Graphical user interface, application

Description automatically generated

Apuntes Unidad 4

Pruebas de hipótesis



Shape, arrow

Description automatically generated

**PRUEBA DE HIPÓTESIS**

Una **hipótesis estadística** o simplemente hipótesis corresponde a una aseveración con respecto a un parámetro de la distribución asociada a una población.

Una prueba de hipótesis es una metodología que nos permite determinar si los datos de una muestra proporcionan evidencia suficiente para rechazar o no una hipótesis sobre un parámetro de la distribución de la población. En una prueba de hipótesis se debe confrontar dos afirmaciones acerca de la hipótesis de interés:

* Una se denomina **hipótesis nula**, denotada por , y corresponde al valor del parámetro que se cree cierto inicialmente.
* La otra se denomina **hipótesis alternativa**, que se denota como y es una aseveración que indica un cambio a evaluar en el valor del parámetro respecto de . Esto se puede expresar como que el parámetro ha aumentado, ha disminuido, o que es distinto.

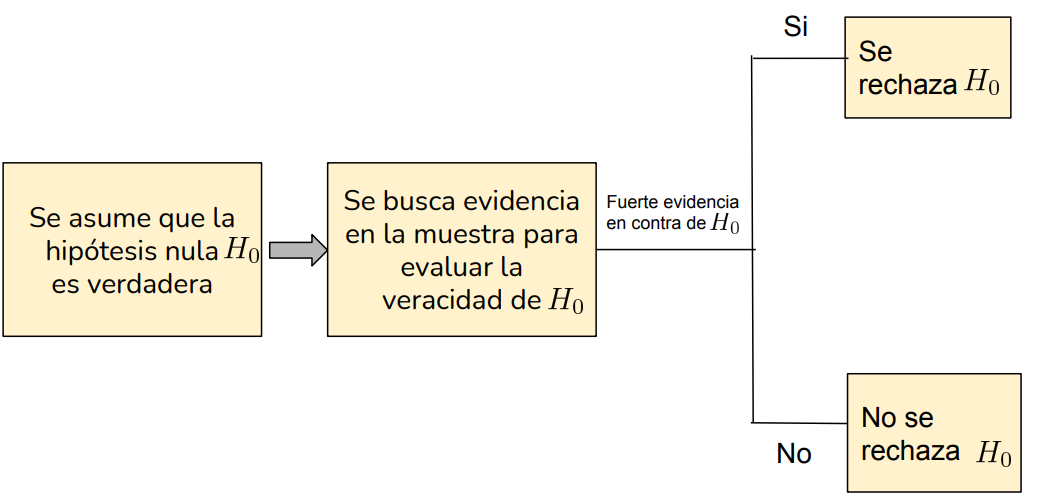
Es importante tener en cuenta de que la hipótesis alternativa se plantea para buscar evidencia de un cambio en el valor del parámetro, y se determina según la pregunta que se busca responder (si es mayor, menor o distinto). La hipótesis nula, , suele ser el complemento de lo definido en .

Debido a que en general no es posible acceder a los datos de toda la población, debemos decidir cuál de las dos afirmaciones es correcta a partir de una muestra aleatoria.

La metodología es suponer que la hipótesis nula es verdadera, y se busca ver si la muestra nos provee de evidencia que contradiga esta suposición.

Es importante tener en cuenta que, dada la aleatoriedad del fenómeno en estudio, no es posible afirmar con certeza que una hipótesis es verdadera, por lo que a lo más se puede “rechazar” una en favor de la otra:

* La hipótesis nula será rechazada en favor de la hipótesis alternativa solo si la evidencia que arroja la muestra sugiere que es falsa.
* Si la muestra no contradice fuertemente a se acepta que esta hipótesis sigue siendo válida.

Entonces, las dos posibles conclusiones derivadas de un análisis de prueba de hipótesis son rechazar o no : 

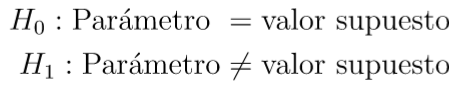
## 

## **PRUEBAS DE HIPÓTESIS UNILATERALES Y BILATERALES**

En una prueba de hipótesis, se plantea para buscar evidencia de un cambio en el valor del parámetro, y se determina según la pregunta que se busca responder (si es mayor, menor o distinto). Las pruebas de hipótesis generalmente tendrán una de las siguientes tres formas:

| **Hipótesis nula** |  | **Hipótesis alternativa** |
| --- | --- | --- |
|  | *vs* |  |
|  | *vs* |  |
|  | *vs* |  |

Las pruebas de hipótesis se pueden clasificar en dos tipos, bilaterales y unilaterales. Las pruebas bilaterales corresponden a hipótesis de la forma:



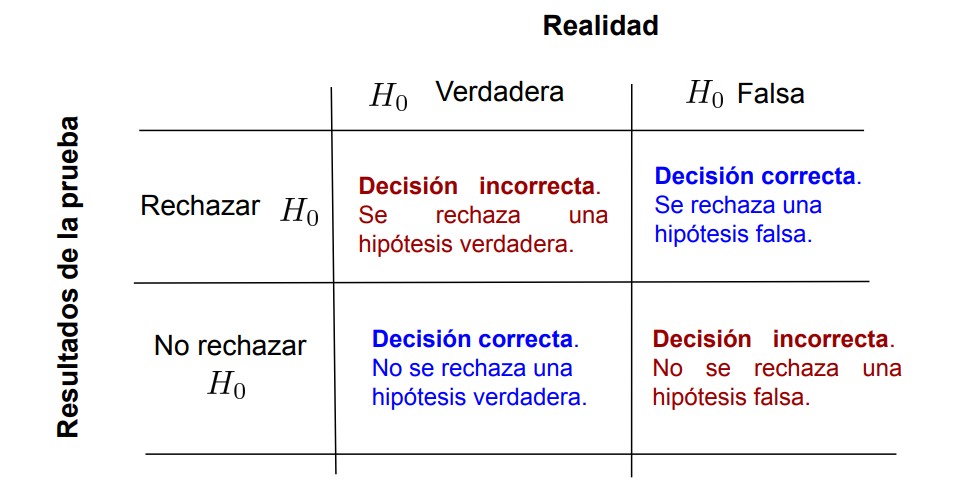
En este caso rechazaremos la hipótesis nula, , cuando el valor estimado del parámetro sea extremo, ya sea notablemente menor o mayor en comparación al valor supuesto.

Las pruebas unilaterales son de dos formas:

|  |  |
| --- | --- |

En estos casos rechazaremos cuando, a partir de la muestra, el valor estimado del parámetro sea mucho mayor o mucho menor que el valor supuesto, respectivamente.

**PRUEBA DE HIPÓTESIS Y TIPOS DE ERROR**

Recordemos que una prueba de hipótesis es una metodología que nos permite determinar si los datos de una muestra proporcionan evidencia suficiente para rechazar o no la hipótesis nula , sobre un parámetro de la distribución de la población. Cuando decidimos rechazar o no rechazar la hipótesis nula , tenemos cuatro posibles escenarios:

1. Se rechaza una hipótesis verdadera.
2. No se rechaza una hipótesis verdadera.
3. Se rechaza una hipótesis falsa.
4. No rechaza una hipótesis falsa.

Cuando una hipótesis es verdadera y no la rechazamos (opción 2) o si rechazamos una hipótesis falsa (opción 4), hemos tomado la decisión correcta. Pero si rechazamos una hipótesis verdadera (opción 1) o no se rechaza una hipótesis falsa (opción 3) hemos cometido un error.

El **nivel de significancia**, también denominado se define como la **probabilidad de cometer un error tipo I.** El complemento del nivel de significancia **, es decir ,** corresponde **al nivel de confianza** de la prueba de hipótesis, el cual se puede interpretar como la probabilidad de no cometer un error de tipo I.

| **Probabilidad de cometer error tipo I** | **Nivel de confianza** |
| --- | --- |
|  |  |

La probabilidad de cometer error tipo II se denomina . El complemento de , es decir **,** se denomina **la potencia** de la prueba de hipótesis.

| **Probabilidad de cometer error tipo II** | **Potencia de la prueba** |
| --- | --- |
|  |  |

Es importante tener en cuenta que en ocasiones tanto el nivel de confianza y la potencia de la prueba pueden estar expresadas como probabilidades porcentuales:

En las pruebas de hipótesis, se suele considerar el error tipo I como el más importante de controlar, por lo que se suele fijar el nivel de significancia antes de realizar la prueba. Los niveles de significancia y por tanto de confianza, más usados son:

| **Nivel de significancia** | **Nivel de confianza** |
| --- | --- |
| 0,1=10% | 90% |
| 0,05=5% | 95% |
| 0,01=1% | 99% |

**PASOS PARA REALIZAR UNA PRUEBA DE HIPÓTESIS**

Para abordar un problema de prueba de hipótesis, es decir, en los que se requiere tomar una decisión entre aceptar o rechazar una proposición respecto de un parámetro, se deben seguir los siguientes pasos:

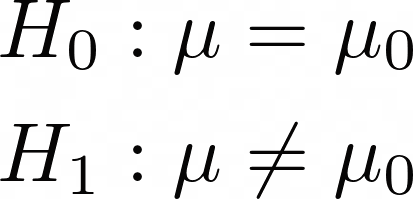
1. Plantear la hipótesis nula y alternativa .
2. Fijar el nivel de significación de la prueba . Al fijar la significancia, definimos la probabilidad de rechazar cuando ésta es cierta.
3. Asumir que es cierta y seleccionar el estadístico de prueba con su distribución de probabilidad.
4. Establecer la región de rechazo y expresar la regla de decisión, es decir, que el estadístico tome un valor en la región de rechazo.
5. Una vez obtenido el valor del estadístico de prueba, se toma la decisión de rechazar o no , y se interpretar en base al contexto.

En una prueba de hipótesis unilateral, una vez fijado el nivel de significación , para determinar la región donde se rechaza hay que considerar las dos formas de este tipo de pruebas. Así, la región de rechazo se puede ver de las siguientes maneras:

|  |  |
| --- | --- |

**PRUEBA DE HIPÓTESIS BILATERAL PARA LA MEDIA POBLACIONAL**

Recordemos que una **prueba de hipótesis** es una metodología que nos permite determinar si los datos de una muestra proporcionan evidencia suficiente para rechazar una hipótesis sobre un parámetro de la distribución de la población. En esta lección, nos interesa estudiar pruebas de hipótesis para la media poblacional de la forma:



donde corresponde a un valor fijo, el cual queremos saber si se ha modificado.

Asumiendo cierta, es decir, que la media poblacional es igual a , usaremos el promedio muestral como estadístico de prueba, el cual sigue una distribución normal, de media y desviación estándar . Para el desarrollo de esta lección asumimos que el valor de es conocido.

Para determinar la región donde se rechaza la hipótesis nula, hay que poner atención a los valores extremos de la distribución, ya que la probabilidad de cometer error tipo I, , se divide en partes iguales en los extremos derecho e izquierdo, generando dos regiones de rechazo. Debido a lo anterior, a este tipo de prueba se le llama bilateral.

Se está en la región de rechazo cuando el estadístico de prueba toma un valor extremo, ya sea a la izquierda o derecha de la distribución. Por lo que la regla de decisión se puede expresar como:



Con una confianza de , se rechazará la hipótesis nula, a favor de la alternativa, si se cumple alguna de las dos desigualdades.

A diferencia de la prueba de hipótesis unilateral, ahora hay que determinar dos valores, y , los cuales definirán las respectivas regiones de rechazo. Para ello debemos seguir los siguientes pasos:

**Paso 1:** Asumiendo cierta, la variable aleatoria sigue una la distribución normal con media y desviación estándar . En ella definiremos las regiones de rechazo, dividiendo la significancia ,, en dos partes iguales.

**Paso 2:** Para calcular los valores de y debemos partir de las probabilidades que quedan delimitadas por las respectivas regiones de rechazo.

**Paso 3:** Para encontrar el valor de , lo primero es estandarizar.

**Paso 4:** Usando una tabla de valores o un recurso, podemos encontrar el valor de que genera una probabilidad acumulada de .

**Paso 5:** Si igualamos la fracción a y despejamos, obtenemos el valor de .

**Paso 6:** Para obtener el valor de se procede de manera similar.

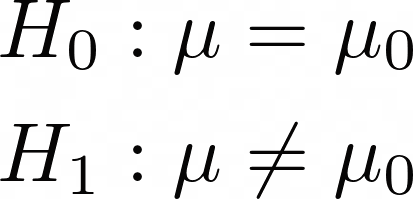
**FORMAS DE ABORDAR UNA PRUEBA DE HIPÓTESIS BILATERAL**

Una prueba de hipótesis bilateral se puede abordar de dos formas, utilizando la región de rechazo o el intervalo de confianza.

Para lo siguiente, considera una población con cierta media desconocida y con desviación estándar finita y conocida.

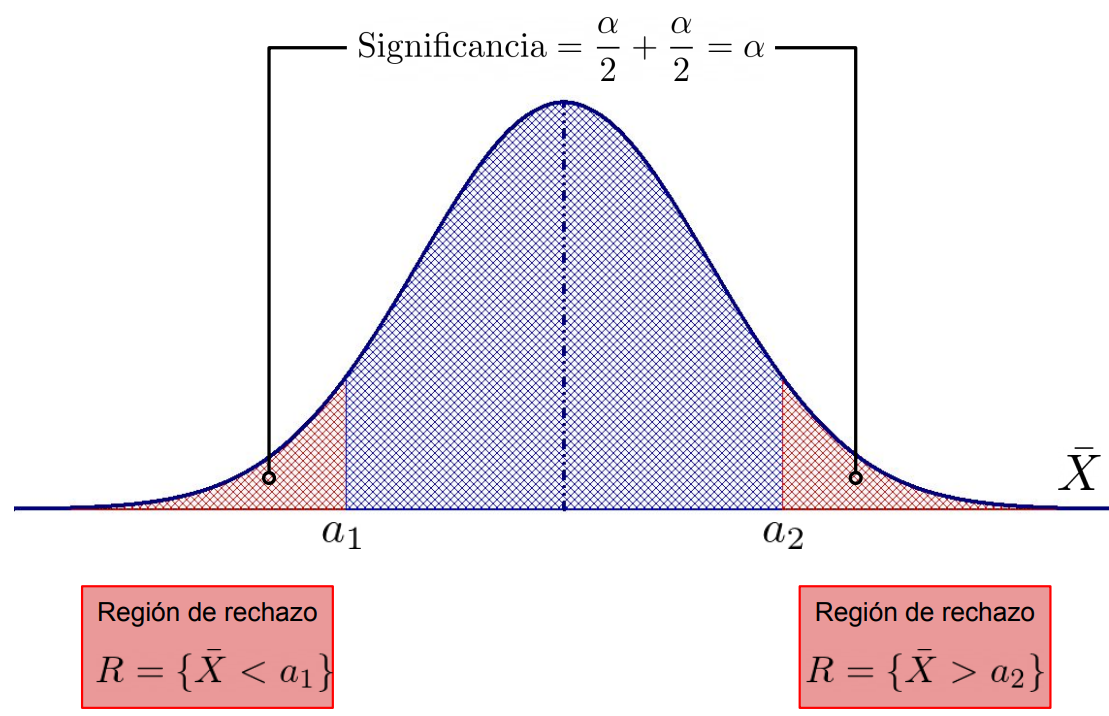
**Prueba bilateral**

Para este caso, las hipótesis nula y alternativa acerca del valor de son:

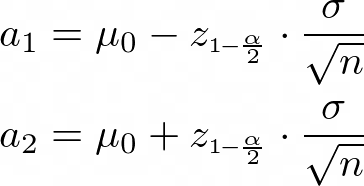


**Resolución 1: Utilizando la región de rechazo**

Una prueba bilateral genera la siguiente región de rechazo, con nivel de significancia .



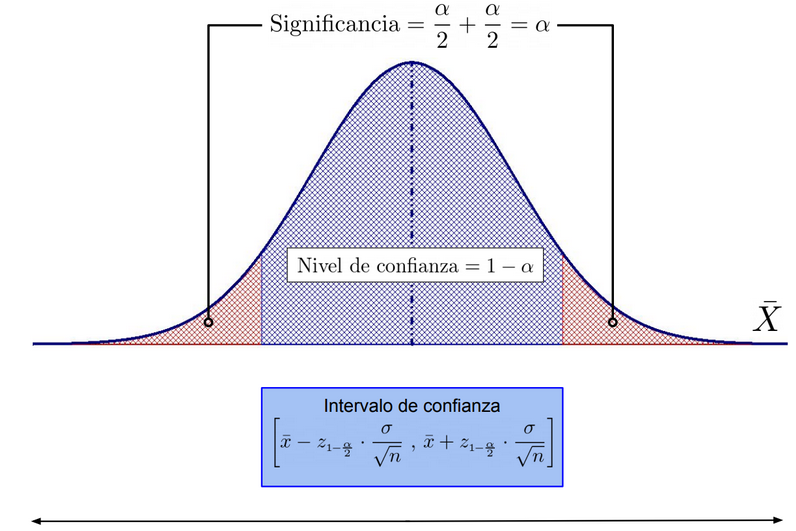
Los valores y que separa las regiones en la figura anterior pueden obtenerse de la siguiente manera, si se toma la hipótesis nula como cierta:



Si el valor de **cae en la región de rechazo**, **se rechaza la hipótesis nula**  en favor de la hipótesis alternativa . Sin embargo, si el valor de **no cae en la región de rechazo**, **se acepta** .

**Resolución 2: Utilizando el intervalo de confianza**

Una prueba bilateral genera un intervalo, con nivel de significancia .



Si el valor de **no está contenido en el intervalo de confianza**, se **rechaza la hipótesis nula**  en favor de la hipótesis alternativa . Sin embargo, si el valor de **está contenido en el intervalo de confianza**, se **acepta** .

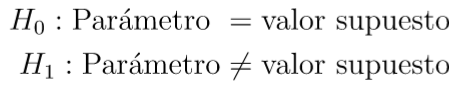
Es importante notar que, si bien la resolución 1 considera una distribución en torno a y la resolución 2 en torno a , las áreas involucradas en ambos casos son iguales, por lo tanto también lo son las probabilidades.

**SÍNTESIS**

* Una **hipótesis estadística** o simplemente hipótesis corresponde a una aseveración con respecto a un parámetro de la distribución asociada a una población.
* Una prueba de hipótesis es una metodología que nos permite determinar si los datos de una muestra proporcionan evidencia suficiente para rechazar o no una hipótesis sobre un parámetro de la distribución de la población.

## En una prueba de hipótesis se deben confrontar dos afirmaciones acerca de la hipótesis de interés:

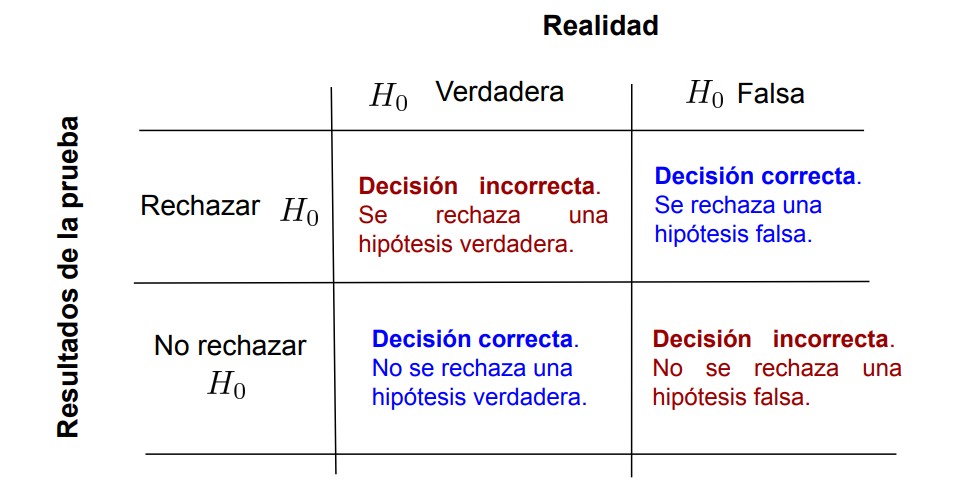
* + Una se denomina **hipótesis nula**, denotada por , y corresponde al valor del parámetro que se cree cierto inicialmente.
  + La otra se denomina **hipótesis alternativa**, que se denota como , es una aseveración que indica un cambio a evaluar en el valor del parámetro respecto de . Esto se puede expresar como que el parámetro ha aumentado, ha disminuido, o que es distinto.
* No es posible afirmar con certeza que una hipótesis es verdadera, por lo que a lo más se puede “rechazar” una en favor de la otra. Entonces, las dos posibles conclusiones derivadas de un análisis de prueba de hipótesis son rechazar o no .
* Las pruebas de hipótesis se pueden clasificar en dos tipos, bilaterales y unilaterales.  
  + Las pruebas bilaterales corresponden a hipótesis de la forma:



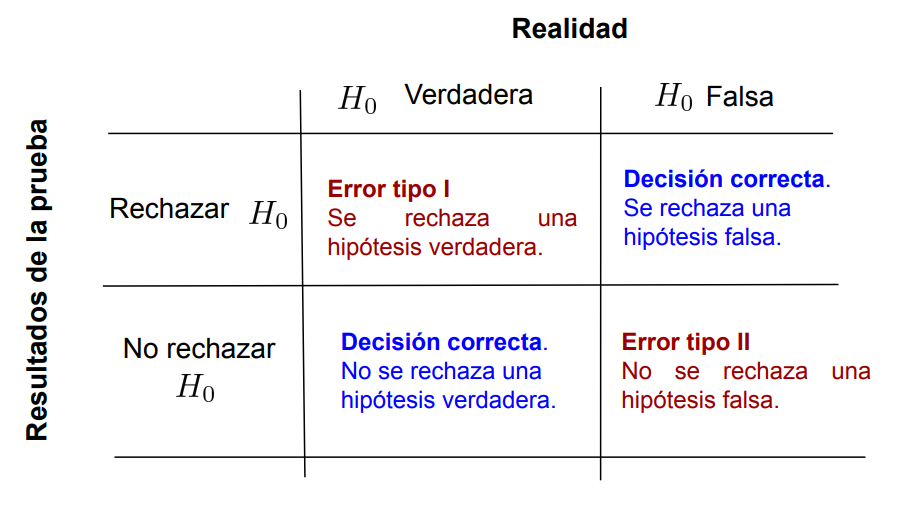
* + Las pruebas unilaterales son de dos formas:

|  |  |
| --- | --- |

* Cuando decidimos rechazar o no rechazar una hipótesis nula , tenemos cuatro posibles escenarios:
  + Se rechaza una hipótesis verdadera.
  + No se rechaza una hipótesis verdadera.
  + Se rechaza una hipótesis falsa.
  + No rechaza una hipótesis falsa.



* En las pruebas de hipótesis se pueden cometer dos tipos de errores:
* Cometeremos **error tipo I** si rechazamos la hipótesis nula , cuando era verdadera.
* Cometeremos **error tipo II** si no rechazamos la hipótesis nula cuando esta en verdad era falsa.



* El **nivel de significancia**, también denominado se define como la **probabilidad de cometer un error tipo I.** El complemento del nivel de significancia **, es decir ,** corresponde **al nivel de confianza** de la prueba de hipótesis, el cual se puede interpretar como la probabilidad de no cometer un error de tipo I.

| **Probabilidad de cometer error tipo I** | **Nivel de confianza** |
| --- | --- |
|  |  |

* La probabilidad de cometer error tipo II se denomina . El complemento de , es decir **,** se denomina **la potencia** de la prueba de hipótesis.

| **Probabilidad de cometer error tipo II** | **Potencia de la prueba** |
| --- | --- |
|  |  |

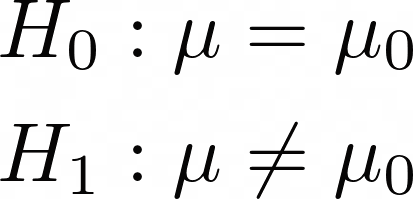
* En las pruebas de hipótesis, se suele considerar el error tipo I como el más importante de controlar, por lo que se suele fijar el nivel de significancia antes de realizar la prueba. Los niveles de significancia y por tanto de confianza, más usados son:

| **Nivel de significancia** | **Nivel de confianza** |
| --- | --- |
| 0,1=10% | 90% |
| 0,05=5% | 95% |
| 0,01=1% | 99% |

* En general, cometer un tipo de error no es necesariamente más grave que el otro. La gravedad depende de la situación de investigación específica y de sus consecuencias, pero idealmente ambos tipos de errores deben minimizarse.
* Para abordar un problema de pruebas de hipótesis, es decir, en los que se requiere tomar una decisión entre aceptar o rechazar una proposición respecto de un parámetro, se deben seguir los siguientes pasos:

1. Plantear la hipótesis nula y alternativa .
2. Fijar el nivel de significación de la prueba . Al fijar la significancia, definimos la probabilidad de rechazar cuando ésta es cierta.
3. Asumir que es cierta y seleccionar el estadístico de prueba con su distribución de probabilidad.
4. Establecer la región de rechazo y expresar la regla de decisión, es decir, para qué intervalo de valores del estadístico de prueba decidimos rechazar la hipótesis nula.
5. Una vez obtenido el valor del estadístico de prueba, se toma la decisión de rechazar o no , y se interpreta en base al contexto.

* En una prueba de hipótesis bilateral para la media de la población , las hipótesis nula y alternativa se pueden plantear como:



* Como estadístico de prueba, se puede utilizar el promedio muestral , asumiendo que sigue una distribución normal, de media y desviación estándar .
* Para determinar la región de rechazo, debemos fijar la significancia, , la cual corresponde a la probabilidad de cometer error tipo I.
* Como la prueba de hipótesis es bilateral, se dividirá la significancia en dos partes iguales, las cuales estarán en los extremos de la distribución.
* La regla de decisión, es decir, la región donde se rechaza la hipótesis nula se puede expresar como:

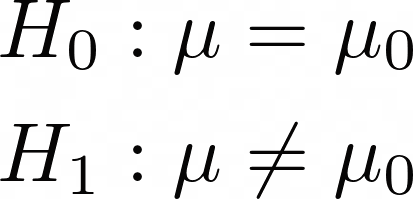


* Para encontrar los valores de y debemos estandarizar , buscar el valor de y de tal que representen la probabilidad de estar en la región de rechazo.
* Una vez obtenido los valores de y , se compara con el valor del estadístico de prueba y se toma la decisión de rechazar o no , y se interpreta la decisión en base al contexto.
* Al responder una prueba de hipótesis, siempre se debe reportar el nivel de significancia o el nivel de confianza utilizado en el desarrollo del problema, puesto que rechazar o no la hipótesis nula depende de este valor. Por ejemplo, puede ocurrir que con una confianza del 95% esta se rechace, pero no así con una del 90%.
* Una prueba de hipótesis bilateral se puede abordar de dos formas, utilizando la región de rechazo o el intervalo de confianza.

Para lo siguiente, considera una población con cierta media desconocida y con desviación estándar finita y conocida.

**Prueba bilateral**

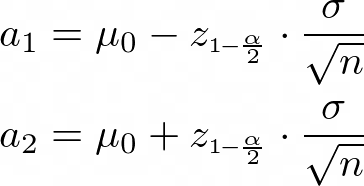
Para este caso, las hipótesis nula y alternativa acerca del valor de son:



* + **Resolución 1: Utilizando la región de rechazo**

Una prueba bilateral genera la siguiente región de rechazo, con nivel de significancia .

Los valores y que separa las regiones en la figura anterior pueden obtenerse de la siguiente manera, si se toma la hipótesis nula como cierta:



Si el valor de **cae en la región de rechazo**, **se rechaza la hipótesis nula**  en favor de la hipótesis alternativa . Sin embargo, si el valor de **no cae en la región de rechazo**, **se acepta** .

* + **Resolución 2: Utilizando el intervalo de confianza**

Una prueba bilateral genera un intervalo, con nivel de significancia .

Si el valor de **no está contenido en el intervalo de confianza**, se **rechaza la hipótesis nula**  en favor de la hipótesis alternativa . Sin embargo, si el valor de **está contenido en el intervalo de confianza**, se **acepta** .

Es importante notar que, si bien la resolución 1 considera una distribución en torno a y la resolución 2 en torno a , las áreas involucradas en ambos casos son iguales, por lo tanto también lo son las probabilidades.