

MATERIAL PARA LOS ESTUDIANTES

MATERIAL
CLASE 1

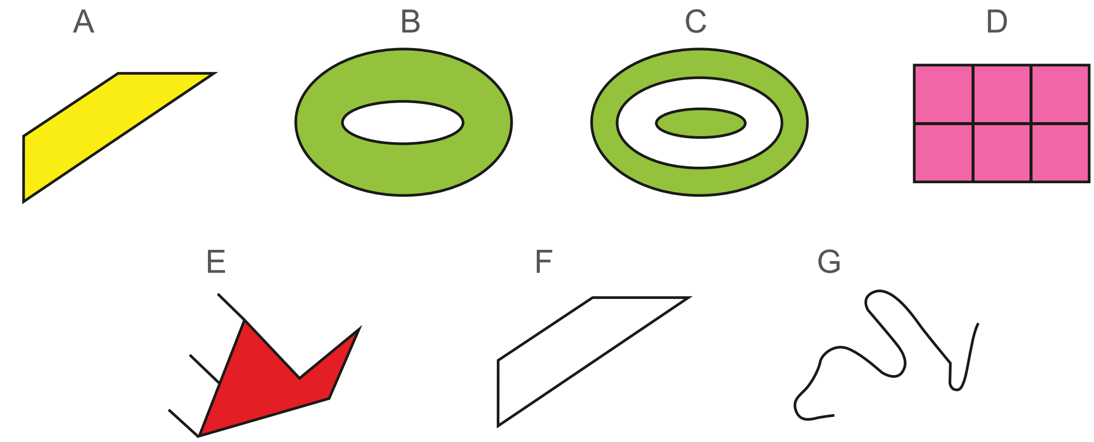
Fecha: ____________________

Nombre: ______________________

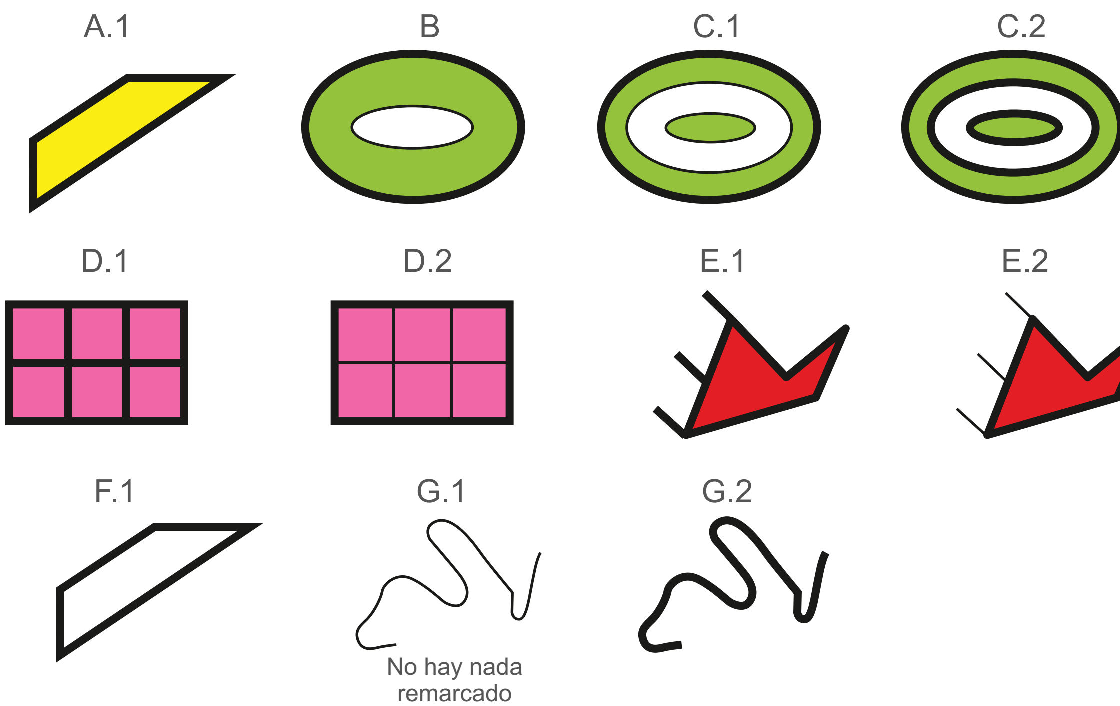
Actividad 1

Trabajo individual

Un formador entrega a sus estudiantes de pedagogía las siguientes figuras:



Luego, les pidió remarcar las líneas que considerarían para calcular su perímetro. A continuación se muestran algunas de sus respuestas:



1. ¿Cuáles de las respuestas consideras correctas y cuáles incorrectas? Justifica.

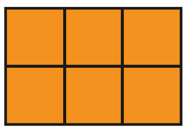
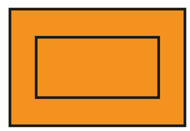
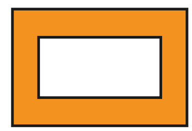
Actividad 2

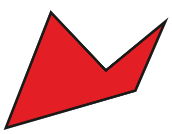
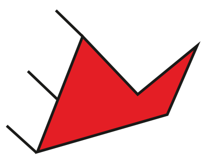
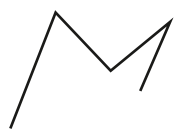
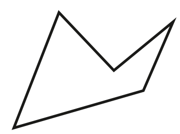
Trabajo grupal

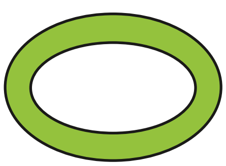
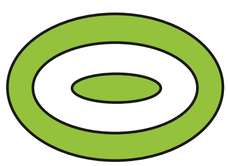
Considera la siguiente definición de figura plana:

> Una **figura plana** es cualquier colección de puntos que se pueda dibujar. Los puntos que son parte de la figura son todos aquellos que están pintados o por los que pasa una línea y los puntos que no son parte de la figura son los que quedan en blanco. Dos figuras planas son iguales si tienen los mismos puntos.

Considera los siguientes grupos de figuras:

Grupo 1	Figura A	Figura B	Figura C	Figura D
				

Grupo 2	Figura E	Figura F	Figura G	Figura H
				

Grupo 3	Figura I	Figura J
		

1. Para cada uno de los grupos de figuras responde: ¿Cuáles figuras son iguales? ¿Cuáles no lo son? Justifica.

Actividad 3

Trabajo grupal

En esta actividad abordaremos algunas ideas intuitivas que nos acercarán a una definición de borde de una figura. Para eso, lean la siguiente historia y respondan las preguntas que están a continuación.

El náufrago

Un náufrago en medio de un gran lago está desesperado por llegar a tierra firme. A pesar de que está muy desorientado, busca una manera que le permita argumentar si es que todavía está en el medio del lago y hace algunas afirmaciones.

1. Señala qué debiera concluir el náufrago en las siguientes afirmaciones:

   Mientras continúe viendo solo agua a mi alrededor, muy cerca, entonces_______
   ____.

   Si en algún momento viera a mi alrededor, muy cerca, solo arena, entonces_____
   ____.

2. En las frases anteriores, ¿por qué crees que el náufrago dijo “muy cerca”?, ¿da lo mismo que mire cerca o lejos? Explica.

3. Una manera de expresar lo de “ver a su alrededor” es “mirar todo un círculo centrado en el náufrago”. En la siguiente herramienta interactiva considera A1, A2, B1 y B2 como posibles ubicaciones del náufrago. Si se parte con círculos grandes y hacemos variar su radio para hacerlos cada vez más pequeños, ¿cuál es la relación de cada uno de estos círculos con el agua y la arena?

   https://www.geogebra.org/m/e55qawcb

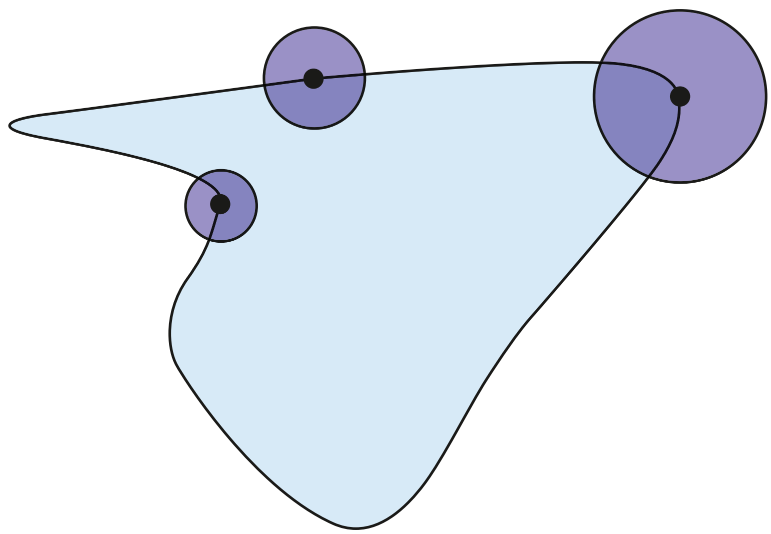
Actividad 4

Trabajo individual

En la actividad anterior concluimos que:

Un punto del plano se dice punto **interior** a una figura si hay algún círculo centrado en él, completamente contenido en la figura.
Un punto del plano se dice punto **exterior** a una figura si hay algún círculo centrado en él, completamente fuera de la figura.
Un punto del plano estará en el **borde** de una figura, si no es ni interior ni exterior a ella.

Piensa en un punto cualquiera en el borde de una figura y en un círculo centrado en él:



1. Basándote en lo que el dibujo sugiere, completa la siguiente definición de borde en términos de círculos:

   Un punto del plano se dice del **borde** de la figura si cualquier círculo centrado en él contiene puntos ______________________________ y puntos ______________________________
   ______________________________.

Actividad 4

2. Queremos justificar la frase anterior a partir de la definición de borde que construimos en la actividad anterior: Un punto C está en el borde de una figura si no es punto interior ni exterior de ella. Considera un punto C cualquiera en el borde y un círculo centrado en él:

   a) Muestra que este círculo **debe tener** puntos que son de la figura. Para ello, explica por qué si no fuese así, el punto C sería exterior.

   b) Muestra que este círculo también **debe tener** puntos que no son de la figura. Para ello, explica por qué si no fuese así, el punto C sería interior.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

FICHA DE SISTEMATIZACIÓN

Unidad de aprendizaje
Trabajando matemáticamente con el perímetro

Clase 1
Construyendo definiciones

Meta de la clase
Al finalizar la clase se espera que hayas logrado comprender la necesidad de contar con definiciones precisas de figura plana y borde, adopten una definición de figura plana y la evalúen y participen del proceso de construcción de una definición de borde.

Palabras clave
Figura plana, interior, exterior, borde, definición.

Preguntas que ahora puedes responder

- ¿Qué es una figura plana?
- ¿Qué son los puntos interiores y exteriores de una figura plana? Explica.
- ¿Qué es el borde de una figura plana? ¿Cómo se puede reconocer si un punto de la figura está o no en su borde?
- ¿Por qué es importante contar con definiciones en matemática? Explica.

Recapitulemos

- Para entender la noción de perímetro es necesario previamente contar con una definición de *figura plana* y *borde*.
- En esta unidad adoptamos la siguiente definición de figura plana:

  > Una **figura plana** es cualquier colección de puntos del plano que se pueda dibujar. Los puntos que son parte de la figura son todos aquellos que están pintados o pasa una línea sobre ellos y los puntos que no son parte de la figura son los que quedan en blanco. Dos figuras planas son **iguales** si tienen los mismos puntos.

  Esta definición de figura plana incluye las figuras que comúnmente se trabajan en el contexto escolar y otras menos usuales, por tanto es una definición más amplia que otras posibles.

- En esta unidad definimos el borde de una figura indicando cuáles son sus puntos. Esto se realizó partiendo de nociones previas de puntos interiores y exteriores, las cuales surgieron de ideas intuitivas que posteriormente formalizamos. Finalmente, la definición obtenida es:

Un punto del plano se dice del **borde** de la figura si cualquier círculo centrado en él contiene puntos de la figura y puntos que no son de la figura.

- En la Educación Básica y Media no se aborda una definición formal de borde, este concepto se trabaja más bien mediante el uso de ejemplos variados. Que nosotros como futuros profesores tengamos claro qué constituye el borde de una figura nos permite ser precisos y abordar con confianza la enseñanza de perímetro de figuras.
- Durante esta clase experimentamos inseguridad acerca de nuestros conocimientos respecto a conceptos básicos. Esto nos acerca a las vivencias que pueden tener los niños al abordar tareas matemáticas que desafían sus preconcepciones o que incluyen nuevos conceptos. Esta inseguridad fue clave en el desarrollo de la clase. Si hubiésemos estado todos de acuerdo, difícilmente podríamos haber trabajado arduamente en la búsqueda y evaluación de las definiciones, y valorar su importancia para el trabajo matemático.
- En el trabajo que realizamos partimos de una situación problemática, desde la cual hicimos surgir la necesidad de contar con una definición. En el proceso de construcción, invocamos nociones intuitivas (interior y exterior) las cuales precisamos mediante el uso de conceptos matemáticos conocidos, y trabajamos con variados ejemplos. En la próxima clase, abordaremos otro aspecto clave en el proceso de definir, que es testearla con ejemplos, lo que nos permite decidir si la definición es coherente.
- Para las definiciones que normalmente se abordan en la Educación Básica debería seguirse un proceso de construcción similar al realizado en esta clase. Se debe problematizar para hacer surgir la necesidad de definir, y partir de un significado intuitivo del concepto que se desea formalizar. También hay que utilizar ideas matemáticas conocidas para los niños en la construcción de la definición, y delimitarla mediante el uso de variados ejemplos. Este es un proceso largo y por lo tanto, probablemente, no se pueden realizar todas sus partes para todos sus conceptos.
- El uso de un lenguaje matemático correcto y preciso es clave para el proceso de definir un concepto. Más aún, este proceso nos ayuda a valorar y ampliar nuestro lenguaje matemático.

Para profundizar

Te sugerimos revisar las siguientes referencias:

Lu, P., Weng, K. & Tuo, Y.. (2013, septiembre). Perimeter in the primary school mathematics curriculum of Singapore. *Journal of the Association of Teachers of Mathematics*, V. 236, pp. 27-30.

Reyes, C., Dissett, L., Gormaz, R. (2013). Capítulo IV. Área y perímetro. *Refip Geometría* (pp. 159 - 168). Santiago, Chile: Ediciones SM.

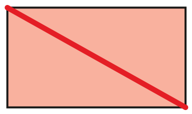
Fecha: ____________________

Nombre: ________________________

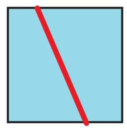
Tarea 1: Trabajando con definiciones

Trabajo individual

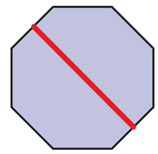
1. Observa las siguientes figuras y los segmentos marcados en ellas:



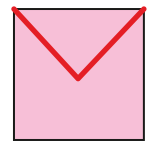
1. Es una alina.



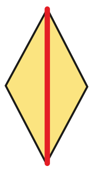
2. No es una alina.



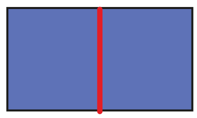
3. No es una alina.



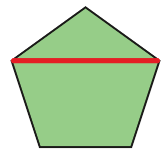
4. No es una alina.



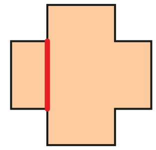
5. Es una alina.



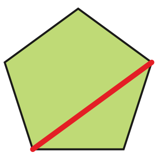
6. No es una alina.



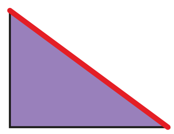
7. Es una alina.



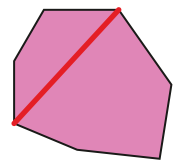
8. Es una alina.



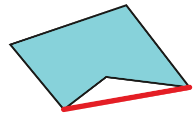
9. Es una alina.



10. No es una alina.

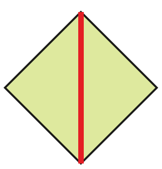
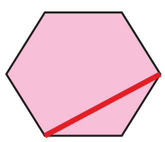
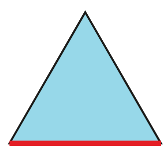
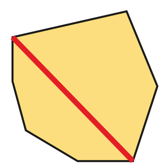
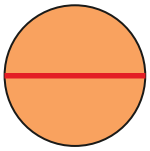
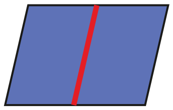
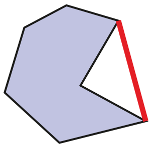
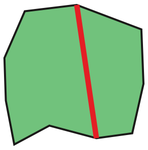


11. Es una alina.



12. Es una alina.

2. En las siguientes figuras se ha marcado un segmento. Indica si estos segmentos son o no *alinas*.

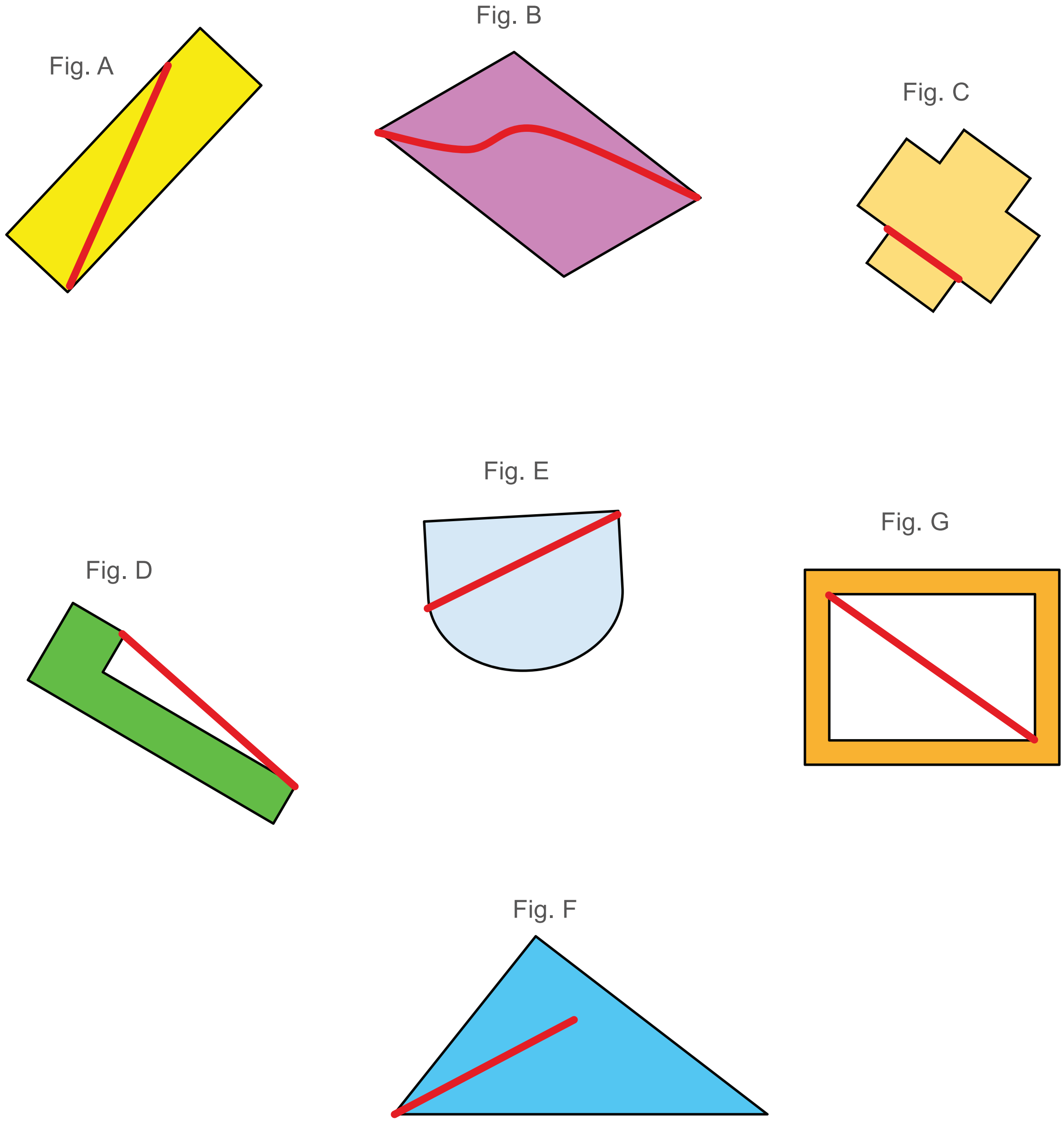
3. A partir de lo anterior, construye una definición de *alina*.

Este problema fue propuesto de "La enseñanza de la Geometría" (López, O. García, S., 2008)

Tarea 1: Trabajando con definiciones

Trabajo en parejas

4. Pide a uno/a de tus compañeros/as que ponga a prueba la definición de *alina* que diste en el ítem 3 en el siguiente grupo de figuras:



MATERIAL

CLASE 2

Actividad 1

Trabajo individual

En la clase anterior nos pusimos de acuerdo en la siguiente definición:

> Un punto del plano se dice del **borde** de la figura si cualquier círculo centrado en él contiene puntos de la figura y puntos que no son de la figura.

Teniendo la definición anterior en mente, remarca el borde de las siguientes figuras:

Figura A

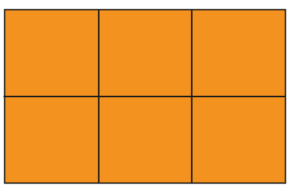


Figura B

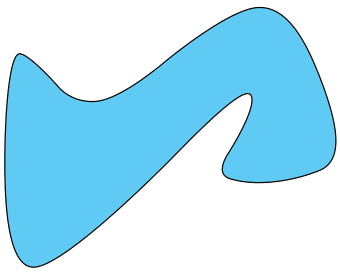


Figura C

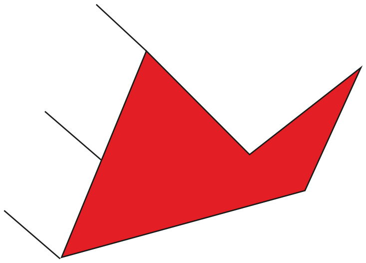


Figura D

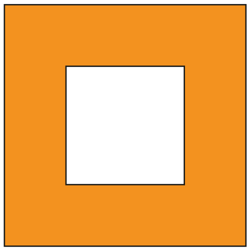


Figura E

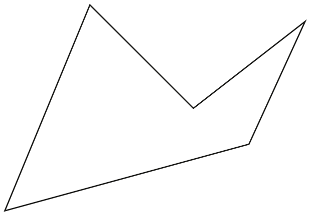
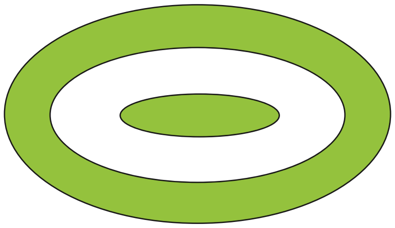


Figura F



Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Fecha: ____________________

Nombre: ________________________

Actividad 2

Trabajo grupal

Considera las siguientes dos definiciones de perímetro dadas en textos escolares:

Definición 1
El perímetro de una figura es la suma de sus lados.

Definición 2
El perímetro de una figura es la longitud total de su frontera o contorno.

A continuación las pondremos a prueba considerando el siguiente grupo de figuras.

Figura A

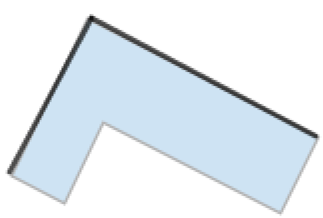


Figura B

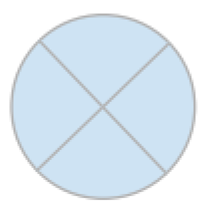


Figura C

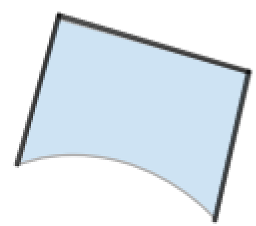


Figura D

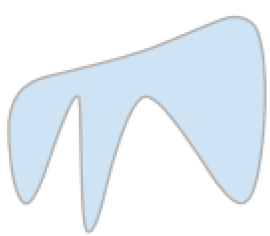


Figura E

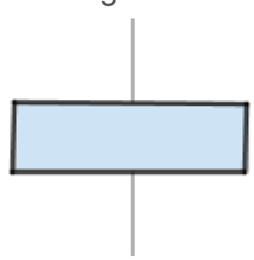
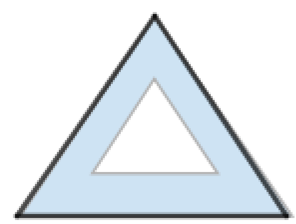


Figura F



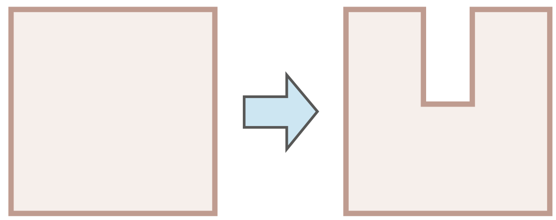
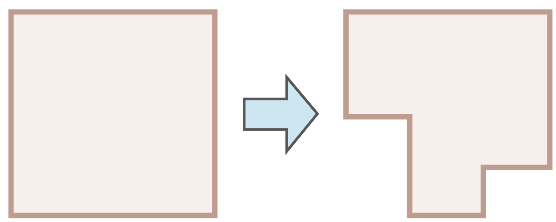
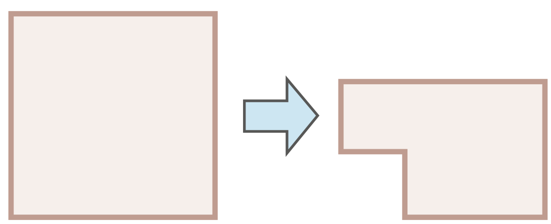
1. Marca las líneas que de acuerdo con cada definición habría que considerar para calcular el perímetro.
2. ¿Cuál de las definiciones encontradas permite calcular el perímetro a una mayor variedad de figuras? ¿Por qué?

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Actividad 3

Trabajo grupal

Las siguientes secuencias de figuras comienzan con un cuadrado al que se le hicieron distintos cortes y se obtuvieron nuevas figuras, como se muestra en las siguientes imágenes:

Secuencia A	
Secuencia B	
Secuencia C	

Considera que todos los ángulos en las figuras son rectos. Sin medir los lados de las figuras, responde la siguiente pregunta:

¿Cuál es la relación entre el perímetro del cuadrado inicial y el de las figuras obtenidas en cada una de las secuencias? ¿Por qué?

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

FICHA DE SISTEMATIZACIÓN

Unidad de aprendizaje

Trabajando matemáticamente con el perímetro

Clase 2

Definiendo perímetro

Meta de la clase

Al finalizar la clase se espera que los futuros profesores definan perímetro como la medida del borde de una figura y usen argumentos visuales para justificar comparaciones entre perímetros.

Palabras clave

Perímetro, razonamiento inductivo, razonamiento deductivo, argumento visual.

Preguntas que ahora puedes responder

- ¿Qué definiciones de perímetro se usan con frecuencia en niveles escolares? ¿Cuán general es una definición de perímetro?
- ¿Cuáles son las líneas que se consideran para calcular el perímetro de una figura?
- ¿Cuál es la importancia de que un futuro profesor estudie definiciones en profundidad?
- ¿Es válido usar argumentos visuales para justificar un razonamiento?
- ¿Qué rol cumple la propiedad de conservación de la longitud en el cálculo de perímetro?

Recapitulemos

- Las actividades realizadas en estas dos clases apuntan a trabajar con definiciones formales muy generales, que típicamente adquieren sentido cuando se consideran figuras que van más allá de las que se suelen trabajar en la matemática escolar. Profundizar conceptos básicos de esta manera es importante para un futuro profesor, pues le dan dominio y confianza al abordar los contenidos escolares. Sin embargo, es importante tener en claro que actividades de este tipo no corresponden a los niveles escolares.

- Si bien en el aula escolar se trabaja con una definición más acotada de figura y con nociones intuitivas de borde y perímetro, muchas veces se conceptualizan a través de ejemplos. Sin embargo, la definición debe ser precisa y el trabajo en torno a estos conceptos debe incluir testearlos en una variedad de figuras (de uso escolar, pero no necesariamente prototípicas), lo que permite desarrollar una comprensión profunda de ellos. Dada una definición no basta con dar ejemplos donde ella se satisfaga; es necesario también dar ejemplos en los que falla algo.

- El análisis de definiciones no es trabajo matemático escolar frecuente, puesto que en muchas situaciones se toma una definición ya hecha y se trabaja con ella. Sin embargo, es importante que en algún momento de la escolaridad se discutan para que los estudiantes se acerquen a la idea de que la matemática es una construcción humana. Por ejemplo, se puede discutir si la definición de rectángulo incluye al cuadrado o no, o si el triángulo isósceles incluye al equilátero o no.

- El trabajo en torno a definiciones involucra a los estudiantes en la construcción colaborativa de conceptos a través de sus experiencias matemáticas, negociando significados y aclarando su comprensión. Un trabajo con definiciones basado en el proceso de construcción requiere cambiar la práctica habitual de comenzar un nuevo tema de estudio con listas de términos matemáticos y definiciones. Una definición simple, proporcionada al comienzo de una lección, no tiene contexto y, por lo tanto, tiene poco o ningún significado para muchos estudiantes (NTCM, 2014). Por ejemplo, si hubiéramos partido dando la definición de borde, sin un trabajo matemático previo, hubiese sido muy complejo dar sentido a dicho concepto.

- Es importante que un profesor seleccione cuidadosamente las definiciones que utilizará en el trabajo con los estudiantes, especialmente, aquellas que construirá con ellos. Para esto debe tener en consideración el currículum, el conocimiento de los estudiantes y el aporte que este trabajo significa para el aprendizaje de la matemática.

- Una manera de comparar longitudes sin conocer sus medidas es imaginar que dichas longitudes se trasladan para superponerse con otras. Esta forma de comparar se sustenta en la propiedad de *conservación de la longitud*, la cual establece que al mover un segmento sin deformarlo, su longitud se conserva.

- Al hacer conjeturas basándose solo en la intuición, se pueden obtener conclusiones erradas. Por esto en matemática es necesario razonar usando propiedades.

- En la literatura matemática es común encontrar definiciones distintas para un mismo concepto. Esto, frecuentemente, ocurre cuando diversos autores tienen propósitos diferentes al abordar un mismo tema. Es conveniente ser cuidadoso al momento de recoger definiciones de varias fuentes y chequear que las que se elijan respondan a las necesidades del trabajo que se desea realizar. Además, hay que ser crítico, puesto que en ocasiones podrían presentar ambigüedades o errores.

- En esta clase elegimos la siguiente definición de perímetro: *El perímetro de una figura es la longitud total de su borde*. Descartamos adoptar una de las definiciones analizadas, puesto que si bien es común encontrarla en textos escolares, tiene un rango de aplicación bastante restringido: por ejemplo, no nos permite calcular el perímetro de un círculo. Por el contrario, la definición escogida es aplicable a muchísimas figuras, en particular, a todas las que se usan comúnmente en la enseñanza escolar.

Para profundizar

Te sugerimos revisar las siguientes referencias:

NTCM, Developing essential understanding of geometry and measurement for teaching mathematics in grades 3–5, 2014, p. 76. Santiago, Chile: Ediciones SM.

Reyes, C., Dissett, L., Gormaz, R. (2013). Capítulo IV. Área y perímetro. *Refip Geometría* (pp. 159-168). Santiago, Chile: Ediciones SM.

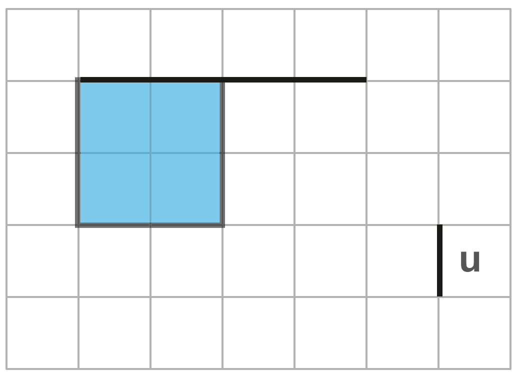
Reyes, C., Dissett, L., Gormaz, R. (2013). Capítulo VI. Razonamiento en geometría. *Refip Geometría* (pp. 264-271). Santiago, Chile: Ediciones SM.

Tarea 2: Trabajando con el perímetro

Trabajo individual

1. Un formador de profesores comenta que es muy común que los escolares tengan ideas distintas acerca del perímetro. De hecho les dice que él lo ha notado con sus propios estudiantes de pedagogía. Por ejemplo, en el siguiente ítem, que no es una figura usual, él ha encontrado frecuentemente las respuestas P = 10 u y P = 12 u.

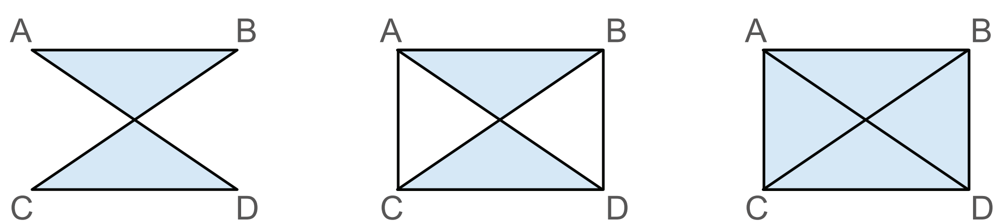
Calcula el **perímetro** (P) de la siguiente figura:



¿Cuáles son las ideas de perímetro que podrían tener los estudiantes y que se reflejan en estas respuestas recogidas por el formador? Explica.

2. Calcula el perímetro a cada una de las figuras, considerando las siguientes longitudes:

AB = CD = 4 cm
AD = BC = 5 cm
AC = BD = 3 cm

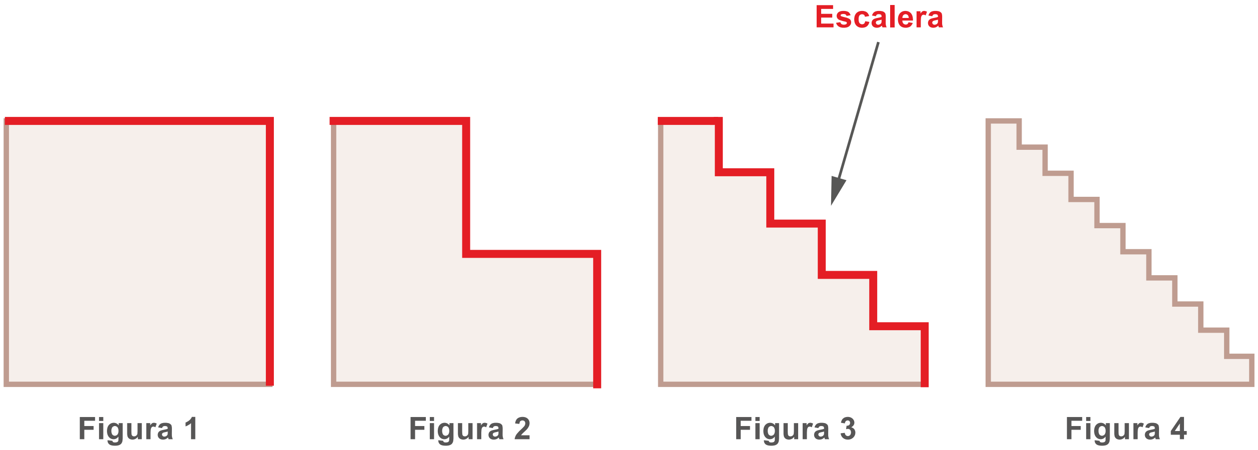


MATERIAL
CLASE 3

Actividad 1

Trabajo grupal

Un profesor del curso de enseñanza de la geometría, presenta las siguientes figuras a sus estudiantes y les pide calcular el perímetro, sabiendo que la Figura 1 es un cuadrado cuyo lado mide 4 unidades.



1. Resuelve la tarea pedida por el formador a sus estudiantes.

Luego, se genera el siguiente diálogo entre el profesor y un alumno:

Profesor: *Si la escalera tuviera muchísimos más peldaños... ¿Qué pasaría con el perímetro de la figura correspondiente?*

Alumno: *Sería igual a la longitud de la diagonal del cuadrado más la de dos lados del cuadrado.*

2. ¿Es cierta la afirmación del alumno? Justifica tu respuesta.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Actividad 2

Trabajo grupal

Considera la secuencia de figuras que se construye a partir de un triángulo equilátero (Fig. 0) mediante el siguiente proceso:

- Se subdivide cada lado del triángulo equilátero en tres segmentos iguales y sobre el tercio central de cada segmento se dibuja un nuevo triángulo equilátero (Fig. 1).
- Luego, sobre cada nuevo segmento se repite este mismo proceso, obteniendo en cada paso una nueva figura.

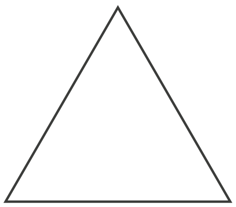


Figura 0

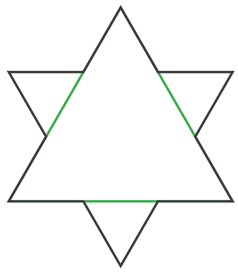


Figura 1

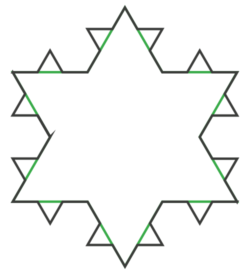


Figura 2

1. ¿Cuántos lados tienen las figuras 1 y 2?

2. Si el lado de la figura 0 mide 27 unidades, ¿cuánto miden los lados de las figuras 1 y 2?

3. Describe una regla que permita encontrar la cantidad de lados de una de las figuras en función de la cantidad de lados de la figura anterior.

4. Describe una regla que permita encontrar la longitud de los lados de una de las figuras en función de la longitud de los lados de la figura anterior.

Actividad 3

Trabajo grupal

Si se mantiene el proceso de construcción de figuras planteado en la actividad anterior, responde:

1. Conociendo la cantidad de lados de alguna de las figuras de la secuencia y la longitud de sus lados, ¿cómo calcularía su perímetro?

2. ¿Cuál es el perímetro de cada una de las seis primeras figuras de la secuencia?

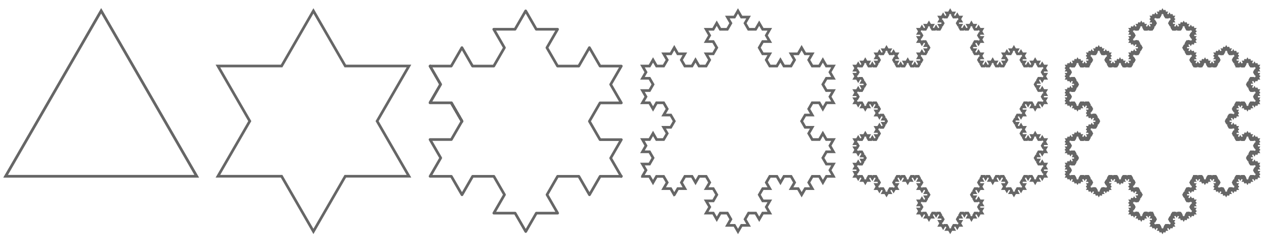


Figura 0 **Figura 1** **Figura 2** **Figura 3** **Figura 4** **Figura 5**

Para tener un registro ordenado de la información utiliza la siguiente tabla:

Figura	**Cantidad de lados**	**Longitud del lado** (en unidades de longitud)	**Perímetro** (en unidades de longitud)
Figura 0			
Figura 1			
Figura 2			
Figura 3			
Figura 4			
Figura 5			

3. Describe y justifica una regla que permita encontrar el perímetro de cada una de las figuras en función del perímetro de la figura anterior.

Material elaborado en el marco del proyecto FONDEF - CONICYT ID16I10119.

Actividad 4

Trabajo grupal

El propósito de las clases 1 y 2 fue construir y probar las definiciones de algunos conceptos matemáticos básicos. El trabajo matemático para lograr esto requiere considerar distintos aspectos:

- Partir de una idea intuitiva.
- Delimitar las características de la noción a definir, en este caso, qué segmentos estaban en el borde y qué segmentos no.
- Formular la definición a partir de conceptos previos, en este caso, definir borde a partir de estar dentro y fuera de un círculo.
- Testear la definición construida.

1. De acuerdo con las actividades de las clases 1 y 2, discutan de qué manera cada una de ellas se hizo cargo de los aspectos de la construcción de la definición mencionados. ¿Qué podrían decir de la elección de la secuencia de actividades propuesta en dichas clases?

2. En esta tercera clase, uno de los propósitos fue analizar los distintos tipos de razonamiento involucrados en la resolución de problemas de perímetro. Distinguimos *razonamiento inductivo* y *deductivo* y también identificamos *razonamientos visuales*. De acuerdo con esta clasificación, ¿qué tipos de razonamientos desarrollamos en cada una de las actividades de la clase?

Clase 3

Actividades	Tipos de razonamientos abordados en la actividad
1.- La escalera infinita.	
2.- Presentando el Copo de nieve.	
3.- Analizando el Copo de nieve.	

FICHA DE SISTEMATIZACIÓN

Unidad de aprendizaje
Trabajando matemáticamente con el perímetro

Clase 3
Razonando con el perímetro

Meta de la clase
Al finalizar la clase se espera que hayas logrado distinguir y valorar los distintos tipos de razonamiento matemáticos involucrados en la resolución de problemas asociados a la noción de perímetro.

Palabras clave
Perímetro, razonamiento inductivo, razonamiento deductivo, argumento visual.

Preguntas que ahora puedes responder

- ¿Qué rol cumplen las propiedades en la justificación de una conjetura?
- ¿Es válido usar argumentos visuales para justificar un razonamiento? ¿Por qué?
- ¿Qué estrategias o razonamientos pueden surgir al resolver problemas sobre perímetro?
- ¿En qué se diferencia un razonamiento deductivo de uno inductivo?

Recapitulemos

- Al hacer conjeturas basándose solo en la intuición, se pueden obtener conclusiones erradas, por esto en matemática es necesario razonar usando definiciones y propiedades.
- Para resolver algunos problemas matemáticos generales puede ser útil estudiar casos particulares y organizar la información que se obtenga de ellos en tablas u otras representaciones que ayuden a detectar posibles relaciones y regularidades.
- El *razonamiento inductivo* es muy importante en matemática, ya que permite, a partir del análisis de casos particulares, producir afirmaciones generales, también llamadas conjeturas, que luego pueden ser justificadas mediante *razonamiento deductivo*. Este razonamiento deductivo nos permite obtener conclusiones y justificaciones generales a partir de otras reglas, propiedades o principios generales.

- El razonamiento inductivo es intuitivo y tendemos inconscientemente a preferir su uso. De hecho, es muy común que aún en situaciones en las que se podría usar directa y fácilmente el razonamiento deductivo, optamos por usar primero un razonamiento inductivo. El futuro profesor debe reconocer que el razonamiento inductivo es una poderosa herramienta para generar conocimiento.

- En la resolución de problemas pueden estar implicados distintos tipos de razonamientos. Para que haya un trabajo matemático rico es necesario diseñar las actividades cuidadosamente de manera que entreguen las oportunidades para que surjan estas maneras de razonar.

- En nuestra formación docente es importante adquirir el hábito de analizar cómo se organizan sus actividades, reconocer los propósitos que cada una de ellas persigue y los distintos tipos de trabajo matemático involucrados, para en el futuro poder planificar clases que permitan a los estudiantes desarrollar conocimientos y habilidades matemáticas amplias.

Para profundizar

Te sugerimos revisar las siguientes referencias:

Reyes, C., Dissett, L., Gormaz, R. (2013). Capítulo IV. Área y perímetro. *Refip Geometría* (pp. 159 - 168). Santiago, Chile: Ediciones SM.

Reyes, C., Dissett, L., Gormaz, R. (2013). Capítulo VI. Razonamiento en geometría. *Refip Geometría* (pp. 264 - 271). Santiago, Chile: Ediciones SM.