Aula360
Aprendizaje para el siglo XXI

Apuntes Unidad 3

Conceptos introductorios de probabilidad

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

CMM
Centro de Modelamiento Matemático

En esta nueva unidad aprenderemos algunos conceptos claves para adentrarnos en el mundo de las probabilidades. Para comenzar, introduciremos algunas definiciones.

EXPERIMENTO ALEATORIO

Un **experimento aleatorio** corresponde a cualquier situación o procedimiento que, al ser repetido bajo condiciones que se suponen idénticas, produce un resultado que no es posible de predecir. Por ejemplo, ver el resultado al lanzar un dado, cuántas caras se obtienen al lanzar dos monedas o el lado con el que un pan con mermelada cae al suelo.

Otro concepto importante es espacio muestral, el cual estudiaremos a continuación.

ESPACIO MUESTRAL

Un **espacio muestral** asociado a un experimento aleatorio es el conjunto de todos los resultados posibles que se pueden obtener al llevar a cabo el experimento. Conociendo esta definición, podemos tomar algunos experimentos aleatorios como ejemplos y definir sus respectivos espacios muestrales.

- Al experimento de lanzar un dado le podemos asociar el espacio muestral formado por los valores 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Figura 1: Espacio muestral de un lanzamiento de un dado de 6 caras.

- Al experimento de dejar caer un pan con mermelada le podemos asociar el espacio muestral cuyos resultados son caer con la mermelada “hacia abajo” o “hacia arriba”.

Es importante tener en cuenta que se puede definir más de un espacio muestral para un mismo experimento aleatorio. Por ejemplo, para el lanzamiento de dos monedas podemos considerar el espacio muestral cuyos elementos son cara-cara, cara-sello y sello-sello. En este caso, pensamos que las monedas no las podemos distinguir porque tienen el mismo valor.

Figura 2: Espacio muestral del lanzamiento de dos monedas
(sin distinguir entre monedas).

Sin embargo, si pudiéramos distinguir las monedas, por ejemplo, cuando tienen distinto valor o alguna marca, es natural asociar un espacio muestral conformado por cuatro resultados: cara-cara, cara-sello, sello-cara, sello-sello.

Figura 3: Espacio muestral del lanzamiento de dos monedas
(distinguiendo entre monedas).

Antes de continuar con la siguiente definición, introduciremos una notación que puede resultar útil para casos como el anterior.

Notación

Muchas veces resulta conveniente usar pares ordenados o tuplas, tales como (a, b) o (a, b, c), para denotar los resultados de un experimento aleatorio. Por ejemplo, para el experimento que consiste en:

- Extraer de forma consecutiva dos bolitas de una bolsa que contiene bolitas verdes y naranjas, el par ordenado (naranja, verde) nos indica que la primera bolita que sacamos es naranja y que la segunda es verde.
- Lanzar dos dados de distinto color, el par ordenado (4, 2) nos indica que en el dado de un color salió 4 y en el otro un 2.
- Lanzar una moneda tres veces consecutivas, la tripleta (C, S, S) nos indica que salió primero cara y luego dos veces sello.

Ahora, conociendo la definición de espacio muestral, estudiemos qué es un evento.

EVENTO O SUCESO

Un **evento** o suceso es un conjunto cualquiera de resultados posibles de un experimento aleatorio. Dicho de otra forma, un evento es cualquier subconjunto del espacio muestral.

Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado se tiene que el subconjunto:

- {5} corresponde al evento “obtener un 5”.
- {2, 4, 6} a “obtener un par”.

Al realizar un experimento aleatorio, decimos que un evento A **ocurre** cuando el resultado obtenido es un elemento de A. Por tanto, si definimos un evento A cómo “obtener un par” y al lanzar el dado obtenemos el número 4, decimos que el evento A ocurrió.

Corolario 1:
El conjunto de todos los elementos del espacio muestral también es un evento.
Por ejemplo, {1, 2, 3, 4, 5, 6} es el evento que se asocia a obtener cualquier valor, por lo que siempre ocurre.

Corolario 2
También es un evento el conjunto vacío, que corresponde a un conjunto sin elementos. Este no se asocia a la ocurrencia de algún resultado posible, sino que más bien se define como evento debido a que es un subconjunto posible del espacio muestral. A este evento se le asigna probabilidad cero.

Por otro lado, a los elementos del espacio muestral que conforman un evento se les suele referir como los **casos favorables del evento**. Por ejemplo, para el espacio muestral {1, 2, 3, 4, 5, 6} asociado al experimento de lanzar un dado y observar el número de la cara superior, se tiene que el evento:

- “El resultado es 3” tiene solo un caso favorable: 3.
- “El resultado es par” tiene tres casos favorables: 2, 4 y 6.
- “El resultado es un divisor de 6” tiene cuatro casos favorables: 1, 2, 3 y 6.

Considerando las definiciones estudiadas previamente, incorporaremos una forma de saber que tan probable es que ocurra un evento, en otras palabras, una forma de medir la probabilidad de ocurrencia de un evento.

MEDIDA DE PROBABILIDAD

Si Ω representa un espacio muestral, entonces una medida de probabilidad corresponde a un valor numérico $P(A)$ para cada evento A del espacio muestral, que debe satisfacer tres propiedades esenciales:

- **Propiedad 1:** Para cualquier evento A, se cumple que $0 \leq P(A) \leq 1$.
- **Propiedad 2:** El evento $A = \Omega$, correspondiente a todo el espacio muestral, cumple que $P(A) = P(\Omega) = 1$.
- **Propiedad 3:** Cuando los eventos A y B no tienen resultados en común, es decir, la intersección de los conjuntos es vacía, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. .

Corolario 3
Dos eventos A y B se dicen disjuntos o excluyentes si no pueden ocurrir simultáneamente, es decir, si $A \cap B$ es igual al conjunto vacío. En este caso, se cumple que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. .

Históricamente ha habido dos formas usuales de definir la probabilidad de que ocurra un evento, las que se suelen referir como "enfoque empírico" y "enfoque clásico" de la probabilidad.

Enfoque empírico

En el **enfoque empírico o frecuentista**, la probabilidad de un evento se define como el valor al que tiende la frecuencia relativa de este cuando se repite el experimento un número considerablemente grande de veces bajo las mismas condiciones.

Esto se basa en el hecho de que la frecuencia relativa de cada resultado del experimento aleatorio tiende a estabilizarse cuando aumenta el número de repeticiones, lo que se conoce como la ley de los grandes números.

Es importante tener en cuenta de que, desde este enfoque, la probabilidad de un evento se interpreta como un valor teórico, esto es, una idealización basada en imaginar lo que ocurriría después de repetir infinitas veces el experimento.

Decimos que un espacio muestral es **equiprobable** cuando todos los resultados que lo conforman tienen la misma probabilidad de ocurrir. El hecho de que un espacio muestral sea equiprobable generalmente proviene de observar que no hay factores que privilegien la ocurrencia de unos resultados por sobre otros. Esto ocurre, por ejemplo, al lanzar dados o monedas.

Ejemplos típicos de espacios muestrales equiprobables		
Experimento aleatorio	Espacio muestral	Probabilidad de cada resultado del espacio muestral
Lanzamiento de un dado	{1,2,3,4,5,6}	$\frac{1}{6} = 0,1666... = 0,167$
Lanzamiento de una moneda	{Cara, Sello}	$\frac{1}{2} = 0,5$

Enfoque empírico

Cuando se tiene un espacio muestral equiprobable con n elementos, la probabilidad de un evento A que tiene asociado k casos favorables es igual a k veces $\frac{1}{n}$, es decir, $\frac{k}{n}$. Lo anterior se puede formular de la siguiente manera:

$$\text{Probabilidad del evento} = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos totales}}$$

Lo anterior se conoce como la **regla de Laplace** para el cálculo de probabilidades. Es importante recalcar que esta regla solo se puede aplicar cuando el espacio tiene una cantidad finita de elementos y es equiprobable.

Observación: La resolución anterior es una explicación intuitiva de la regla de Laplace. En general, si tenemos un experimento aleatorio con un espacio muestral **equiprobable** de n elementos, y tenemos un evento A compuesto de k elementos de ese espacio muestral, entonces:

$$P(A) = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

Teniendo en cuenta estos dos enfoques, veamos en qué se diferencian.

DIFERENCIA ENTRE LOS ENFOQUES

En el enfoque clásico, basado en aplicar la regla de Laplace, es necesario contar con un espacio muestral, cuyos elementos sean conocidos y tengan la misma probabilidad de ocurrir. Sin embargo, hay situaciones en las que no es posible encontrar los elementos que conforman el espacio o bien poder asegurar que este sea equiprobable. Por ejemplo, en el experimento de lanzar chinchetas y registrar si caen de cabeza o de punta no es claro cómo definir un espacio muestral equiprobable.

En situaciones como esta, sin la ejecución del experimento no es posible conocer tendencias o regularidades para estimar la probabilidad de los elementos del espacio muestral. Por lo que resulta necesario utilizar un enfoque frecuencial.

SÍNTESIS

- Un **experimento aleatorio** corresponde a cualquier situación o procedimiento que, al ser repetido bajo condiciones que se suponen idénticas, produce un resultado que no es posible de predecir.

- Un **espacio muestral** asociado a un experimento aleatorio es el conjunto de todos los resultados posibles de obtener al llevar a cabo el experimento.

- Un **evento** o **suceso** es un conjunto cualquiera de resultados posibles de un experimento aleatorio. Dicho de otra forma, un evento es cualquier subconjunto del espacio muestral. Los resultados que pertenecen al evento se suelen referir como casos favorables.

- Si Ω representa un espacio muestral, entonces una medida de probabilidad corresponde a un valor numérico $P(A)$ para cada evento A del espacio muestral, que debe satisfacer tres propiedades esenciales:
    - **Propiedad 1:** Para cualquier evento A, se cumple que $0 \leq P(A) \leq 1$.
    - **Propiedad 2:** El evento $A = \Omega$, correspondiente a todo el espacio muestral, cumple que $P(A) = P(\Omega) = 1$.
    - **Propiedad 3:** Cuando los eventos A y B no tienen resultados en común, es decir, la intersección de los conjuntos es vacía, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. .

- Hay dos maneras usuales de definir la probabilidad de un evento:
  - **Enfoque frecuentista:** la probabilidad se estima a partir de la frecuencia relativa de todos los casos favorables del evento.
  - **Enfoque clásico:** la probabilidad se calcula usando la regla de Laplace.

- Decimos que un espacio muestral es **equiprobable** cuando todos los resultados que lo conforman tienen la misma probabilidad de ocurrir.

- De acuerdo con el enfoque clásico, cuando se tiene un espacio muestral equiprobable la probabilidad de un evento de este se puede calcular utilizando la regla de Laplace:

$$\text{Probabilidad del evento} = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos totales}}$$