


# 6

## Ángulos en triángulos y cuadriláteros

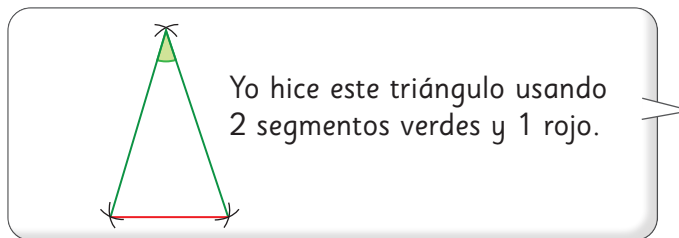
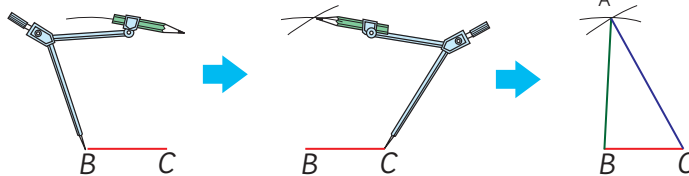
### Construcción de triángulos

1  Construyan varios triángulos diferentes usando los siguientes segmentos.

Tomen las medidas con un compás y dibujen los triángulos usando los segmentos con su color respectivo.



Usé el compás de esta manera para dibujar los triángulos.



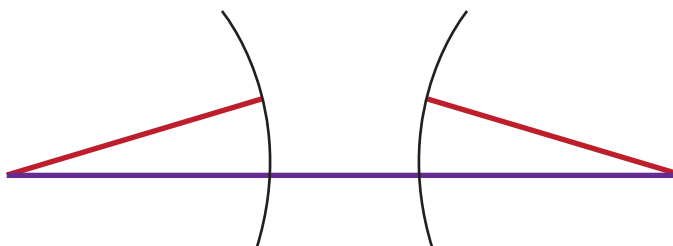
Yo hice este triángulo usando 2 segmentos verdes y 1 rojo.

2 Si elegimos 3 segmentos cualquiera, ¿siempre es posible construir un triángulo?

Traté de hacer un triángulo con dos segmentos rojos y uno morado, pero no me resultó.



¿Por qué no pudo hacerlo?  
¿Cuándo no es posible?



Pensemos cómo deben ser las medidas de los segmentos para poder construir un triángulo.



Para que sea posible construir un triángulo, la suma de las medidas de los dos lados menores debe ser mayor que la medida del tercer lado.

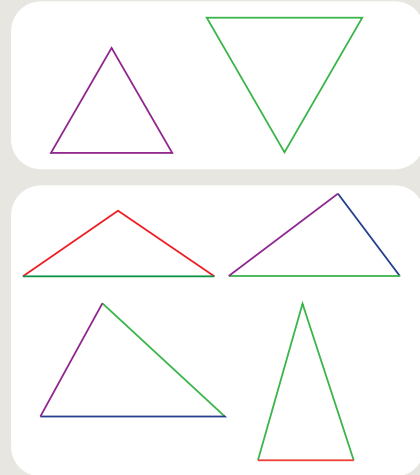
## Clasificación de triángulos

- 3 Agrupa los triángulos que construiste, considerando características comunes entre ellos. Compara los grupos que hiciste con los de tus compañeros.



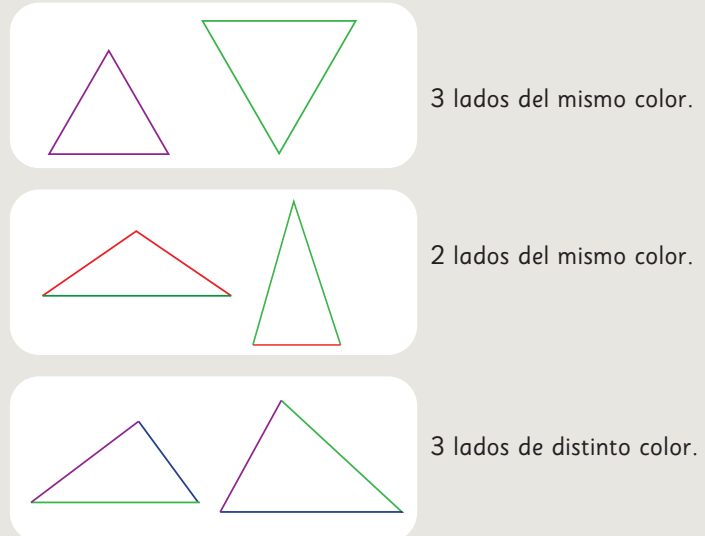
### Idea de Gaspar

Me quedaron dos grupos. Uno con los triángulos que tenían sus tres lados del mismo color y otro con el resto de los triángulos.



### Idea de Ema

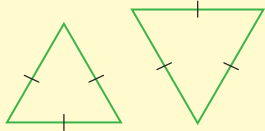
Yo los separé en tres grupos.



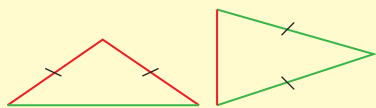
¿Alguna de estas ideas se parece a lo que hiciste?  
¿En qué se parecen? ¿En qué se diferencian?

Los triángulos se pueden clasificar según la medida de sus lados.

- **Triángulo equilátero:** Tiene 3 lados de igual medida.



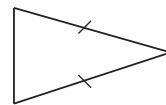
- **Triángulo isósceles:** Tiene 2 lados de igual medida.



- **Triángulo escaleno:** Tiene todos sus lados de distintas medidas.

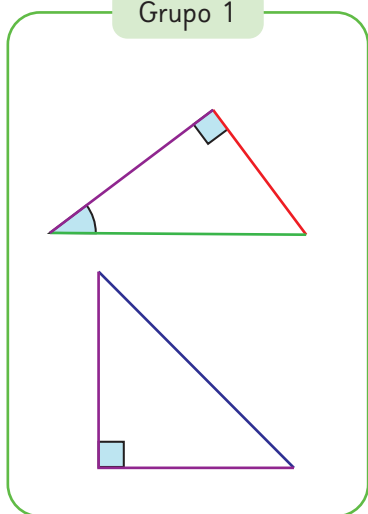


Dos lados de igual medida se marcan con pequeñas líneas iguales, así:

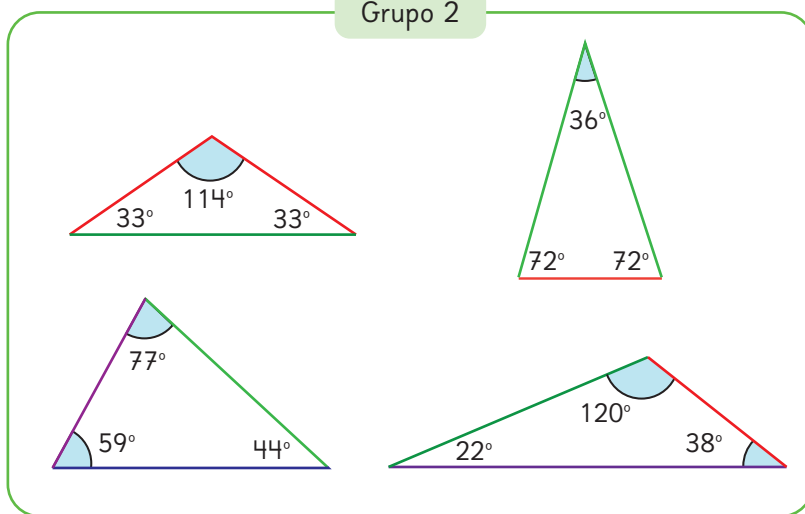


**4** Matías midió algunos ángulos de los triángulos que construyó y los separó en dos grupos.

Grupo 1



Grupo 2



- a) ¿En qué se habrá fijado para agrupar estos triángulos?

Puedes usar como referencia el ángulo recto.

- b) ¿Cómo clasificarías los triángulos del Grupo 2?





Los triángulos se pueden clasificar según la medida de sus ángulos interiores.

- **Triángulo rectángulo:** Tiene 1 ángulo recto.
- **Triángulo obtusángulo:** Tiene 1 ángulo obtuso.
- **Triángulo acutángulo:** Todos sus ángulos son agudos.

Pensemos en las clasificaciones de los triángulos.

- 5** ¿Un triángulo puede ser rectángulo e isósceles a la vez?  
¿Un triángulo puede ser equilátero y obtusángulo a la vez?

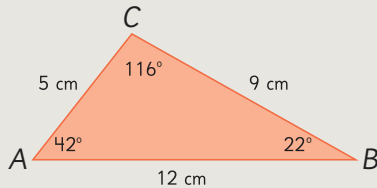
### Relación entre lados y ángulos en un triángulo

- 6** Construye un triángulo cualquiera, mide sus lados y ángulos y ordénalos de mayor a menor. ¿Qué puedes concluir? Comenta con tus compañeros.



Idea de Sami

Construí un triángulo  $ABC$  como este:

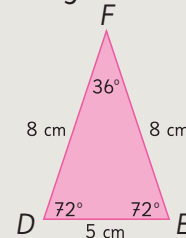


El orden de los lados es: 12 cm, 9 cm y 5 cm.  
El orden de los ángulos es:  $116^\circ$ ,  $42^\circ$  y  $22^\circ$ .  
El ángulo mayor está frente al lado mayor.



Idea de Juan

Construí un triángulo  $DEF$  como este:



El orden de los lados es: 8 cm, 8 cm y 5 cm.  
El orden de los ángulos es:  $72^\circ$ ,  $72^\circ$  y  $36^\circ$ .  
Hay dos lados que miden lo mismo y dos ángulos que miden lo mismo.



En un triángulo:

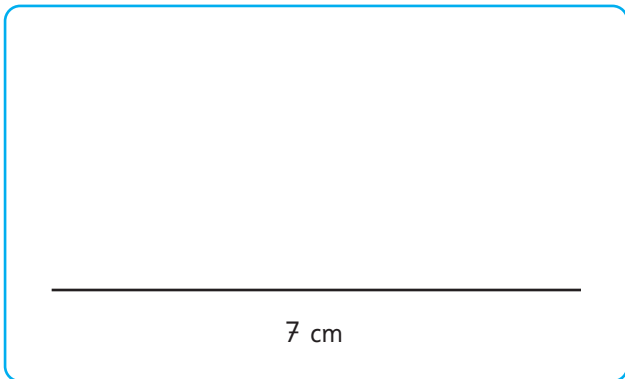
Al lado de mayor medida se opone el ángulo de mayor medida. De la misma manera, al ángulo de mayor medida se opone el lado de mayor medida.

Si dos lados tienen la misma medida, los ángulos opuestos también. De la misma manera, si dos ángulos tienen la misma medida, los lados opuestos a ellos tendrán la misma medida.

## Practica

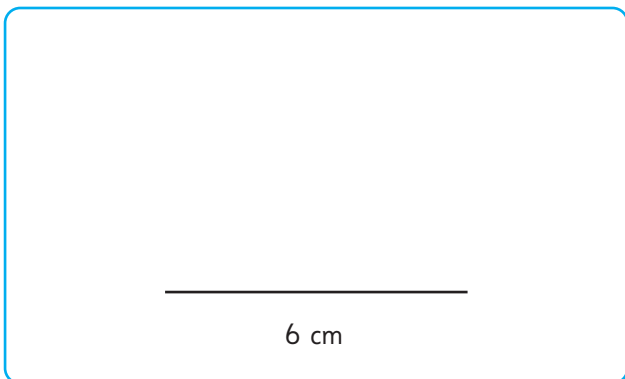
- 1 Construye un triángulo cuyos lados midan 7 cm, 6 cm y 4 cm.

¿Tuviste alguna dificultad para hacerlo? ¿Cuál?



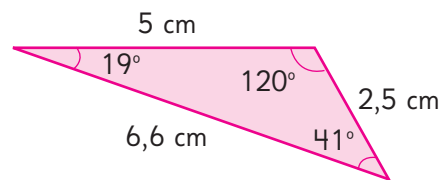
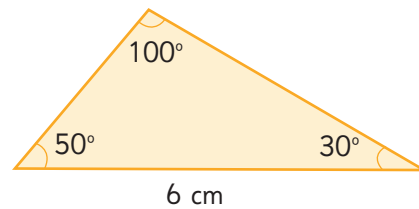
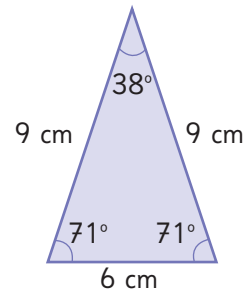
Respuesta:

- 2 Dibuja un triángulo con un lado que mida 6 cm y que se encuentre entre dos ángulos que miden  $110^\circ$  y  $90^\circ$ . ¿Tuviste alguna dificultad para hacerlo? ¿Cuál?



Respuesta:

- 3 Clasifica los siguientes triángulos.



a) Según la medida de sus lados.

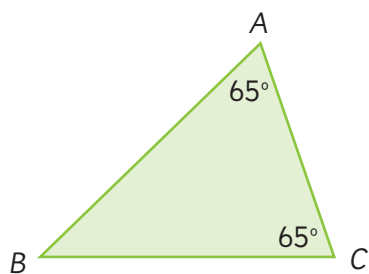
b) Según la medida de sus ángulos.

4 Un estudiante dibujó un triángulo  $ABC$ . Sus ángulos miden  $75^\circ$ ,  $72^\circ$  y  $33^\circ$ .

a) Según la medida de sus ángulos, ¿qué tipo de triángulo es?

b) Según la medida de sus lados, ¿qué tipo de triángulo es?

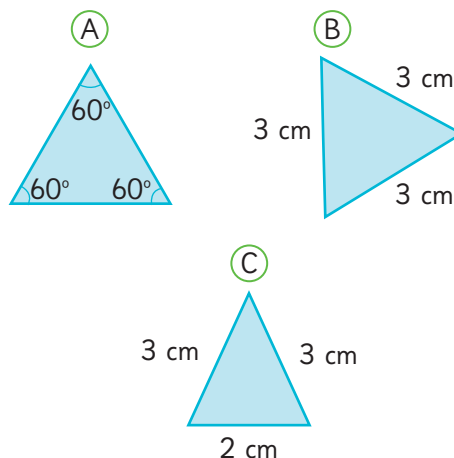
5 Observa el triángulo  $ABC$ .



a) ¿Qué relación hay entre los lados  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$ ?

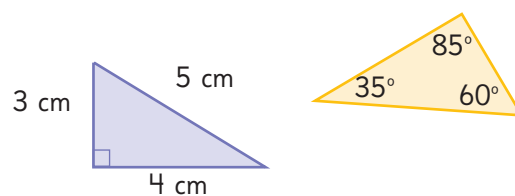
b) Según la medida de sus lados, ¿qué tipo de triángulo es?

6 ¿Cuál de estos triángulos no pertenece al mismo grupo que los otros dos? ¿Por qué?



Respuesta:

7 ¿Qué tienen en común estos triángulos?



Respuesta:

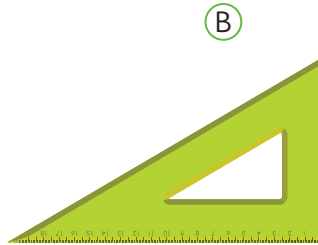
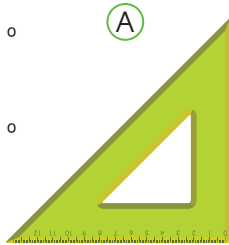
# Ángulos en triángulos

1 Descubre cuánto suman los dos ángulos agudos de una escuadra.

La suma de los dos ángulos es:

(A)  °

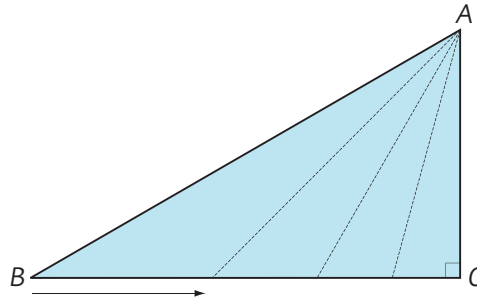
(B)  °



Recuerda que a la medida de un ángulo también le llamamos **ángulo**.



2 Imagina que desplazas el vértice  $B$  acercándote a  $C$  en el siguiente triángulo.



- a) ¿Cómo cambia la medida del  $\angle CBA$ ?
- b) ¿Cómo cambia la medida del  $\angle BAC$ ?
- c) Completa la tabla.

Ángulo $CBA$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$
Ángulo $BAC$	$60^\circ$			
Suma de las medidas				

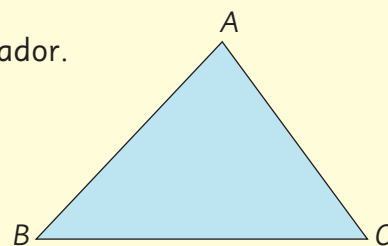
3 ¿Qué puedes concluir acerca de la suma de las medidas de los ángulos  $CBA$  y  $BAC$ ?



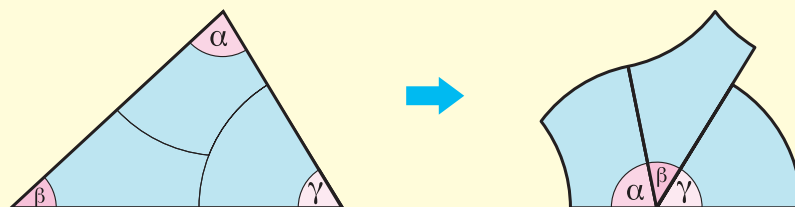
Exploremos la suma de los tres ángulos de cualquier triángulo.

**A** Dibuja un triángulo y mide los ángulos con un transportador.

La suma de los 3 ángulos es  °.

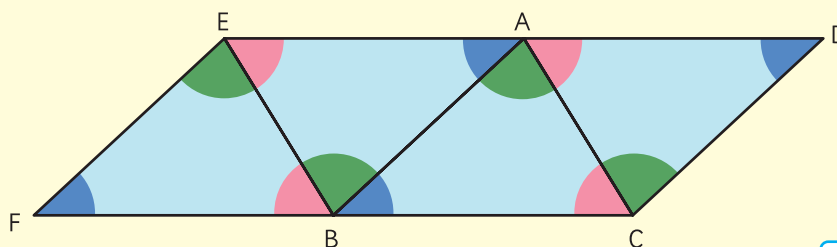


**B** Recorta los 3 ángulos y júntalos como se muestra abajo.



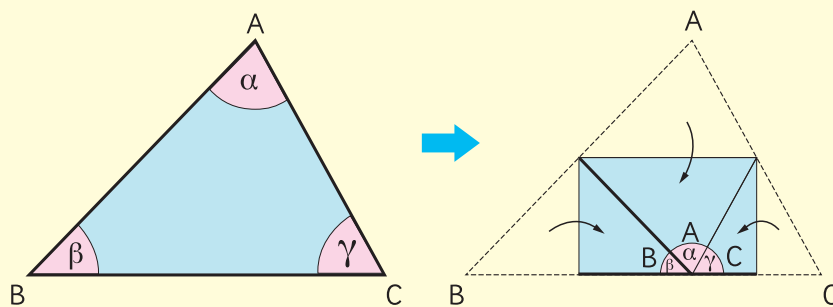
Los 3 ángulos juntos forman una recta, por lo que suman  °.

**C** Une triángulos que tengan la misma forma y tamaño para armar un patrón continuo sin separación entre ellos.



Los 3 ángulos en los vértices A y B forman una recta, por lo que suman  °.

**D** Dobra un triángulo para que los vértices de los 3 ángulos se junten en un punto.

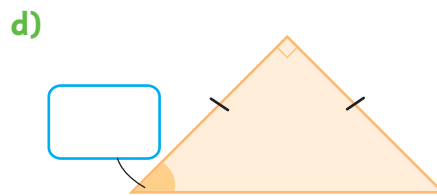
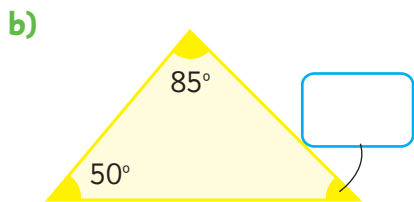
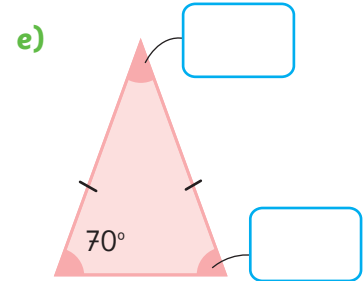
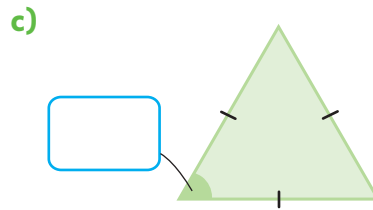
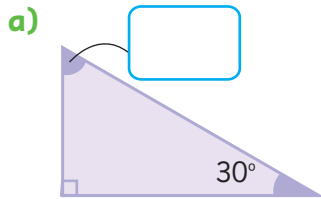


Los 3 ángulos juntos forman una recta, por lo que suman  °.



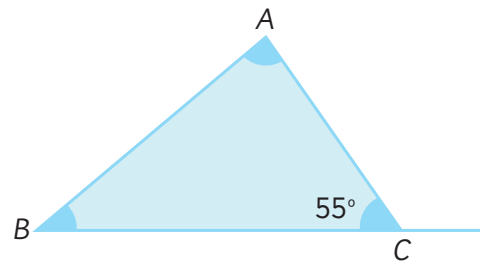
En cualquier triángulo, la suma de los tres ángulos interiores es  $180^\circ$ .

**4** Calcula las medidas de los ángulos desconocidos.



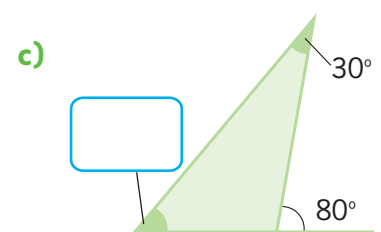
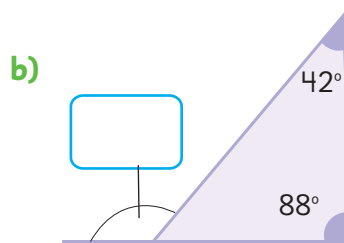
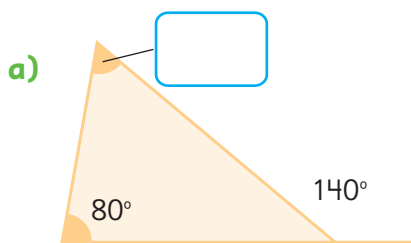
**5** Observa el siguiente triángulo.

- a) ¿Cuál es la suma de los ángulos en  $BAC$  y  $CBA$ ?
- b) ¿Cuánto mide el ángulo exterior marcado en el vértice  $C$ ?
- c) ¿Qué conclusiones sacas sobre las relaciones entre los ángulos interiores  $BAC$  y  $CBA$  y el ángulo exterior en el vértice  $C$ ?



**Ejercita**

Calcula las medidas de los ángulos desconocidos.



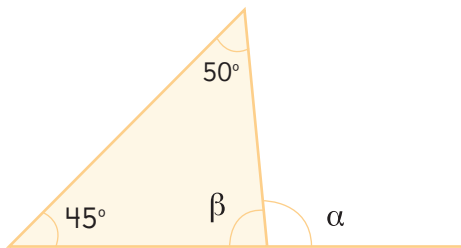
# Practica

1 Completa.

a) La suma de los tres ángulos de un triángulo es .

b) En un triángulo rectángulo, la suma de los ángulos que no son rectos es .

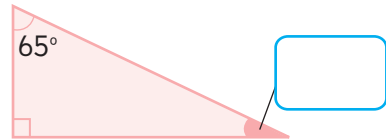
2 En este triángulo, calcula los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ . Escribe los cálculos que hiciste.



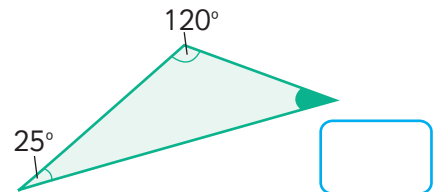
Respuesta:

3 Calcula la medida de los ángulos que se indican.

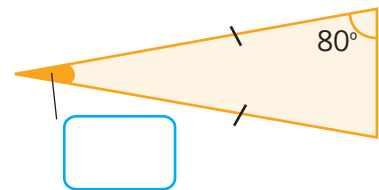
a)



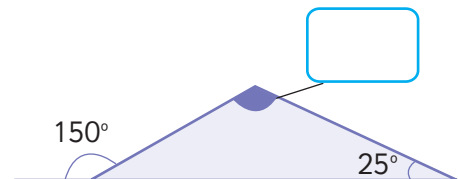
b)



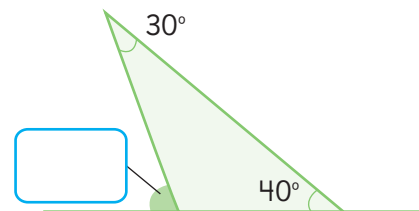
c)



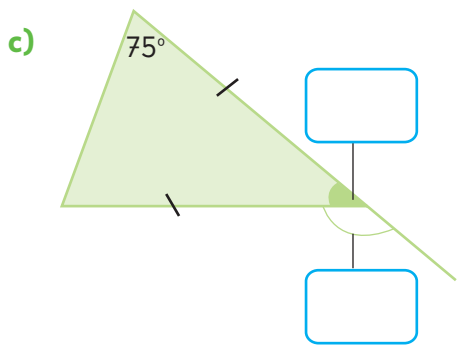
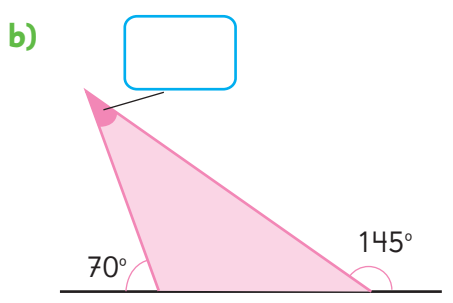
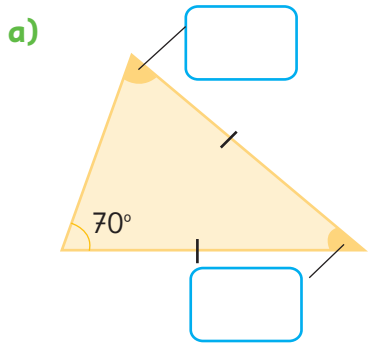
d)



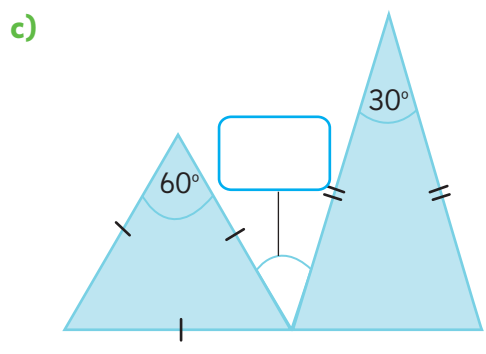
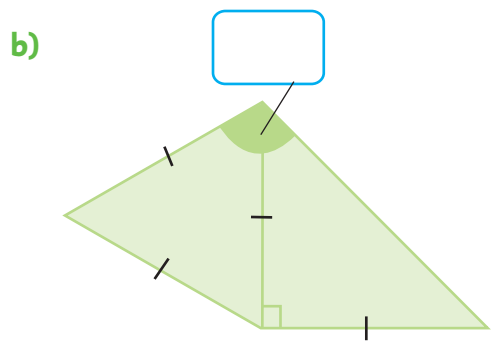
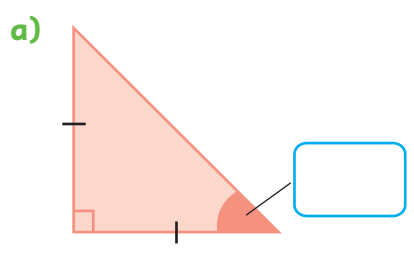
e)




4 Calcula las medidas de los ángulos que se indican.

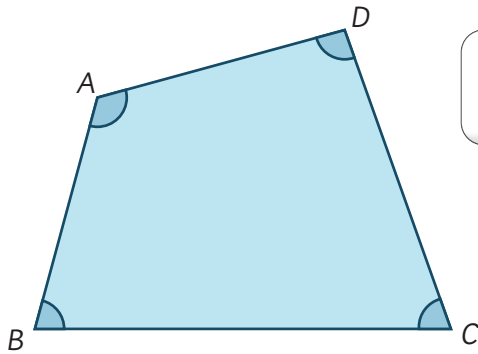


5 Completa con la medida de los ángulos.



# Ángulos en cuadriláteros

1  ¿Cuánto suman los cuatro ángulos de cualquier cuadrilátero?



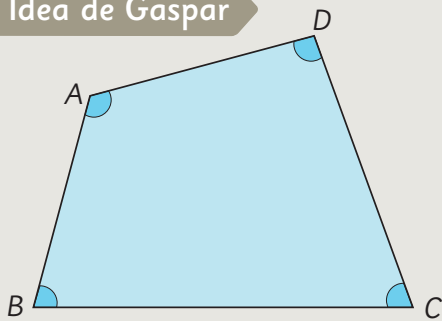
¿Cómo encontramos la suma de los tres ángulos de un triángulo?



Exploremos la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero.



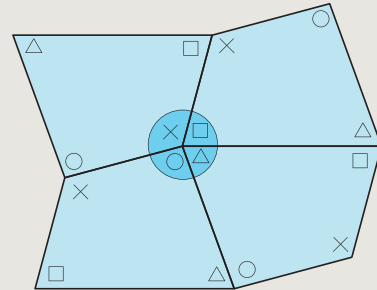
Idea de Gaspar



Con un transportador medí los 4 ángulos y comprobé que sumaban .



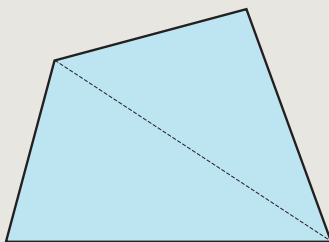
Idea de Sami



Junté 4 cuadriláteros y vi que los 4 ángulos forman un ángulo completo.



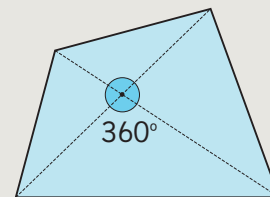
Idea de Ema



Dividí con una diagonal. Quedan dos triángulos. Por lo tanto, la suma de los ángulos es  · 2 = .



Idea de Matías



Lo dividí con diagonales. Quedan cuatro triángulos,  · 4 = .

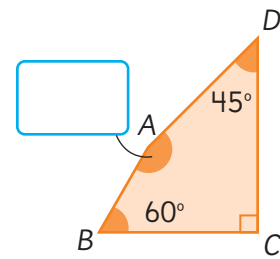
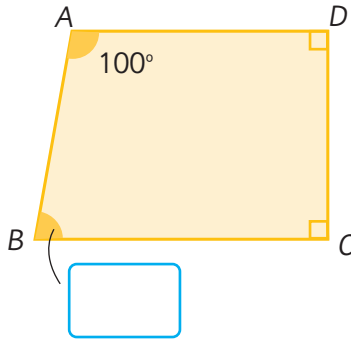
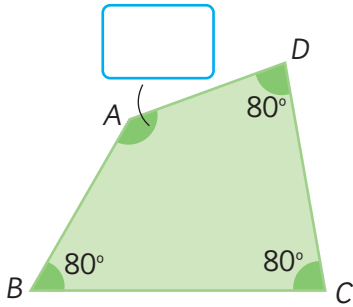
A este valor le resto la suma de los 4 ángulos que se forman en el centro:

-  = .

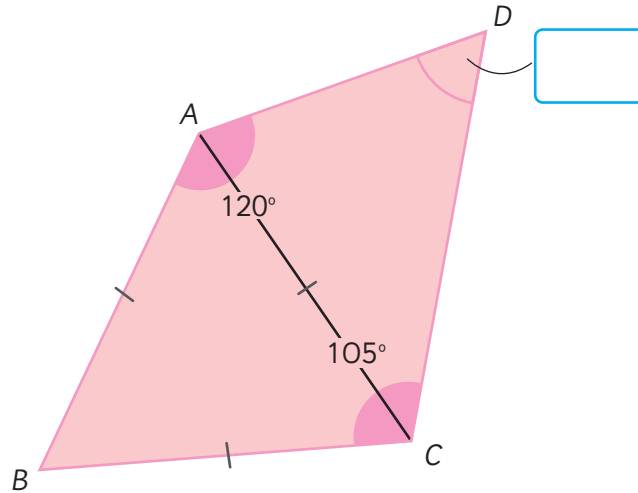


En cualquier cuadrilátero, la suma de los 4 ángulos interiores es  $360^\circ$ .

2 Calcula las medidas de los ángulos desconocidos.



3  $ABC$  es un triángulo equilátero. Calcula la medida del  $\angle ADC$ .



4 Dibuja distintos cuadriláteros de modo que dos de sus lados queden sobre las rectas paralelas.



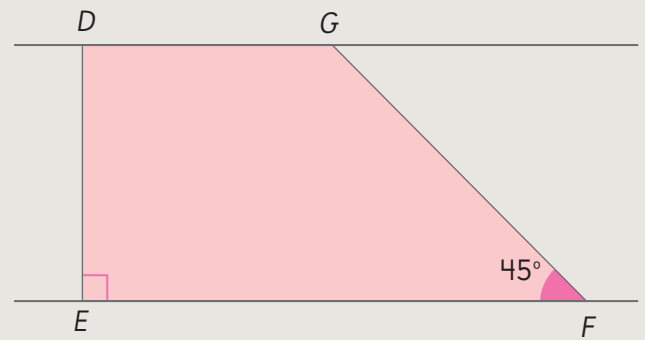
Utiliza regla, compás o transportador para dibujarlos.



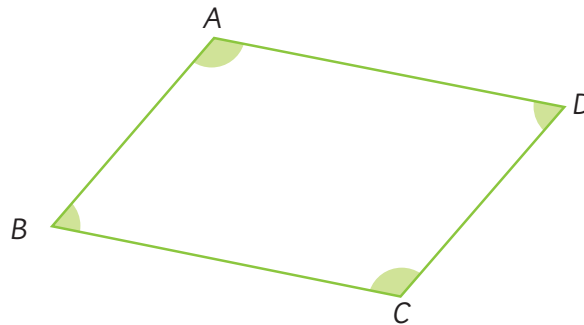


### Idea de Ema

Hice una recta perpendicular a las paralelas, luego medí un ángulo de  $45^\circ$ .



5 Busca relaciones entre los ángulos de un paralelogramo.



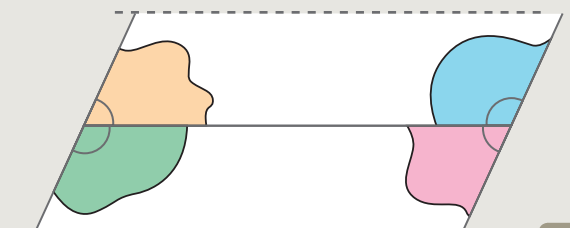
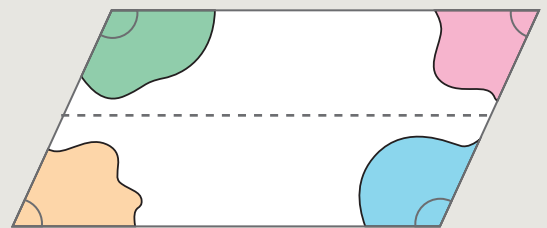
- a) Compara los ángulos opuestos.
- b) Suma pares de ángulos consecutivos.
- c) Suma los 4 ángulos.

En un cuadrilátero se llaman **ángulos consecutivos** aquellos que tienen un lado común.



### Idea de Juan

Al doblar por la mitad un paralelogramo y luego cortarlo, puedo juntar los ángulos consecutivos. Se forman ángulos extendidos.



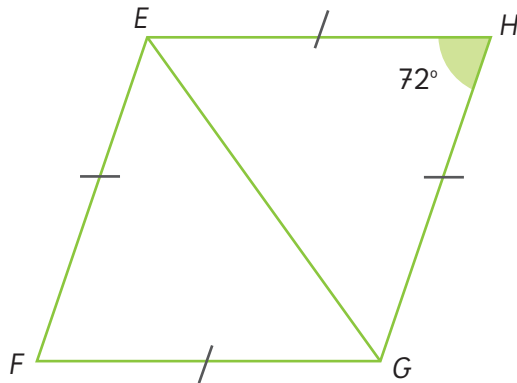


En un paralelogramo:

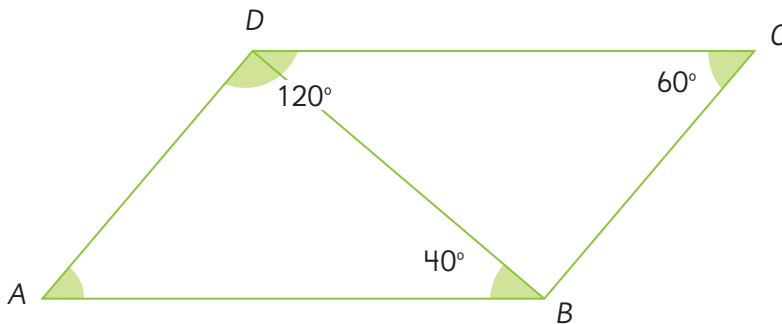
- Los ángulos opuestos miden lo mismo.
- Los ángulos consecutivos suman  $180^\circ$ .

**Ejercita**

- 1  $EFGH$  es un rombo. ¿Cuánto mide el  $\angle HGF$ ?

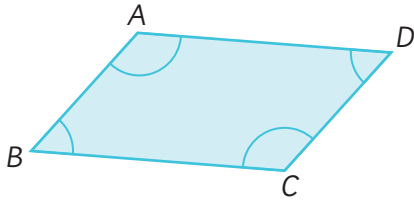


- 2  $ABCD$  es un paralelogramo. ¿Cuánto mide el  $\angle CBD$ ?



# Practica

- 1  $ABCD$  es un paralelogramo. Escribe los ángulos que son iguales a los que se indican.



$$\angle CBA = \boxed{\phantom{000}}$$

$$\angle BAD = \boxed{\phantom{000}}$$

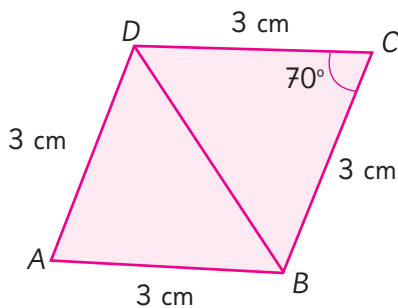
- 2  $ABCD$  es un paralelogramo con los 4 lados de la misma medida.

Calcula los siguientes ángulos.

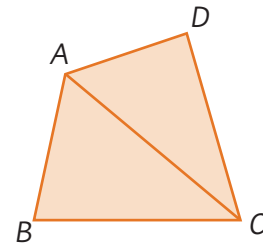
$$\angle BAD = \boxed{\phantom{000}}$$

$$\angle ADC = \boxed{\phantom{000}}$$

$$\angle CBA = \boxed{\phantom{000}}$$



- 3 Una de las estrategias para calcular la suma de los 4 ángulos de un cuadrilátero se basa en descomponerlo en 2 triángulos trazando una de las diagonales.



Completa la suma de los ángulos de los 2 triángulos.

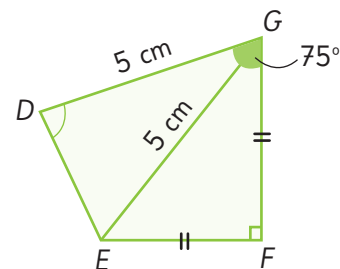
$$\angle CBA + \angle ACB + \angle BAC = \boxed{\phantom{000}}$$

$$\angle ACD + \angle CDA + \angle DAC = \boxed{\phantom{000}}$$

Completa la suma de los ángulos del cuadrilátero.

$$\begin{aligned} &\angle CBA + \angle DCB + \angle ADC \\ &+ \angle BAD = \boxed{\phantom{000}} \end{aligned}$$

- 4 En el cuadrilátero  $DEFG$ ,  $\angle DGF = 75^\circ$ . Calcula el  $\angle EDG$  y el  $\angle FED$ . Ten en cuenta que el triángulo  $DEG$  es isósceles, y que símbolos iguales indican la misma medida.

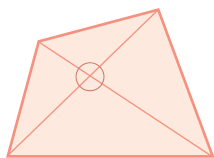


$$\angle EDG = \boxed{\phantom{000}} \quad \angle FED = \boxed{\phantom{000}}$$

La suma de los 4 ángulos es  $\boxed{\phantom{000}}$ .

- 5 Una estrategia para calcular la suma de los 4 ángulos en un cuadrilátero es descomponerlo en 4 triángulos dibujando 2 rectas diagonales.

Completa.



- a) La suma de los ángulos interiores de cada triángulo es .

- b) La suma de todos los ángulos de los 4 triángulos equivale a:

$$\boxed{\phantom{000}} \cdot 4 = \boxed{\phantom{000}}$$

- c) Los ángulos donde se cortan las diagonales no son del cuadrilátero, entonces se debe restar .

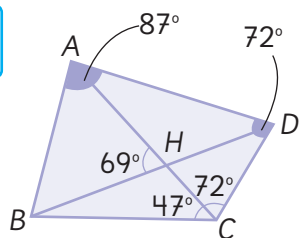
- d) La suma de los ángulos del cuadrilátero es:

$$\boxed{\phantom{000}} - \boxed{\phantom{000}} = \boxed{\phantom{000}}$$

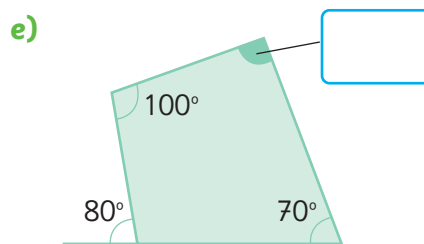
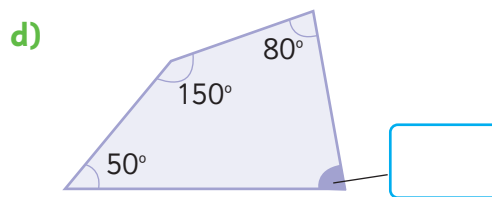
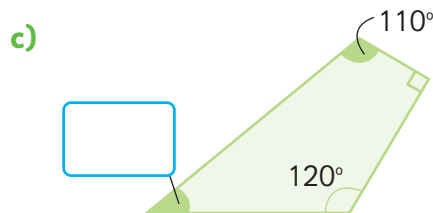
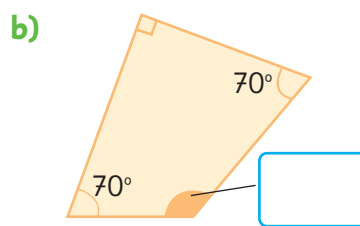
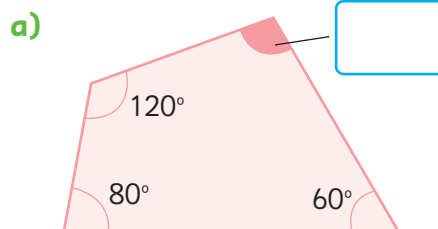
- 6  $ABCD$  es un cuadrilátero. Calcula las medidas de:

$$\angle CBA = \boxed{\phantom{000}}$$

$$\angle CBH = \boxed{\phantom{000}}$$

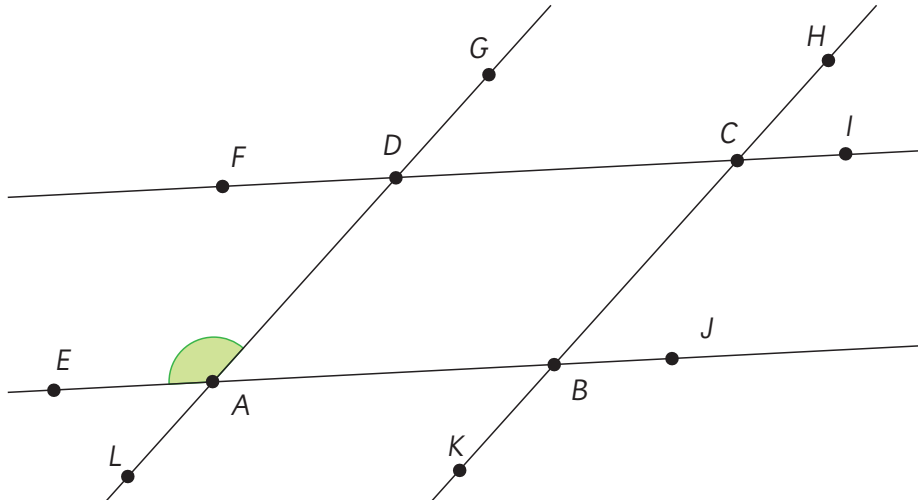


- 7 Calcula la medida de cada ángulo y completa el recuadro.

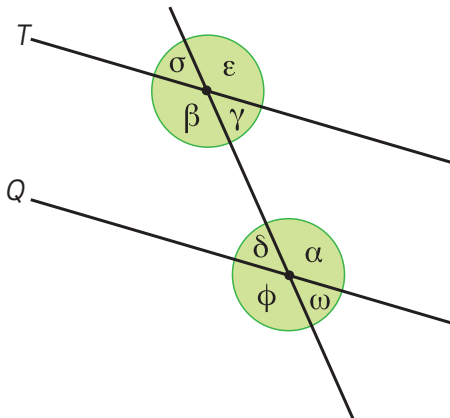


# Ángulos en rectas paralelas cortadas por una transversal

- 1  $ABCD$  es un paralelogramo. Identifica en esta figura todos los ángulos que miden lo mismo que el  $\angle DAE$ .



- 2 Sabiendo que  $T \parallel Q$  y que  $\alpha$  mide  $130^\circ$ , ¿cuál es la medida de los otros ángulos?



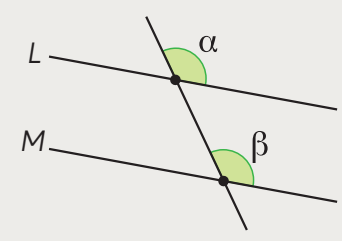
Recuerda que  $T \parallel Q$  denota que la recta  $T$  es paralela con la recta  $Q$ .



Una recta que intersecta a otras dos rectas se llama **transversal**.

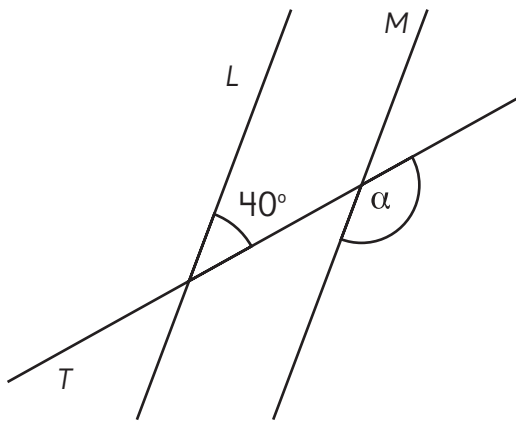
Si dos rectas son intersectadas por una transversal, los ángulos que se forman al mismo lado de la transversal se denominan **correspondientes**. Si estos ángulos miden lo mismo, las rectas son paralelas.

En la figura,  $\alpha$  y  $\beta$  son correspondientes y miden lo mismo, por lo tanto  $L \parallel M$ .



3 Si  $L \parallel M$ , ¿cuánto mide el ángulo  $\alpha$ ?

Explica a tus compañeros cómo lo hiciste.



Si una transversal interseca a dos rectas paralelas, los ángulos correspondientes que se forman miden lo mismo.

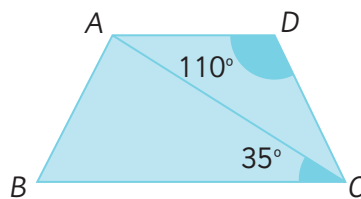


Si dos rectas paralelas son intersectadas por una transversal, se pueden formar:

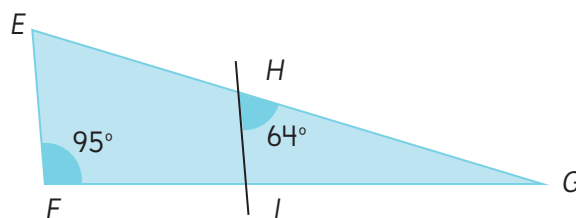
- 8 ángulos rectos o;
- 4 ángulos agudos que miden lo mismo y 4 ángulos obtusos que miden lo mismo. El ángulo agudo con el ángulo obtuso son suplementarios, por lo tanto suman  $180^\circ$ .

**Ejercita**

1  $ABCD$  es un trapecio en el que  $AD \parallel BC$ . ¿Cuánto mide  $\angle DCA$ ?



2 En la figura,  $EF \parallel HI$ . ¿Cuánto miden  $\angle FEG$  y  $\angle HGI$ ?

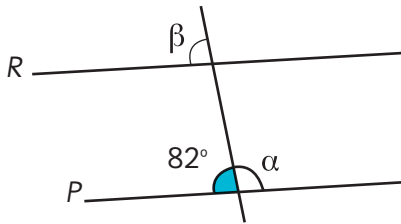


Alarga los lados de las figuras para observar los ángulos entre paralelas.

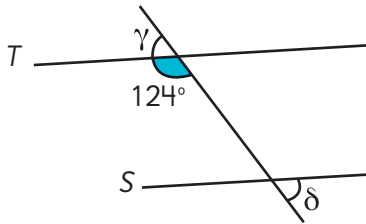
# Practica

1 Calcula la medida de los ángulos indicados en cada figura.

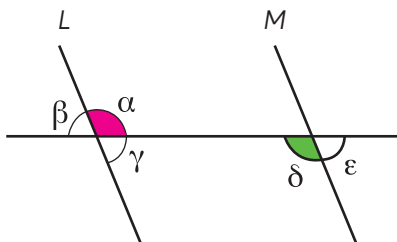
a) Si  $P \parallel R$ , ¿cuánto miden  $\alpha$  y  $\beta$ ?



b) Si  $S \parallel T$ , ¿cuánto miden  $\gamma$  y  $\delta$ ?



2 Si  $L \parallel M$ , identifica los ángulos que tienen la misma medida.

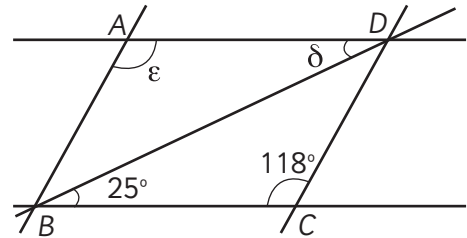


Calcula la medida de los siguientes ángulos.  
Usa un transportador.

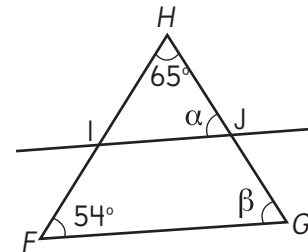
$\angle \alpha =$

$\angle \beta =$

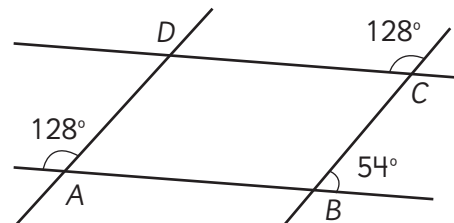
3  $ABCD$  es un paralelogramo. Calcula las medidas de  $\angle ADB$  y  $\angle BAD$ .



4 En el triángulo,  $FG \parallel IJ$ . Calcula la medida de  $\angle JGF$  y  $\angle HJI$ .



5 Analiza si los lados del cuadrilátero son paralelos.



¿Es  $AB \parallel CD$ ?

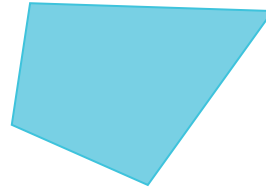
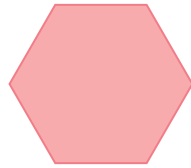
¿Por qué?

¿Es  $AD \parallel BC$ ?

¿Por qué?

# Teselados

- 1 Cubre completamente una hoja en blanco usando solo una de estas figuras. No debes dejar espacios sin cubrir y las figuras no se pueden poner encima de otra. Usa el **Recortable 5**.



- a) ¿Fue posible cubrir la hoja usando cada figura? Comenta.  
b) ¿Qué hiciste con las figuras para cubrir la hoja?



**Teselar** un plano con figuras es cubrirlo completamente:

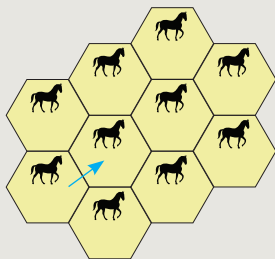
- sin dejar espacios entre figuras y
- sin superponer figuras.

- 2 ¿Cómo moviste las figuras para teselar?



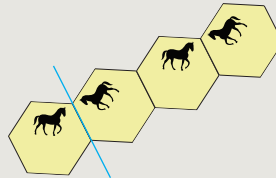
**Idea de Ema**

Yo trasladé el hexágono y pude teselar.



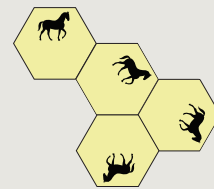
**Idea de Sofía**

Refleje el hexágono considerando un eje de reflexión y me resultó.



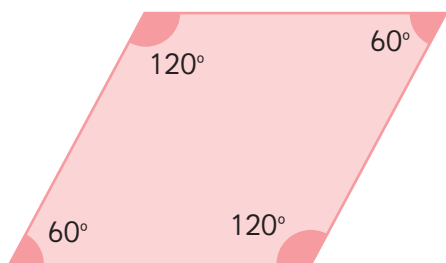
**Idea de Matías**

Yo fui rotando el hexágono para cubrir.



Para teselar el plano con una figura, realizamos una o más transformaciones isométricas de ella. Recuerda que las transformaciones isométricas son: traslación, reflexión y rotación.

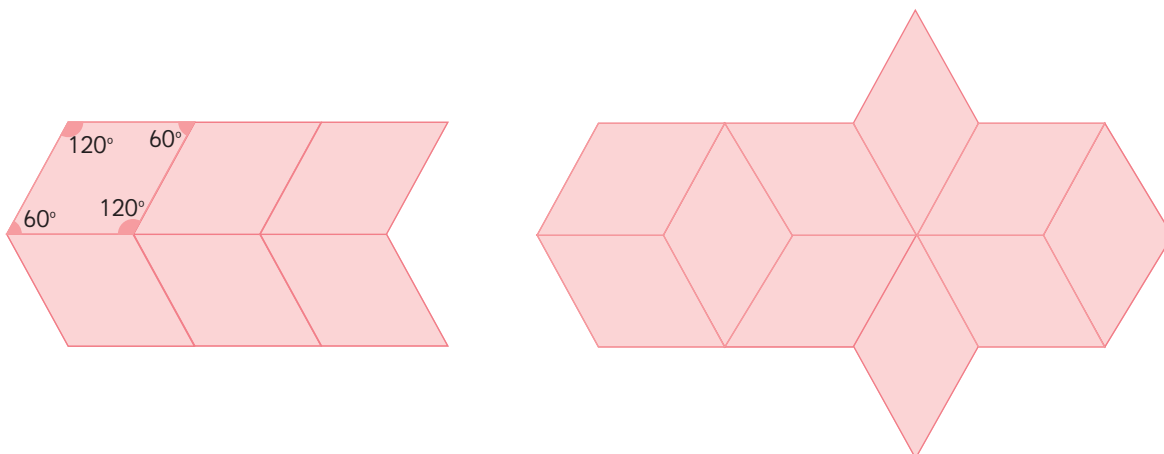
- 3 Usa el **Recortable 5** para construir una teselación con el rombo usando traslaciones. Explica cómo moviste la figura para cubrir el plano.



Realiza el teselado en una hoja en blanco.

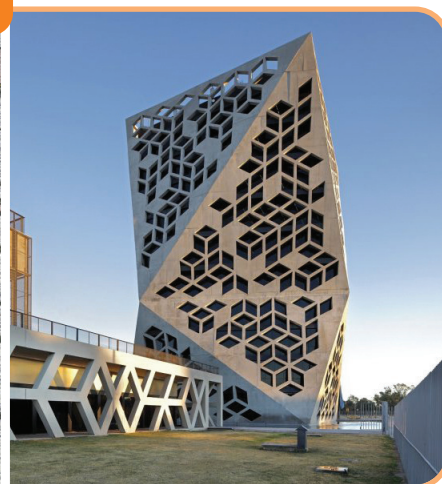
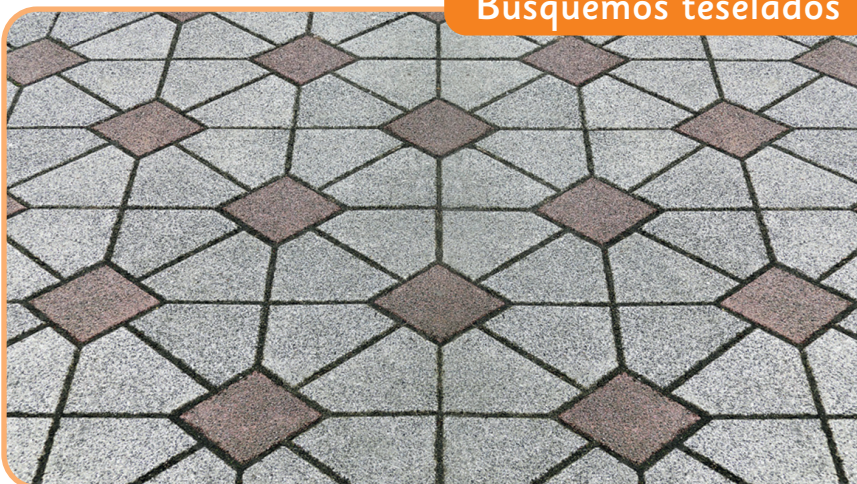


- 4 Gaspar efectuó dos teselaciones diferentes con el rombo. Describe los movimientos que pudo haber hecho para conseguir las.



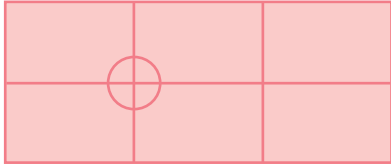
Para teselar el plano con una figura, la suma de los ángulos que se juntan en un vértice debe ser  $360^\circ$ .

### Busquemos teselados



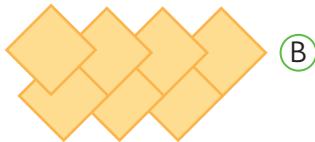
# Practica

- 1 Un estudiante hizo un teselado con un rectángulo. ¿Cuántos ángulos se juntan en cada vértice y cuánto suman?



Respuesta:

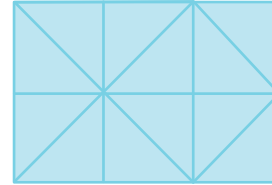
- 2 Estos teselados están incorrectos. Explica los errores en cada uno de ellos.



Teselado (A):

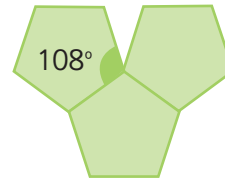
Teselado (B):

- 3 ¿Con cuál transformación isométrica de un triángulo se puede hacer este teselado?



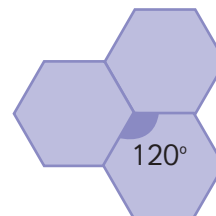
Respuesta:

- 4 ¿Por qué no es posible hacer un teselado con este pentágono?



Respuesta:

- 5 ¿Es posible teselar con este hexágono? ¿Por qué?

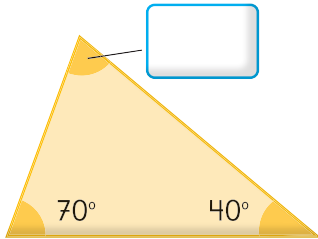


Respuesta:

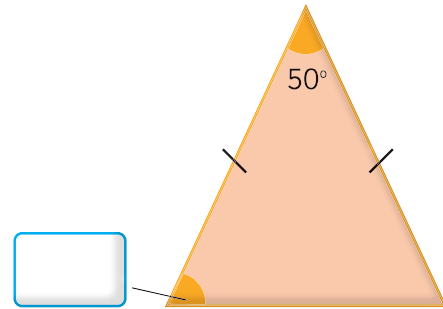
# Ejercicios

1 Calcula las medidas de los ángulos.

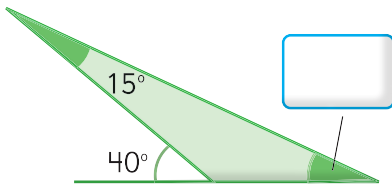
a)



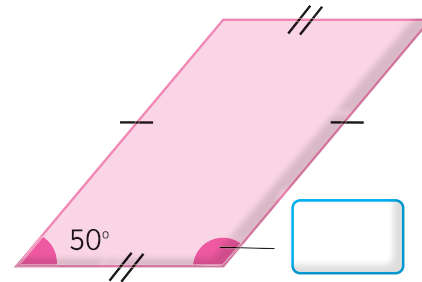
e)



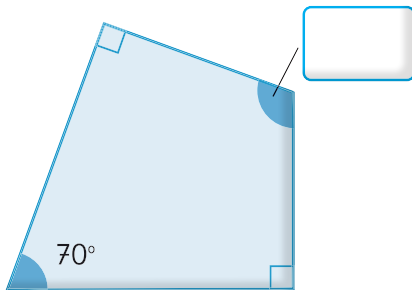
b)



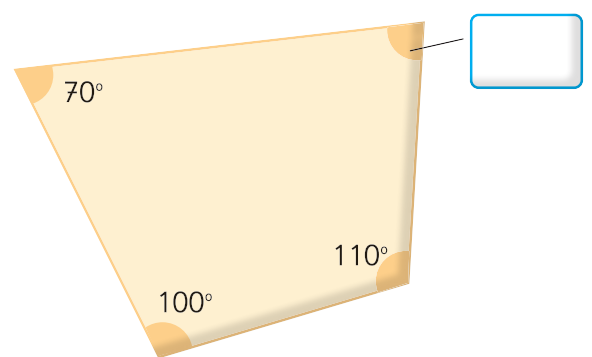
f)



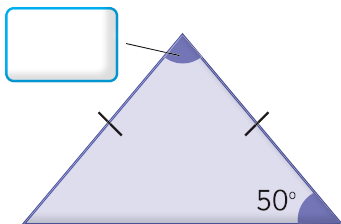
c)



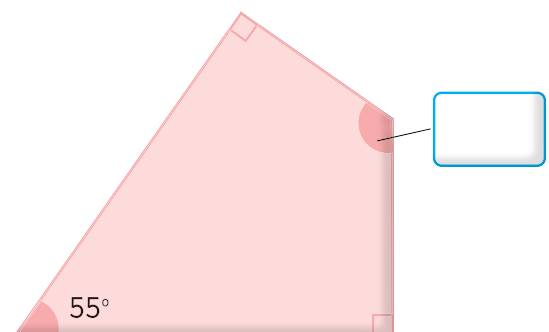
g)



d)

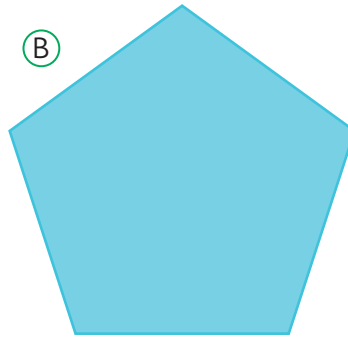
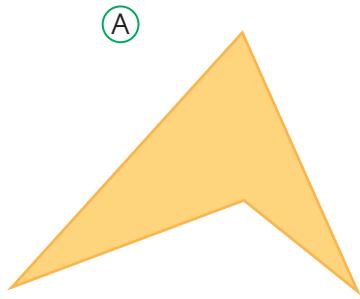


h)

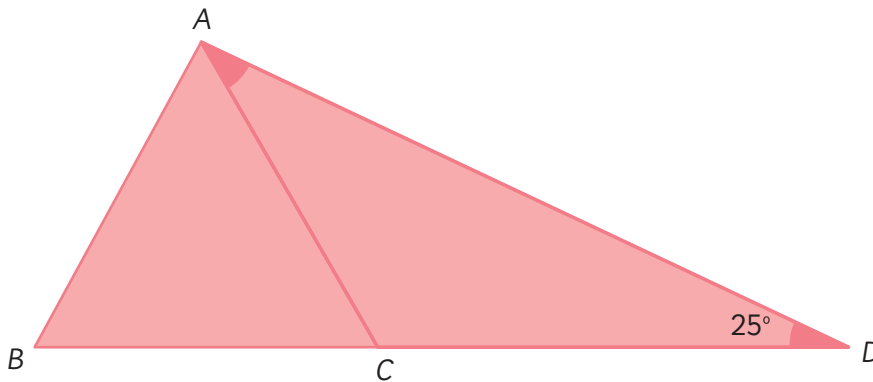


# Problemas

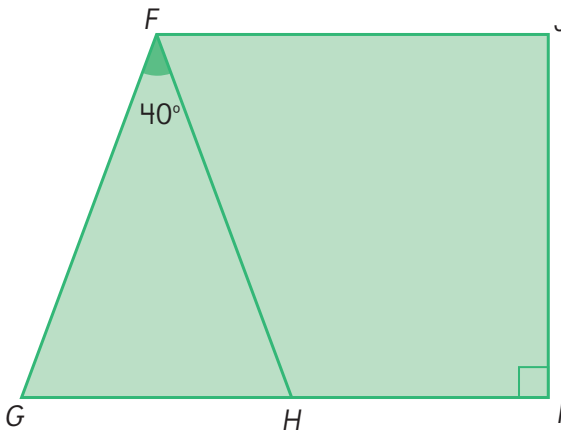
- 1 Ema intentó hacer un teselado con cada una de estas figuras, pero con una de ellas no le resultó. ¿Cuál habrá sido? ¿Por qué con esa figura no se logra cubrir el plano? Usa el **Recortable 5** para comprobar tu respuesta.



- 2 En la figura,  $ABC$  es un triángulo equilátero. ¿Cuánto mide  $\angle CAD$ ?



- 3 En la figura,  $\overline{FG}$  y  $\overline{FH}$  miden lo mismo.  $GI \parallel FJ$  y  $HI \perp IJ$ . Calcula el  $\angle HFJ$ .



$HI \perp IJ$  denota que son perpendiculares.

