Aula360
Aprendizaje para el siglo XXI

Contenido: Coeficiente binomial y distribución binomial

Apuntes Unidad 3

Función de distribución acumulada

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

CMM Centro de Modelamiento Matemático

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULADA

Consideremos la variable aleatoria discreta X, que distribuye como una binomial, con parámetros n y p. Definiremos la **función de distribución acumulada** como:

$$\begin{aligned} F_X(b) &= \mathrm{P}(X \leq b) \\ &= \mathrm{P}(X=0) + \mathrm{P}(X=1) + \cdots + \mathrm{P}(X=b) \end{aligned}$$

Entonces, para cualquier número b, la función de distribución acumulada $F_X(b)$ entrega la probabilidad de que haya como máximo b éxitos en n intentos. Ahora, veamos algunas conclusiones que surgen de esta definición.

Sea X una variable aleatoria discreta que distribuye como una binomial con parámetros n y

$$\mathrm{P}(X > a) = \mathrm{P}(X = a+1) + \ldots + \mathrm{P}(X = n)$$

p. La probabilidad de que X sea mayor que un valor a se puede plantear como:

$$\mathrm{P}(X > a) = 1 - \mathrm{P}(X \leq a) = 1 - F_X(a)$$

La probabilidad anterior también se puede calcular usando el complemento:

Dependiendo del valor de a y de n, puede ser conveniente plantear la probabilidad usando el complemento.

FUNCIÓN DE DENSIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Para representar una variable aleatoria continua X necesitamos lo que se conoce como **función de densidad**, la que denominaremos como f_X. Esta función corresponde a una curva teórica que modela la variable aleatoria y está definida para valores dentro de los números reales.

La función de densidad debe cumplir con las siguientes características:

- La función de densidad es siempre mayor o igual a cero, lo que significa que la gráfica de dicha función debe estar sobre el eje horizontal. Es decir, para todo valor x se tiene que:

$$f_X(x) \geqslant 0$$

- El área entre la función de densidad y el eje x es 1.

Ambas características se pueden apreciar en el siguiente ejemplo.

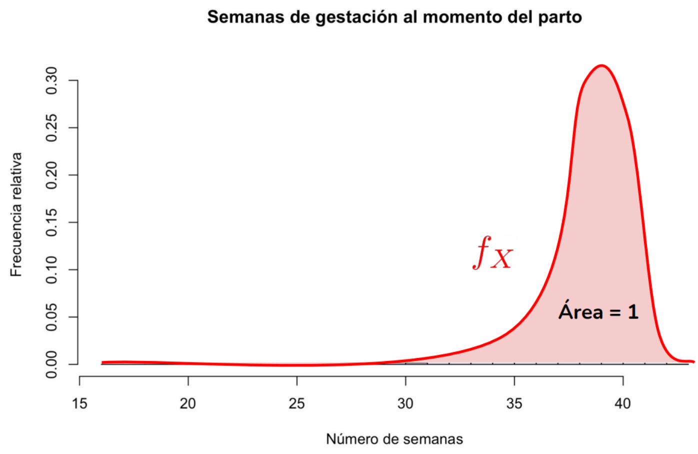

Figura 1: Ejemplo de función de densidad de una variable aleatoria que describe las semanas de gestación al momento del parto.

Ahora, aprenderemos a como calcular probabilidades en la función de densidad.

CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN UNA FUNCIÓN DE DENSIDAD

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidades f_X. La probabilidad $P(a \leq X \leq b)$es igual al área bajo la curva f_X que se encuentra entre los valores a y b:

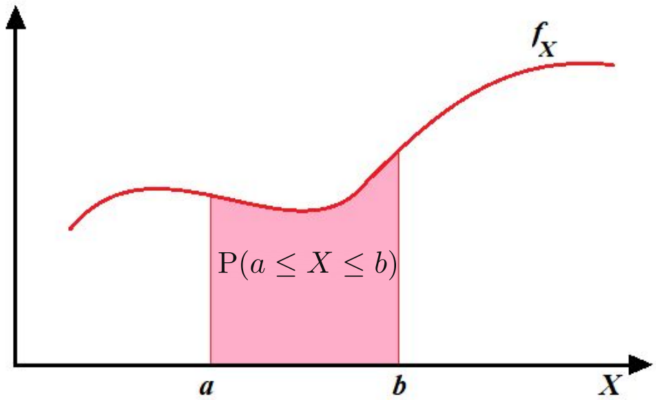

Figura 2: Visualización gráfica de la probabilidad de que X se encuentre entre a y b.

En otras palabras, la probabilidad de que la variable aleatoria X tome valores entre a y b corresponde al área bajo la función de densidad f_X entre ambos valores. Notemos que cuando $a = b$ se tiene que no existe área bajo la curva, pues los dos extremos coinciden en ese valor. Esto nos indica que la probabilidad de que la variable aleatoria continua X tome un valor constante a es cero. Es decir:

$$\mathrm{P}(X = a) = 0$$

Si bien lo anterior puede resultar algo contraintuitivo, es importante recalcar que X, al ser una variable aleatoria continua, puede tomar todos los posibles valores en un intervalo.

Una consecuencia de lo anterior es que, al calcular la probabilidad de una variable aleatoria continua, da lo mismo si se incluyen o no los extremos del intervalo. En otras palabras, se tiene que:

$$\mathrm{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \mathrm{P}(a < X \leqslant b) = \mathrm{P}(a \leqslant X < b) = \mathrm{P}(a < X < b)$$

SÍNTESIS

- Si tenemos una variable aleatoria discreta X que distribuye como una binomial con parámetros n y p, podemos definir su **función de distribución acumulada** como:

$$\begin{aligned} F_X(b) &= \mathrm{P}(X \leq b) \\ &= \mathrm{P}(X=0) + \mathrm{P}(X=1) + \cdots + \mathrm{P}(X=b) \end{aligned}$$

- Para cualquier número b, la función de distribución acumulada $F_X(b)$ entrega la probabilidad de que haya como máximo b éxitos en n intentos.

- Si tenemos una variable aleatoria discreta X que distribuye como una binomial con parámetros n y p, la probabilidad de que X sea mayor que un valor a se puede plantear como:

$$\mathrm{P}(X > a) = \mathrm{P}(X = a+1) + \ldots + \mathrm{P}(X = n)$$

y usando la propiedad del complemento, también se puede calcular como:

$$\mathrm{P}(X > a) = 1 - \mathrm{P}(X \leq a) = 1 - F_X(a)$$

- Considera una variable aleatoria continua X, su función de densidad corresponde a una curva teórica que está definida para valores dentro de los números reales y se denomina f_X.

- La función de densidad f_X debe cumplir con la siguientes propiedades:
  - Es siempre mayor o igual que 0, es decir, la gráfica de dicha función debe intersectar o estar por sobre el eje horizontal .
  $$f_X(x) \geq 0$$
  - El área entre la curva de la función y el eje horizontal debe ser igual a 1.

- La probabilidad de que la variable aleatoria X este entre los valores a y b, corresponde el área de la región definida por los valores a y b y la curva de la función de densidad f_X.

.

- La probabilidad de que una variable aleatoria continua X tome un valor puntual a es igual a 0.