Aula360
Aprendizaje para el siglo XXI

Apuntes Unidad 4

Pruebas de hipótesis

fcfm
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

CMM
Centro de Modelamiento Matemático

Curso: Probabilidad y estadística descriptiva
Unidad 4 : Inferencia estadística
Tema: Pruebas de hipótesis.
Contenido: Pruebas de hipótesis

PRUEBA DE HIPÓTESIS

Una **hipótesis estadística** o simplemente hipótesis corresponde a una aseveración con respecto a un parámetro de la distribución asociada a una población.

Una prueba de hipótesis es una metodología que nos permite determinar si los datos de una muestra proporcionan evidencia suficiente para rechazar o no una hipótesis sobre un parámetro de la distribución de la población. En una prueba de hipótesis se debe confrontar dos afirmaciones acerca de la hipótesis de interés:

- Una se denomina **hipótesis nula**, denotada por H_0, y corresponde al valor del parámetro que se cree cierto inicialmente.

- La otra se denomina **hipótesis alternativa**, que se denota como H_1 y es una aseveración que indica un cambio a evaluar en el valor del parámetro respecto de H_0. Esto se puede expresar como que el parámetro ha aumentado, ha disminuido, o que es distinto.

Es importante tener en cuenta de que la hipótesis alternativa H_1 se plantea para buscar evidencia de un cambio en el valor del parámetro, y se determina según la pregunta que se busca responder (si es mayor, menor o distinto). La hipótesis nula, H_0, suele ser el complemento de lo definido en H_1.

Debido a que en general no es posible acceder a los datos de toda la población, debemos decidir cuál de las dos afirmaciones es correcta a partir de una muestra aleatoria.

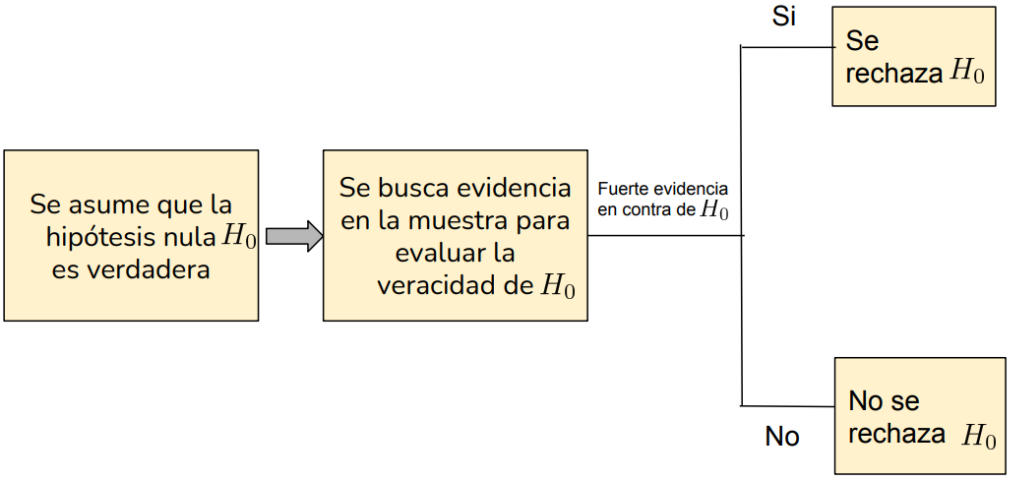
La metodología es suponer que la hipótesis nula H_0 es verdadera, y se busca ver si la muestra nos provee de evidencia que contradiga esta suposición.

Es importante tener en cuenta que, dada la aleatoriedad del fenómeno en estudio, no es posible afirmar con certeza que una hipótesis es verdadera, por lo que a lo más se puede “rechazar” una en favor de la otra:

- La hipótesis nula será rechazada en favor de la hipótesis alternativa solo si la evidencia que arroja la muestra sugiere que H_0 es falsa.

- Si la muestra no contradice fuertemente a H_0 se acepta que esta hipótesis sigue siendo válida.

Entonces, las dos posibles conclusiones derivadas de un análisis de prueba de hipótesis son rechazar o no H_0:



PRUEBAS DE HIPÓTESIS UNILATERALES Y BILATERALES

En una prueba de hipótesis, H_1 se plantea para buscar evidencia de un cambio en el valor del parámetro, y se determina según la pregunta que se busca responder (si es mayor, menor o distinto). Las pruebas de hipótesis generalmente tendrán una de las siguientes tres formas:

Hipótesis nula		Hipótesis alternativa
$H_0 : \text{Parámetro} = \text{valor supuesto}$	vs	$H_1 : \text{Parámetro} \neq \text{valor supuesto}$
$H_0 : \text{Parámetro} \leqslant \text{valor supuesto}$	vs	$H_1 : \text{Parámetro} > \text{valor supuesto}$
$H_0 : \text{Parámetro} \geqslant \text{valor supuesto}$	vs	$H_1 : \text{Parámetro} < \text{valor supuesto}$

Curso: Probabilidad y estadística descriptiva
Unidad 4 : Inferencia estadística
Tema: Pruebas de hipótesis.
Contenido: Pruebas de hipótesis

Las pruebas de hipótesis se pueden clasificar en dos tipos, bilaterales y unilaterales. Las pruebas bilaterales corresponden a hipótesis de la forma:

$$H_0 : \text{Parámetro } = \text{valor supuesto}$$
$$H_1 : \text{Parámetro } \neq \text{valor supuesto}$$

En este caso rechazaremos la hipótesis nula, H_0, cuando el valor estimado del parámetro sea extremo, ya sea notablemente menor o mayor en comparación al valor supuesto.

Las pruebas unilaterales son de dos formas:

$H_0 : \text{Parámetro } \leqslant \text{valor supuesto}$ $H_1 : \text{Parámetro } > \text{valor supuesto}$	$H_0 : \text{Parámetro } \geqslant \text{valor supuesto}$ $H_1 : \text{Parámetro } < \text{valor supuesto}$

En estos casos rechazaremos H_0 cuando, a partir de la muestra, el valor estimado del parámetro sea mucho mayor o mucho menor que el valor supuesto, respectivamente.

PRUEBA DE HIPÓTESIS Y TIPOS DE ERROR

Recordemos que una prueba de hipótesis es una metodología que nos permite determinar si los datos de una muestra proporcionan evidencia suficiente para rechazar o no la hipótesis nula H_0, sobre un parámetro de la distribución de la población. Cuando decidimos rechazar o no rechazar la hipótesis nula H_0, tenemos cuatro posibles escenarios:

1. Se rechaza una hipótesis verdadera.
2. No se rechaza una hipótesis verdadera.
3. Se rechaza una hipótesis falsa.
4. No rechaza una hipótesis falsa.

Realidad

Resultados de la prueba	H_0 Verdadera	H_0 Falsa
Rechazar H_0	**Decisión incorrecta**. Se rechaza una hipótesis verdadera.	**Decisión correcta**. Se rechaza una hipótesis falsa.
No rechazar H_0	**Decisión correcta**. No se rechaza una hipótesis verdadera.	**Decisión incorrecta**. No se rechaza una hipótesis falsa.

Cuando una hipótesis es verdadera y no la rechazamos (opción 2) o si rechazamos una hipótesis falsa (opción 4), hemos tomado la decisión correcta. Pero si rechazamos una

hipótesis verdadera (opción 1) o no se rechaza una hipótesis falsa (opción 3) hemos cometido un error.

El **nivel de significancia**, también denominado α se define como la **probabilidad de cometer un error tipo I.** El complemento del nivel de significancia α**, es decir** $(1-\alpha)$**,** corresponde **al nivel de confianza** de la prueba de hipótesis, el cual se puede interpretar como la probabilidad de no cometer un error de tipo I.

Probabilidad de cometer error tipo I	Nivel de confianza
α	$(1-\alpha)$

La probabilidad de cometer error tipo II se denomina β. El complemento de β, es decir $(1-\beta)$**,** se denomina **la potencia** de la prueba de hipótesis.

Probabilidad de cometer error tipo II	Potencia de la prueba
β	$(1-\beta)$

Es importante tener en cuenta que en ocasiones tanto el nivel de confianza y la potencia de la prueba pueden estar expresadas como probabilidades porcentuales:

$$(1-\alpha)\cdot 100\% \qquad (1-\beta)\cdot 100\%$$

En las pruebas de hipótesis, se suele considerar el error tipo I como el más importante de controlar, por lo que se suele fijar el nivel de significancia α antes de realizar la prueba. Los niveles de significancia y por tanto de confianza, más usados son:

Nivel de significancia $[\alpha]$	Nivel de confianza $[(1-\alpha)\cdot 100\%]$
0,1=10%	90%
0,05=5%	95%
0,01=1%	99%

Curso: Probabilidad y estadística descriptiva
Unidad 4 : Inferencia estadística
Tema: Pruebas de hipótesis.
Contenido: Pruebas de hipótesis

PASOS PARA REALIZAR UNA PRUEBA DE HIPÓTESIS

Para abordar un problema de prueba de hipótesis, es decir, en los que se requiere tomar una decisión entre aceptar o rechazar una proposición respecto de un parámetro, se deben seguir los siguientes pasos:

1. Plantear la hipótesis nula H_0 y alternativa H_1.

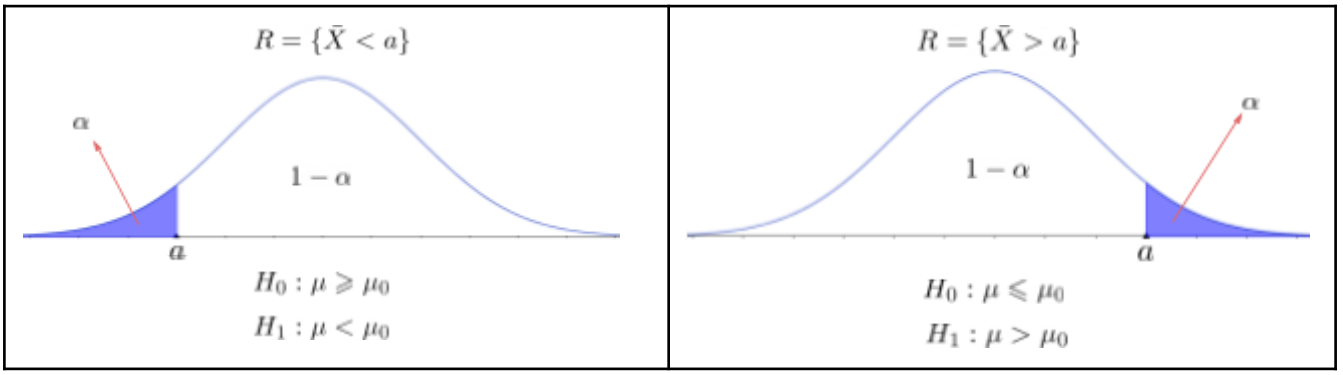
2. Fijar el nivel de significación de la prueba $\alpha = P(error\ tipo\ I)$. Al fijar la significancia, definimos la probabilidad de rechazar H_0 cuando ésta es cierta.

3. Asumir que H_0es cierta y seleccionar el estadístico de prueba con su distribución de probabilidad.

4. Establecer la región de rechazo y expresar la regla de decisión, es decir, que el estadístico tome un valor en la región de rechazo.

5. Una vez obtenido el valor del estadístico de prueba, se toma la decisión de rechazar o no H_0, y se interpretar en base al contexto.

En una prueba de hipótesis unilateral, una vez fijado el nivel de significación α, para determinar la región donde se rechaza H_0 hay que considerar las dos formas de este tipo de pruebas. Así, la región de rechazo se puede ver de las siguientes maneras:



PRUEBA DE HIPÓTESIS BILATERAL PARA LA MEDIA POBLACIONAL

Recordemos que una **prueba de hipótesis** es una metodología que nos permite determinar

si los datos de una muestra proporcionan evidencia suficiente para rechazar una hipótesis sobre un parámetro de la distribución de la población. En esta lección, nos interesa estudiar pruebas de hipótesis para la media poblacional μ de la forma:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

donde μ_0 corresponde a un valor fijo, el cual queremos saber si se ha modificado.

Asumiendo H_0 cierta, es decir, que la media poblacional μ es igual a μ_0, usaremos el promedio muestral $\bar{X}$ como estadístico de prueba, el cual sigue una distribución normal, de media μ_0 y desviación estándar $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Para el desarrollo de esta lección asumimos que el valor de σ es conocido.

Para determinar la región donde se rechaza la hipótesis nula, hay que poner atención a los valores extremos de la distribución, ya que la probabilidad de cometer error tipo I, α, se divide en partes iguales en los extremos derecho e izquierdo, generando dos regiones de rechazo. Debido a lo anterior, a este tipo de prueba se le llama bilateral.

Se está en la región de rechazo cuando el estadístico de prueba toma un valor extremo, ya sea a la izquierda o derecha de la distribución. Por lo que la regla de decisión se puede expresar como:

$$R = \{\bar{X} \leqslant a_1\} \cup \{\bar{X} \geqslant a_2\}$$

Con una confianza de $(1 - \alpha) \cdot 100\%$, se rechazará la hipótesis nula, a favor de la alternativa, si se cumple alguna de las dos desigualdades.

A diferencia de la prueba de hipótesis unilateral, ahora hay que determinar dos valores, a_1 y a_2, los cuales definirán las respectivas regiones de rechazo. Para ello debemos seguir los siguientes pasos:

Paso 1: Asumiendo H_0 cierta, la variable aleatoria $\bar{X}$ sigue una la distribución normal con media μ_0 y desviación estándar $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. En ella definiremos las regiones de rechazo, dividiendo la significancia α,, en dos partes iguales.

Paso 2: Para calcular los valores de a_1 y a_2 debemos partir de las probabilidades que quedan delimitadas por las respectivas regiones de rechazo.

Paso 3: Para encontrar el valor de a_1, lo primero es estandarizar.

Paso 4: Usando una tabla de valores o un recurso, podemos encontrar el valor de z que genera una probabilidad acumulada de $\frac{\alpha}{2}$.

Paso 5: Si igualamos la fracción a $z_{\frac{\alpha}{2}}$ y despejamos, obtenemos el valor de a_1.

Paso 6: Para obtener el valor de a_2 se procede de manera similar.

FORMAS DE ABORDAR UNA PRUEBA DE HIPÓTESIS BILATERAL

Una prueba de hipótesis bilateral se puede abordar de dos formas, utilizando la región de rechazo o el intervalo de confianza.

Para lo siguiente, considera una población con cierta media μ desconocida y con desviación estándar σ finita y conocida.

Prueba bilateral

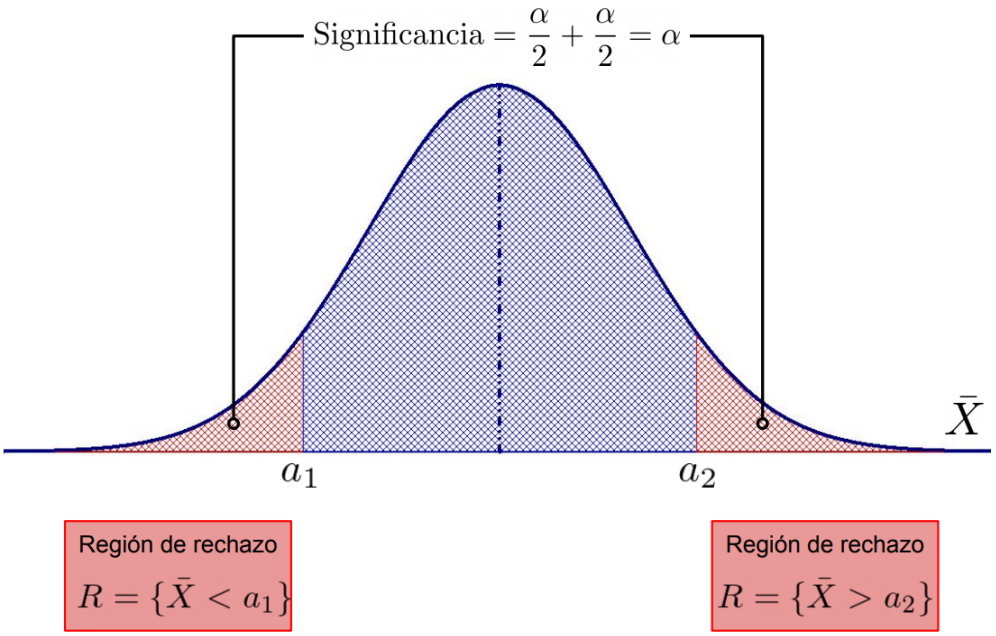
Para este caso, las hipótesis nula y alternativa acerca del valor de μ son:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Resolución 1: Utilizando la región de rechazo

Una prueba bilateral genera la siguiente región de rechazo, con nivel de significancia α.

Curso: Probabilidad y estadística descriptiva
Unidad 4 : Inferencia estadística
Tema: Pruebas de hipótesis.
Contenido: Pruebas de hipótesis



Los valores a_1 y a_2 que separa las regiones en la figura anterior pueden obtenerse de la siguiente manera, si se toma la hipótesis nula como cierta:

$$a_1 = \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

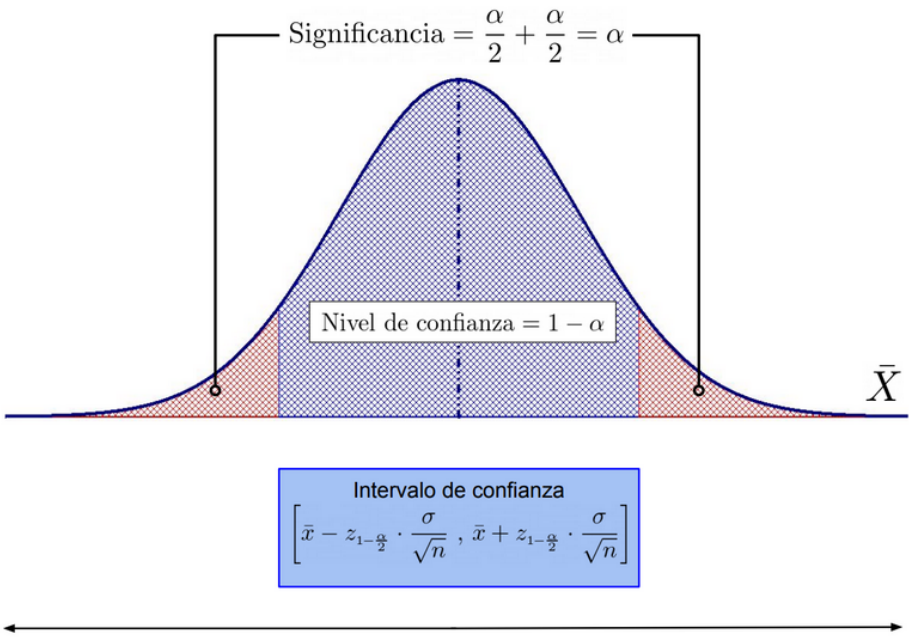
$$a_2 = \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Si el valor de $\bar{X}$ **cae en la región de rechazo**, **se rechaza la hipótesis nula** H_0 en favor de la hipótesis alternativa H_1. Sin embargo, si el valor de $\bar{X}$ **no cae en la región de rechazo**, **se acepta** H_0.

Resolución 2: Utilizando el intervalo de confianza

Una prueba bilateral genera un intervalo, con nivel de significancia $(1 - \alpha)$.

Curso: Probabilidad y estadística descriptiva
Unidad 4 : Inferencia estadística
Tema: Pruebas de hipótesis.
Contenido: Pruebas de hipótesis



Si el valor de $\mu = \mu_0$ **no está contenido en el intervalo de confianza**, se **rechaza la hipótesis nula** H_0 en favor de la hipótesis alternativa H_1. Sin embargo, si el valor de $\mu = \mu_0$ **está contenido en el intervalo de confianza**, se **acepta** H_0.

Es importante notar que, si bien la resolución 1 considera una distribución en torno a $\bar{X}$ y la resolución 2 en torno a μ, las áreas involucradas en ambos casos son iguales, por lo tanto también lo son las probabilidades.

SÍNTESIS

- Una **hipótesis estadística** o simplemente hipótesis corresponde a una aseveración con respecto a un parámetro de la distribución asociada a una población.

- Una prueba de hipótesis es una metodología que nos permite determinar si los datos de una muestra proporcionan evidencia suficiente para rechazar o no una hipótesis sobre un parámetro de la distribución de la población.

Curso: Probabilidad y estadística descriptiva
Unidad 4 : Inferencia estadística
Tema: Pruebas de hipótesis.
Contenido: Pruebas de hipótesis

- En una prueba de hipótesis se deben confrontar dos afirmaciones acerca de la hipótesis de interés:
    - Una se denomina **hipótesis nula**, denotada por H_0, y corresponde al valor del parámetro que se cree cierto inicialmente.
    - La otra se denomina **hipótesis alternativa**, que se denota como H_1, es una aseveración que indica un cambio a evaluar en el valor del parámetro respecto de H_0. Esto se puede expresar como que el parámetro ha aumentado, ha disminuido, o que es distinto.

- No es posible afirmar con certeza que una hipótesis es verdadera, por lo que a lo más se puede "rechazar" una en favor de la otra. Entonces, las dos posibles conclusiones derivadas de un análisis de prueba de hipótesis son rechazar o no H_0.

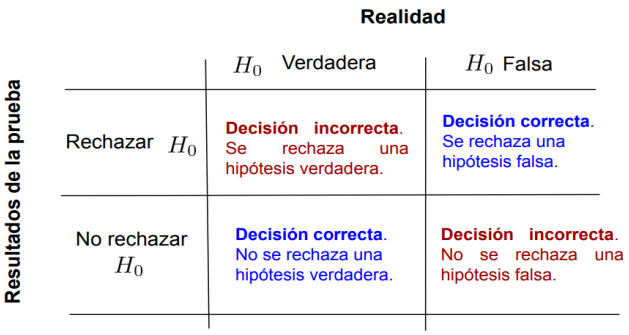
- Las pruebas de hipótesis se pueden clasificar en dos tipos, bilaterales y unilaterales.
    - Las pruebas bilaterales corresponden a hipótesis de la forma:

$$H_0 : \text{Parámetro } = \text{valor supuesto}$$
$$H_1 : \text{Parámetro } \neq \text{valor supuesto}$$

    - Las pruebas unilaterales son de dos formas:

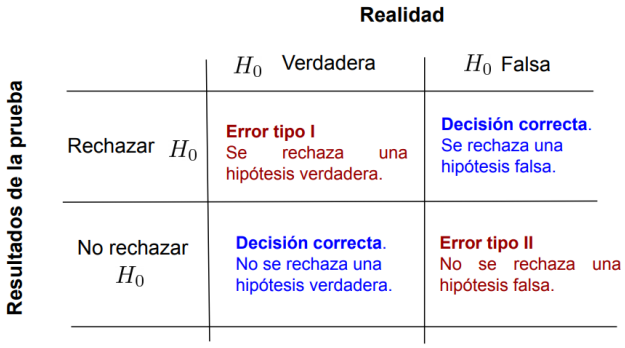
$H_0 : \text{Parámetro } \leqslant \text{valor supuesto}$ $H_1 : \text{Parámetro } > \text{valor supuesto}$	$H_0 : \text{Parámetro } \geqslant \text{valor supuesto}$ $H_1 : \text{Parámetro } < \text{valor supuesto}$

- Cuando decidimos rechazar o no rechazar una hipótesis nula H_0, tenemos cuatro posibles escenarios:
    - Se rechaza una hipótesis verdadera.
    - No se rechaza una hipótesis verdadera.
    - Se rechaza una hipótesis falsa.
    - No rechaza una hipótesis falsa.



- En las pruebas de hipótesis se pueden cometer dos tipos de errores:

    - Cometeremos **error tipo I** si rechazamos la hipótesis nula H_0, cuando era verdadera.
    - Cometeremos **error tipo II** si no rechazamos la hipótesis nula H_0 cuando esta en verdad era falsa.



- El **nivel de significancia**, también denominado α se define como la **probabilidad de cometer un error tipo I.** El complemento del nivel de significancia α**, es decir** $(1-\alpha)$**,** corresponde **al nivel de confianza** de la prueba de hipótesis, el cual se puede interpretar como la probabilidad de no cometer un error de tipo I.

Probabilidad de cometer error tipo I	Nivel de confianza
α	$(1-\alpha)\cdot 100\%$

- La probabilidad de cometer error tipo II se denomina β. El complemento de β, es decir $(1 - \beta)$, se denomina **la potencia** de la prueba de hipótesis.

Probabilidad de cometer error tipo II	Potencia de la prueba
β	$(1 - \beta)$

- En las pruebas de hipótesis, se suele considerar el error tipo I como el más importante de controlar, por lo que se suele fijar el nivel de significancia α antes de realizar la prueba. Los niveles de significancia y por tanto de confianza, más usados son:

Nivel de significancia $[\alpha]$	Nivel de confianza $[(1 - \alpha) \cdot 100\%]$
0,1=10%	90%
0,05=5%	95%
0,01=1%	99%

- En general, cometer un tipo de error no es necesariamente más grave que el otro. La gravedad depende de la situación de investigación específica y de sus consecuencias, pero idealmente ambos tipos de errores deben minimizarse.

- Para abordar un problema de pruebas de hipótesis, es decir, en los que se requiere tomar una decisión entre aceptar o rechazar una proposición respecto de un parámetro, se deben seguir los siguientes pasos:

1. Plantear la hipótesis nula H_0 y alternativa H_1.
2. Fijar el nivel de significación de la prueba $\alpha = P(error\ tipo\ I)$. Al fijar la significancia, definimos la probabilidad de rechazar H_0 cuando ésta es cierta.
3. Asumir que H_0 es cierta y seleccionar el estadístico de prueba con su distribución de probabilidad.
4. Establecer la región de rechazo y expresar la regla de decisión, es decir, para qué intervalo de valores del estadístico de prueba decidimos rechazar la

hipótesis nula.

5. Una vez obtenido el valor del estadístico de prueba, se toma la decisión de rechazar o no H_0, y se interpreta en base al contexto.

- En una prueba de hipótesis bilateral para la media de la población μ, las hipótesis nula y alternativa se pueden plantear como:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

- Como estadístico de prueba, se puede utilizar el promedio muestral $\bar{X}$, asumiendo que sigue una distribución normal, de media μ y desviación estándar $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

- Para determinar la región de rechazo, debemos fijar la significancia, α, la cual corresponde a la probabilidad de cometer error tipo I.

- Como la prueba de hipótesis es bilateral, se dividirá la significancia en dos partes iguales, las cuales estarán en los extremos de la distribución.

- La regla de decisión, es decir, la región donde se rechaza la hipótesis nula se puede expresar como:

$$R = \{\bar{X} \leqslant a_1\} \cup \{\bar{X} \geqslant a_2\}$$

- Para encontrar los valores de a_1 y a_2 debemos estandarizar $\bar{X}$, buscar el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ y de $z_{(1-\frac{\alpha}{2})}$ tal que representen la probabilidad de estar en la región de rechazo.

- Una vez obtenido los valores de a_1 y a_2, se compara con el valor del estadístico de prueba y se toma la decisión de rechazar o no H_0, y se interpreta la decisión en base al contexto.

- Al responder una prueba de hipótesis, siempre se debe reportar el nivel de significancia o el nivel de confianza utilizado en el desarrollo del problema, puesto que rechazar o no la hipótesis nula depende de este valor. Por ejemplo, puede ocurrir que con una confianza del 95% esta se rechace, pero no así con una del 90%.

- Una prueba de hipótesis bilateral se puede abordar de dos formas, utilizando la región de rechazo o el intervalo de confianza.

Para lo siguiente, considera una población con cierta media μ desconocida y con desviación estándar σ finita y conocida.

Prueba bilateral

Para este caso, las hipótesis nula y alternativa acerca del valor de μ son:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

- **Resolución 1: Utilizando la región de rechazo**

Una prueba bilateral genera la siguiente región de rechazo, con nivel de significancia α.

Los valores a_1 y a_2 que separa las regiones en la figura anterior pueden obtenerse de la siguiente manera, si se toma la hipótesis nula como cierta:

$$a_1 = \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$a_2 = \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Si el valor de $\bar{X}$ **cae en la región de rechazo**, **se rechaza la hipótesis nula** H_0 en favor de la hipótesis alternativa H_1. Sin embargo, si el valor de $\bar{X}$ **no cae en la región de rechazo**, **se acepta** H_0.

- **Resolución 2: Utilizando el intervalo de confianza**

Una prueba bilateral genera un intervalo, con nivel de significancia $(1 - \alpha)$.

Si el valor de $\mu = \mu_0$ **no está contenido en el intervalo de confianza**, se **rechaza la hipótesis nula** H_0 en favor de la hipótesis alternativa H_1. Sin embargo, si el valor de $\mu = \mu_0$ **está contenido en el intervalo de confianza**, se **acepta** H_0.

Es importante notar que, si bien la resolución 1 considera una distribución en torno a $\bar{X}$ y la resolución 2 en torno a μ, las áreas involucradas en ambos casos son iguales, por lo tanto también lo son las probabilidades.