Graphical user interface, application

Description automatically generated

Apuntes Unidad 4

Teorema fundamental del cálculo

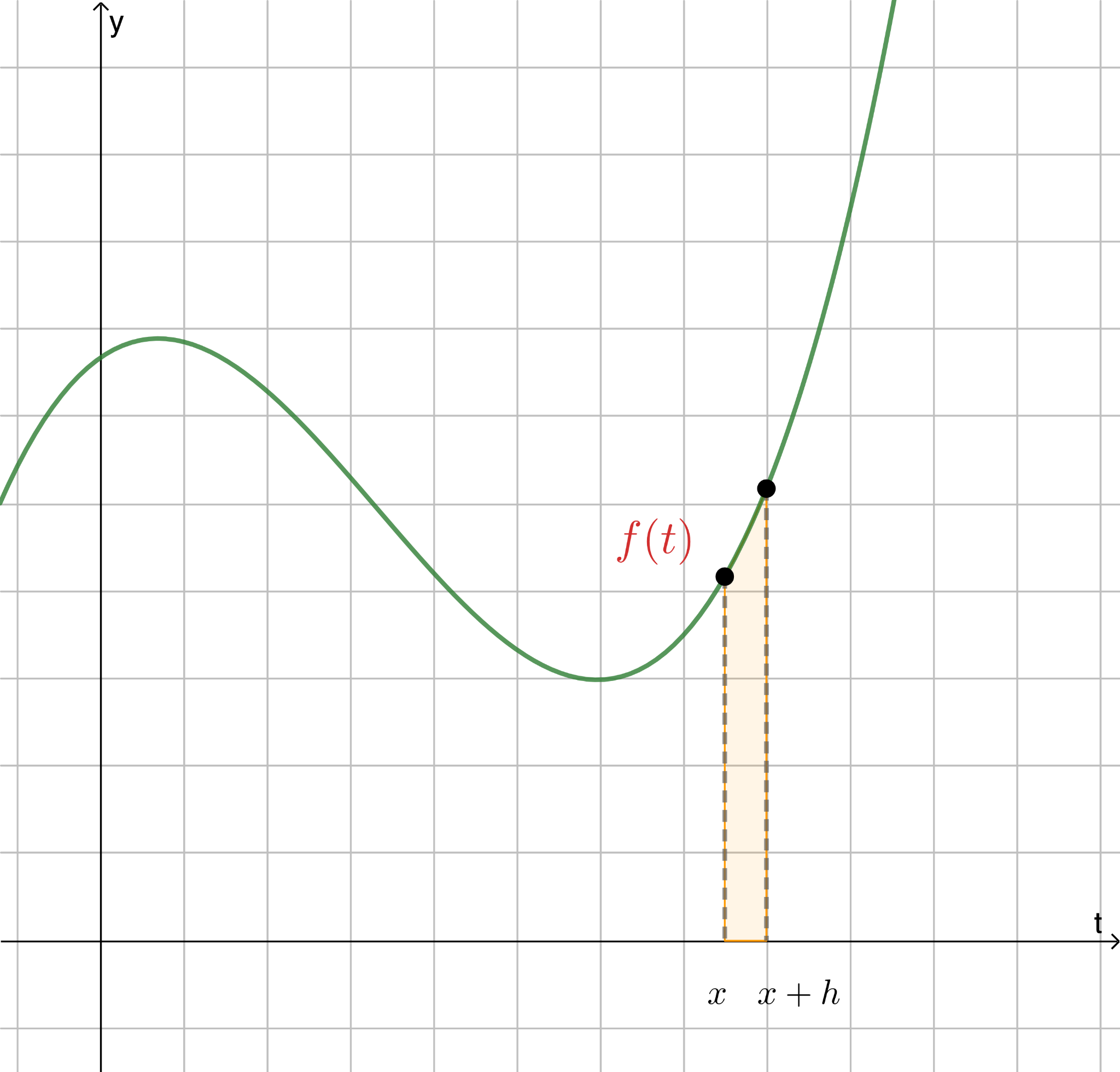


Shape, arrow

Description automatically generated

**TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO:**

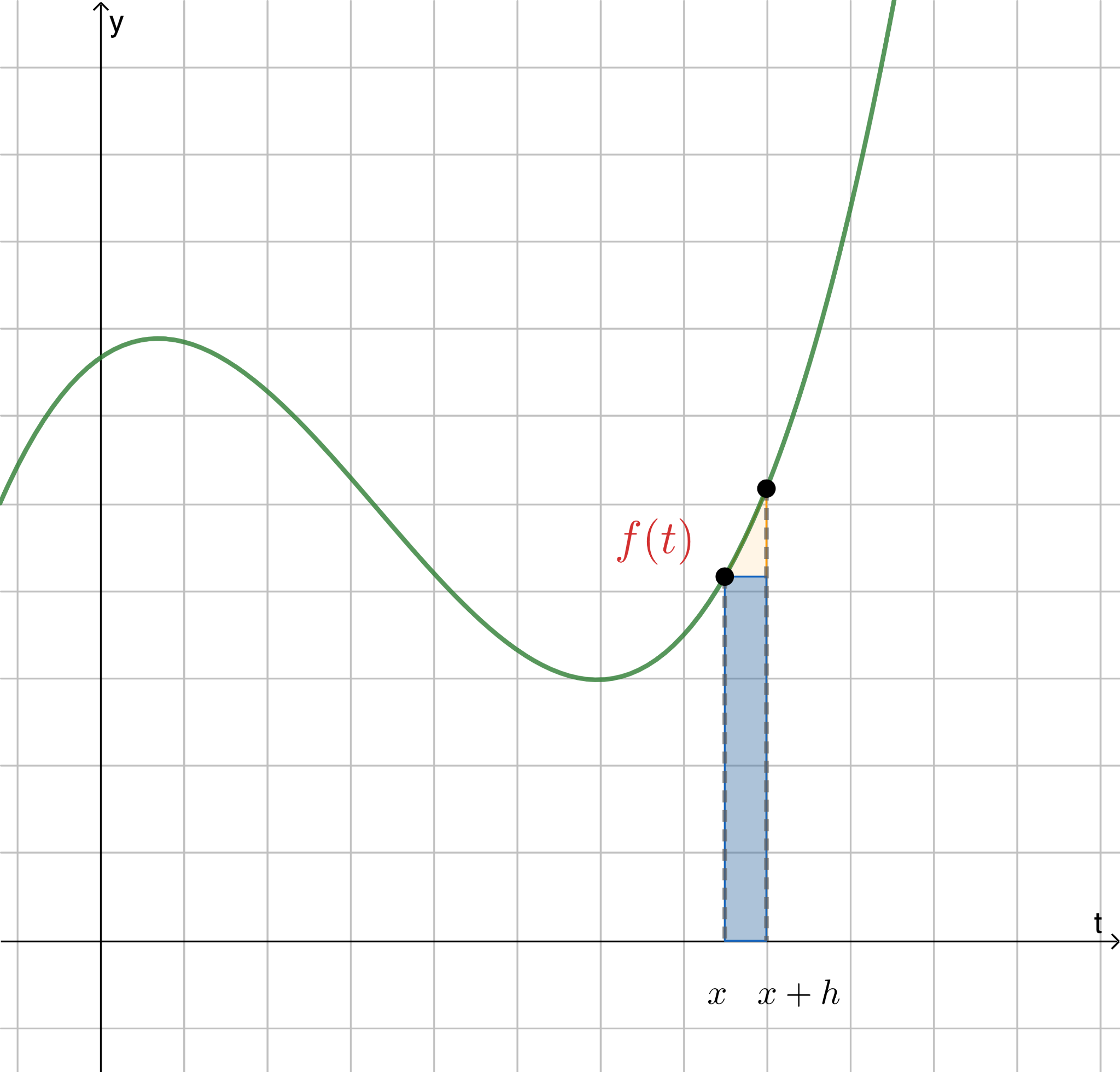
Consideremos el área bajo la curva definida por en el intervalo , de ancho , con positivo.



Sea . Usando integrales, el área está dada por:

.

Aplicando propiedades de la integral, esta se puede expresar como:



Cuando es pequeño, los valores de en el intervalo son todos muy parecidos a , dado que la función es continua. De esta manera, el área es aproximadamente igual al área de un rectángulo de base y altura , es decir, .

Usando todo lo anterior, obtenemos:

Dividimos por :

Notemos que para el desarrollo anterior supusimos positivo, sin embargo, se puede argumentar que la misma relación se cumple para negativo.

Por otro lado, a partir de la continuidad de , se puede demostrar que cuando tiende a , se tiene que:

El límite calculado, corresponde a la definición de , y por lo tanto, lo anterior es equivalente a:

Para el desarrollo anterior supusimos continua **y positiva**, sin embargo, se puede argumentar que la misma relación se cumple para **cualquier** función continua.

Concluimos entonces que **para toda función continua , la integral**

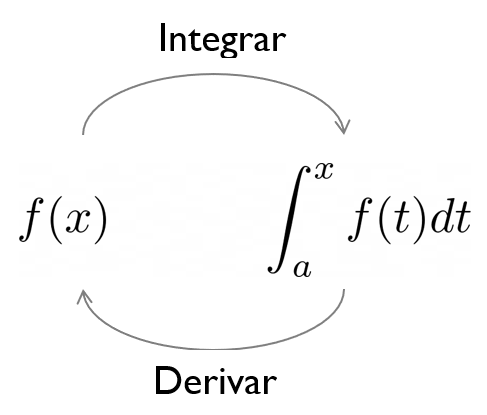
**es una antiderivada de ,** es decir, satisface que .

Este resultado corresponde a un teorema denominado **Teorema Fundamental del Cálculo** (TFC), que expresa lo siguiente:

Si es una función continua en , entonces la función , con , es derivable en , y su derivada es:

Notemos que el **TFC** describe la **relación entre la derivada y la integral**.

Para observar esto, notemos que si primero integramos y luego derivamos el resultado, volvemos a obtener la función original :



El **TFC** permite asegurar que para toda función continua , la integral es una antiderivada de . También nos dice que si una función es continua, entonces tiene antiderivada.

**SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO:**

Sea una función continua en , y consideremos la función:

El **TFC** permite afirmar que:

Para responder lo siguiente, supongamos que es otra antiderivada de .

Dado que las funciones y poseen la misma derivada, entonces difieren en una constante, es decir, se satisface que .

De la afirmación anterior, sabemos que , para todo en el intervalo . En particular esto es cierto al evaluar en y :

Restamos la segunda igualdad anterior con la primera, y obtenemos:

Por definición, tenemos que:

Por propiedad de la integral, dado que esta se calcula en el intervalo , entonces es nula:

Combinando los resultados anteriores, obtenemos:

Es decir,

Acabamos de demostrar que para una función continua en , se tiene:

,

donde es una antiderivada cualquiera de .

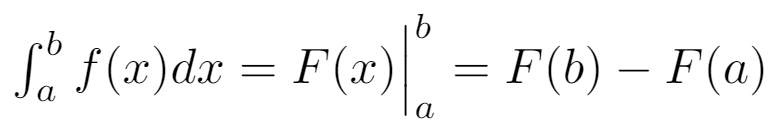
Lo que acabamos de exponer, corresponde a una regla que es consecuencia del **Teorema Fundamental del Cálculo,** que se conoce usualmente como **Segundo Teorema Fundamental del Cálculo**, que expresa lo siguiente:

Si es una función continua en , entonces:

,

donde es cualquier antiderivada de , esto es .

Una notación usual para lo anterior es:



El **segundo TFC** establece que si conocemos una antiderivada de podemos determinar el valor de

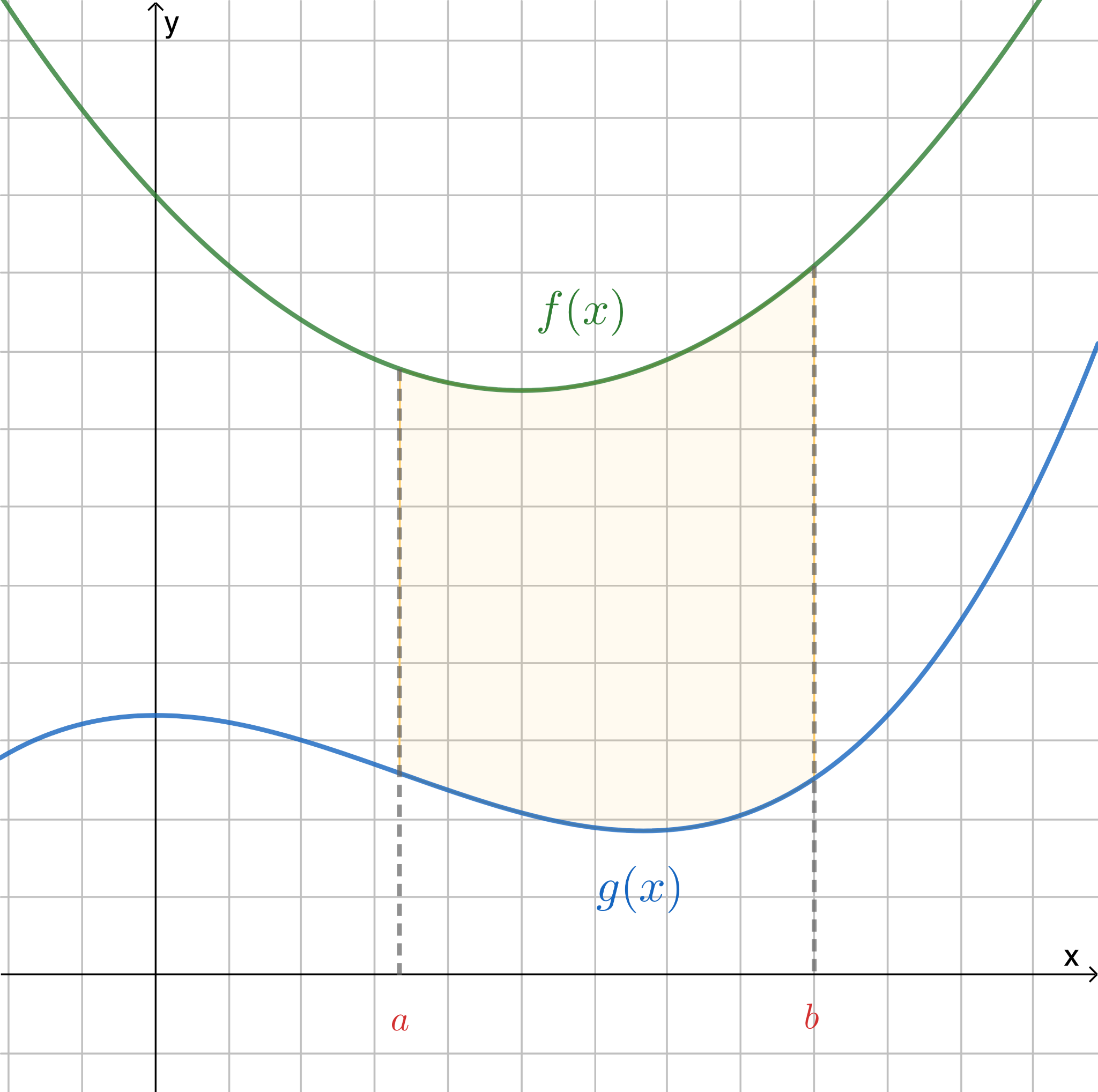
evaluando la antiderivada en los bordes del intervalo , y calculando la diferencia. Notemos que esta forma de calcular integrales es mucho más sencilla que mediante Sumas de Riemann cuando se conoce una antiderivada.

Cabe destacar que los **TFC** son válidos incluso si las funciones integradas toman valores negativos, en cuyo caso la interpretación de la integral como área ya no se cumple.

**ÁREA ENTRE DOS CURVAS**

En esta sección aplicaremos lo aprendido anteriormente para calcular el área entre curvas.

En la imagen a continuación se muestran las curvas definidas por las funciones y ; y el área achurada entre ellas en el intervalo .



El área entre las curvas y en el intervalo corresponde a la **resta** del área bajo con el área bajo , en el mismo intervalo, dado que en .

Ahora consideremos y , como dos funciones cualesquiera, continuas en un intervalo .

Notemos que el área bajo la curva en el intervalo es , mientras que el área bajo la curva en el intervalo es .

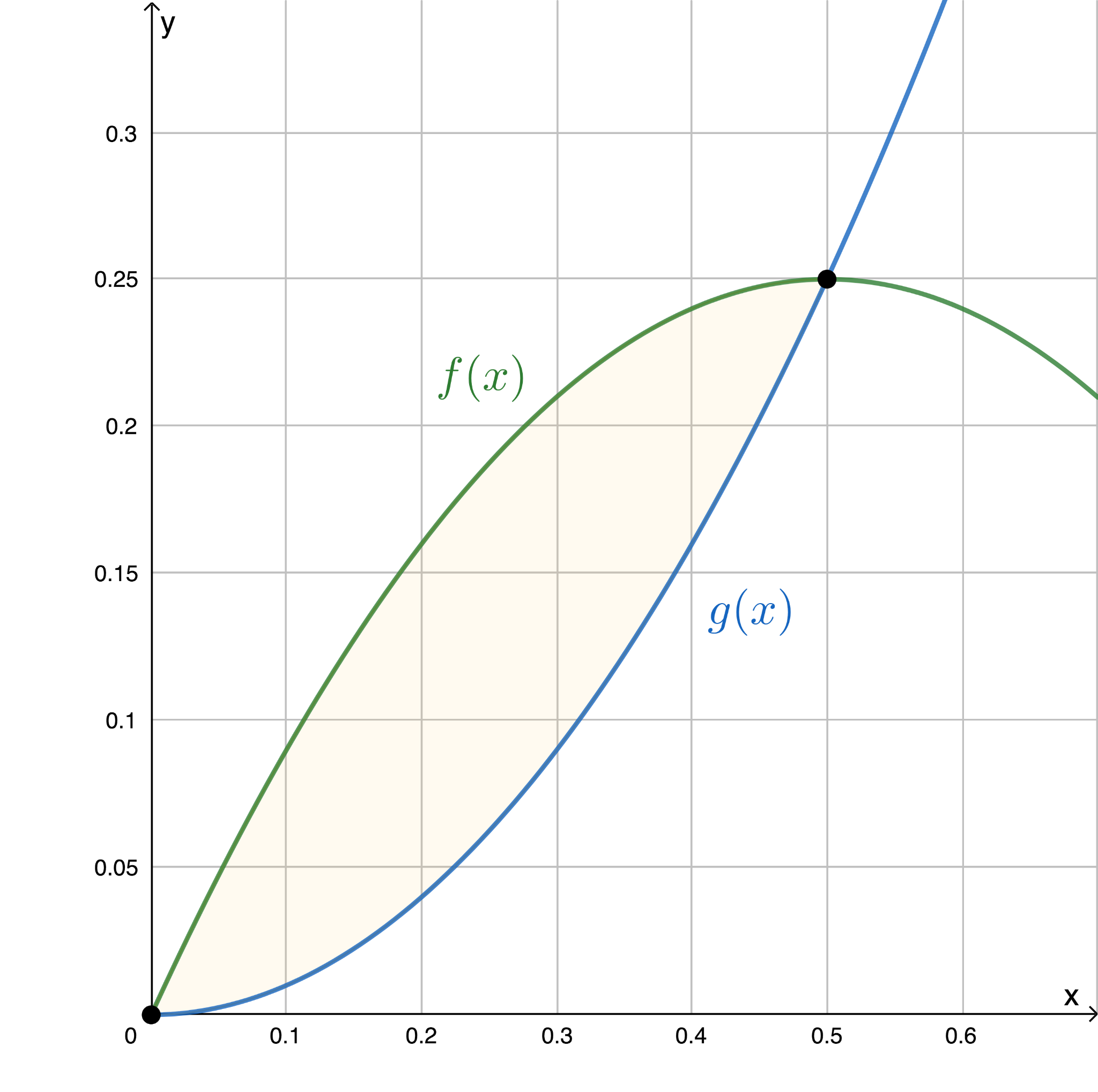
Si en , entonces el área entre las curvas definidas por y corresponde a:

Aplicando propiedades de la integral, lo anterior se puede escribir bajo una sola integral como:

Es decir, cuando , **el área entre ambas curvas corresponde a la integral de la resta de ambas funciones.**

Para comprender mejor lo anterior, veamos un ejemplo.

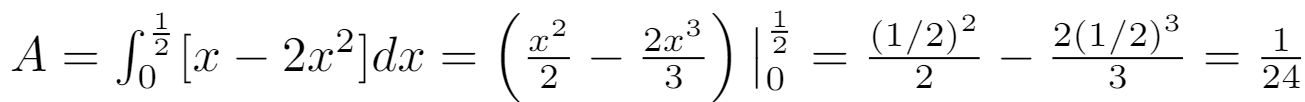
Consideremos el área entre las parábolas y en el intervalo , como se muestra a continuación.



Como en el intervalo , entonces el área está dada por:

Reemplazamos con las expresiones de y :

Desarrollamos, y obtenemos:



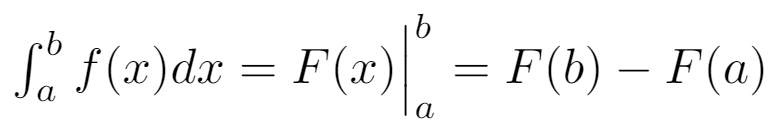
**SÍNTESIS**

En esta lección aprendimos:

* Dada una función continua , la función definida por:

es una **antiderivada** de . Este resultado se conoce como Teorema Fundamental del Cálculo o **TFC**.

* El **segundo** **TFC** afirma que si es una función continua en , entonces



donde es una antiderivada de . Esto quiere decir que podemos determinar el valor de la integral evaluando la antiderivada en los bordes del intervalo , y calculando la diferencia.

* Sean y funciones continuas en un intervalo , tales que en dicho intervalo. Entonces el área \(A\) entre las curvas definidas por y es

