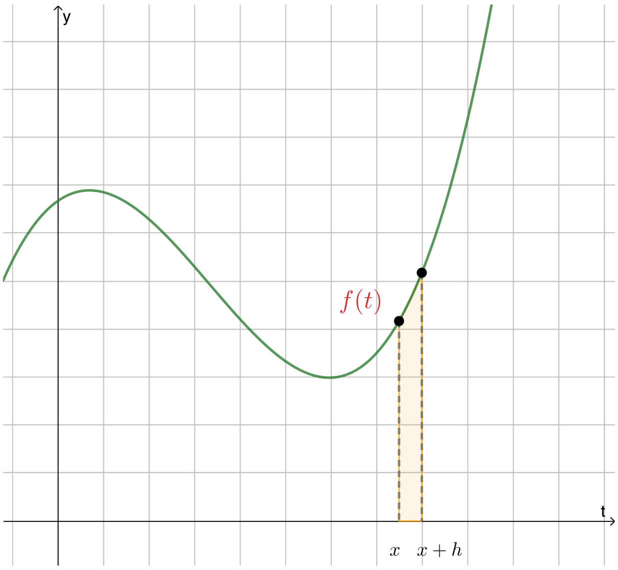
Apuntes Unidad 4

Teorema fundamental del cálculo

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO:

Consideremos el área bajo la curva definida por $f(t)$ en el intervalo $[x, x + h]$, de ancho h, con h positivo.

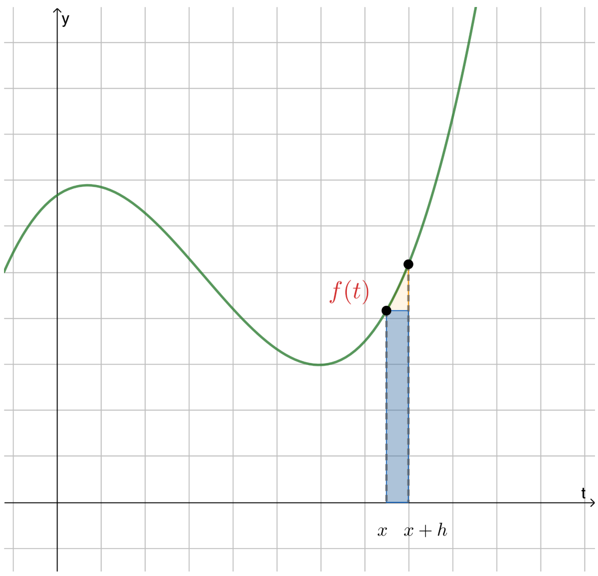


Sea $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Usando integrales, el área está dada por:

$$A = \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Aplicando propiedades de la integral, esta se puede expresar como:

$$A = \int_x^{x+h} f(t)dt = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = F(x + h) - F(x)$$



Cuando h es pequeño, los valores de f en el intervalo $[x, x + h]$ son todos muy parecidos a $f(x)$, dado que la función es continua. De esta manera, el área A es aproximadamente igual al área de un rectángulo de base h y altura $f(x)$, es decir, $A \approx h \cdot f(x)$.

Usando todo lo anterior, obtenemos:

$$A = F(x + h) - F(x) \approx h\, f(x)$$

Dividimos por h:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \approx f(x)$$

Notemos que para el desarrollo anterior supusimos h positivo, sin embargo, se puede argumentar que la misma relación se cumple para h negativo.

Por otro lado, a partir de la continuidad de f, se puede demostrar que cuando h tiende a 0, se tiene que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

El límite calculado, corresponde a la definición de $F'(x)$, y por lo tanto, lo anterior es equivalente a:

$$F'(x) = f(x)$$

Para el desarrollo anterior supusimos f continua **y positiva**, sin embargo, se puede argumentar que la misma relación se cumple para **cualquier** función f continua.

Concluimos entonces que **para toda función continua** $f(t)$**, la integral**

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es una antiderivada de $f(x)$**,** es decir, satisface que $F'(x) = f(x)$.

Este resultado corresponde a un teorema denominado **Teorema Fundamental del Cálculo** (TFC), que expresa lo siguiente:

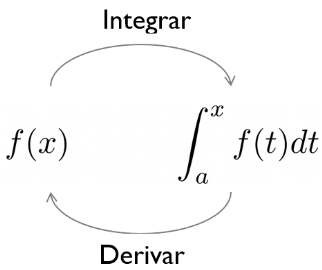
> Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, con $a \leq x \leq b$, es derivable en $]a, b[$, y su derivada es:

$$F'(x) = f(x)$$

Notemos que el **TFC** describe la **relación entre la derivada y la integral**.

Para observar esto, notemos que si primero integramos f y luego derivamos el resultado, volvemos a obtener la función original f:

$$\left(\int_{a}^{x} f(t)dt \right)' = f(x)$$



El **TFC** permite asegurar que para toda función continua $f(t)$, la integral $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$ es una antiderivada de $f(x)$. También nos dice que si una función es continua, entonces tiene antiderivada.

SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO:

Sea f una función continua en $[a, b]$, y consideremos la función:

$$\varphi(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$$

El **TFC** permite afirmar que:

$$\varphi'(x) = f(x)$$

Para responder lo siguiente, supongamos que $F(x)$ es otra antiderivada de $f(x)$.

Dado que las funciones $\varphi(x)$ y $F(x)$ poseen la misma derivada, entonces difieren en una constante, es decir, se satisface que $\varphi(x) = F(x) + C$.

De la afirmación anterior, sabemos que $\varphi(x) = F(x) + C$, para todo x en el intervalo $[a, b]$. En particular esto es cierto al evaluar en $x = a$ y $x = b$:

$$\varphi(a) = F(a) + C$$

$$\varphi(b) = F(b) + C$$

Restamos la segunda igualdad anterior con la primera, y obtenemos:

$$\varphi(b) - \varphi(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

Por definición, tenemos que:

$$\varphi(a) = \int_a^a f(t)dt$$

Por propiedad de la integral, dado que esta se calcula en el intervalo $[a, a]$, entonces es nula:

$$\varphi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

Combinando los resultados anteriores, obtenemos:

$$\varphi(b) - \varphi(a) = F(b) - F(a)$$

$$\varphi(b) - 0 = F(b) - F(a)$$

$$\varphi(b) = F(b) - F(a)$$

Es decir,

$$\varphi(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Acabamos de demostrar que para una función f continua en $[a, b]$, se tiene:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \text{ ,}$$

donde F es una antiderivada cualquiera de f.

Lo que acabamos de exponer, corresponde a una regla que es consecuencia del **Teorema Fundamental del Cálculo,** que se conoce usualmente como **Segundo Teorema Fundamental del Cálculo**, que expresa lo siguiente:

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) ,$$

donde $F(x)$ es cualquier antiderivada de $f(x)$, esto es $F'(x) = f(x)$.

Una notación usual para lo anterior es:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

El **segundo TFC** establece que si conocemos una antiderivada F de f podemos determinar el valor de

$$\int_a^b f(x)dx$$

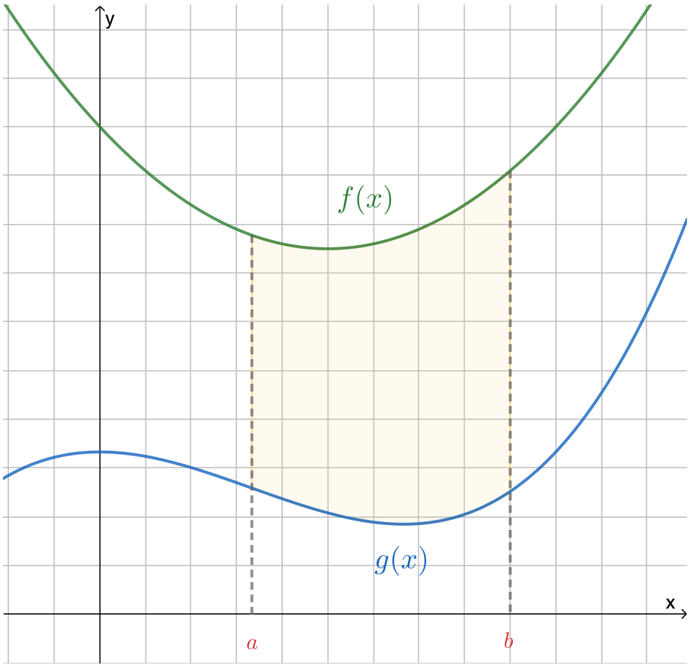
evaluando la antiderivada en los bordes del intervalo $[a, b]$, y calculando la diferencia. Notemos que esta forma de calcular integrales es mucho más sencilla que mediante Sumas de Riemann cuando se conoce una antiderivada.

Cabe destacar que los **TFC** son válidos incluso si las funciones integradas toman valores negativos, en cuyo caso la interpretación de la integral como área ya no se cumple.

ÁREA ENTRE DOS CURVAS

En esta sección aplicaremos lo aprendido anteriormente para calcular el área entre curvas.

En la imagen a continuación se muestran las curvas definidas por las funciones $f(x)$ y $g(x)$; y el área achurada entre ellas en el intervalo $[a, b]$.



El área entre las curvas f y g en el intervalo $[a, b]$ corresponde a la **resta** del área bajo f con el área bajo g, en el mismo intervalo, dado que $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$.

Ahora consideremos f y g , como dos funciones cualesquiera, continuas en un intervalo $[a, b]$.

Notemos que el área bajo la curva $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es $\int_a^b f(x)dx$, mientras que el área bajo la curva $g(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es $\int_a^b g(x)dx$.

Si $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$, entonces el área entre las curvas definidas por $f(x)$ y $g(x)$ corresponde a:

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

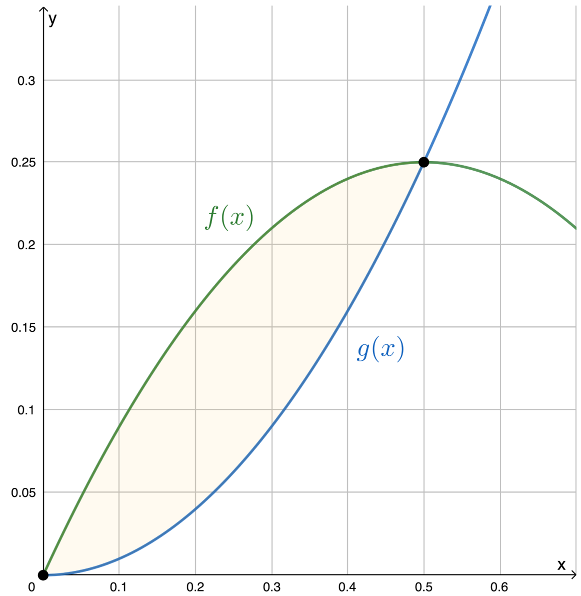
Aplicando propiedades de la integral, lo anterior se puede escribir bajo una sola integral como:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Es decir, cuando $f(x) \geq g(x)$, **el área entre ambas curvas corresponde a la integral de la resta de ambas funciones.**

Para comprender mejor lo anterior, veamos un ejemplo.

Consideremos el área entre las parábolas $f(x) =- x^2 + x$ y $g(x) = x^2$ en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, como se muestra a continuación.



Como $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, entonces el área está dada por:

$$A = \int_{o}^{\frac{1}{2}} [f(x) - g(x)]\, dx$$

Reemplazamos con las expresiones de f y g:

$$A = \int_{0}^{\frac{1}{2}} [(-x^2 + x) - (x^2)]\, dx$$

Desarrollamos, y obtenemos:

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} [x - 2x^2] dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{(1/2)^2}{2} - \frac{2(1/2)^3}{3} = \frac{1}{24}$$

¿Qué aprendimos?

En esta lección aprendimos:

- Dada una función continua $f(x)$, la función definida por:

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$$

  es una **antiderivada** de $f(x)$. Este resultado se conoce como Teorema Fundamental del Cálculo o **TFC**.

- El **segundo TFC** afirma que si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

  donde $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$. Esto quiere decir que podemos determinar el valor de la integral evaluando la antiderivada en los bordes del intervalo $[a, b]$, y calculando la diferencia.

- Sean f y g funciones continuas en un intervalo $[a, b]$, tales que $f(x) \geq g(x)$ en dicho intervalo. Entonces el área \(A\) entre las curvas definidas por $f(x)$ y $g(x)$ es

$$A = \int_{a}^{b} [\, f(x) - g(x)\,]\, dx$$