Apuntes Unidad 4

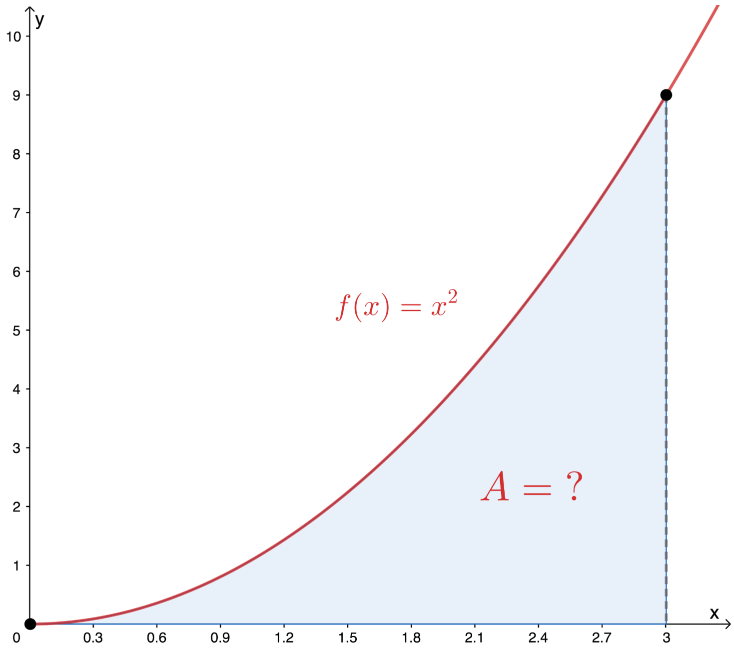
Sumas de Riemann e integral definida

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

CMM Centro de Modelamiento Matemático

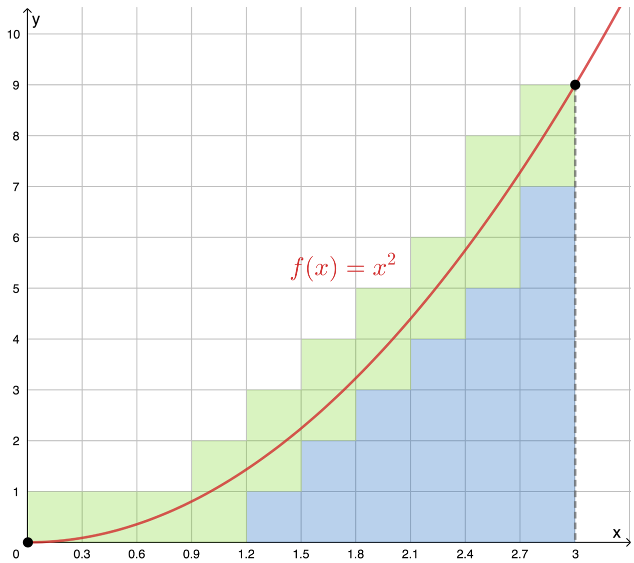
APROXIMACIÓN DEL ÁREA BAJO UNA PARÁBOLA

En esta sección desarrollaremos una estrategia que nos permita aproximar el área bajo la parábola $f(x) = x^2$, con x en el intervalo $[0, 3]$, como se muestra a continuación.



En este caso, no disponemos de una fórmula conocida, por lo que una opción es aproximar el área bajo la curva usando figuras de área conocida. Como por ejemplo, usando **triángulos, rectángulos, trapecios, combinación de las anteriores**, etc. Todas son válidas.

A continuación te mostramos una forma de aproximar el área usando una cuadrícula, que divide al plano en rectángulos pequeños.



El área bajo la parábola se puede acotar **inferiormente** por los rectangulitos azules, y **superiormente** por los rectangulitos azules más los verdes.

Observemos, que hay 22 rectangulitos azules y 18 verdes, por lo tanto, el área bajo la parábola está entre 22 y $22 + 18 = 40$ rectangulitos. Dado que los lados de cada rectangulito son $0,3$ y 1 el área de cada uno de ellos es $0,3$. Entonces, el área A bajo la parábola verifica la siguiente desigualdad:

$$22 \cdot 0,3 \; \leq \; A \; \leq \; 40 \cdot 0,3$$

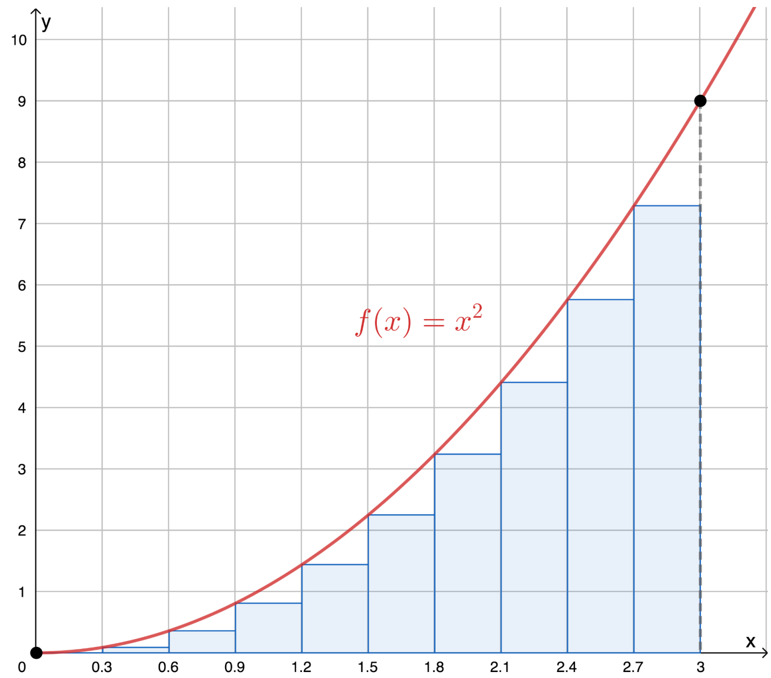
$$6,6 \; \leq \; A \; \leq \; 12$$

Podemos tomar una **primera aproximación** como el promedio entre la cota superior e inferior:

$$A \approx \frac{6,6 + 12}{2} = 9,3$$

Esta aproximación se puede mejorar, tomando por ejemplo, rectangulitos de lados suficientemente pequeños.

Veamos otra aproximación. Usaremos rectángulos de igual base y distintas alturas. Comencemos acotando inferiormente el área:



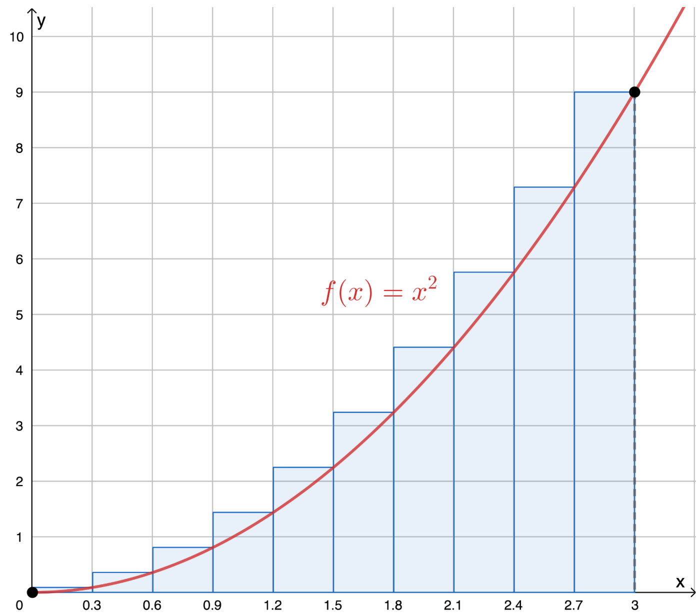
Puedes observar que hay 9 rectángulos, cuyas bases miden $0,3$. Notemos que cada rectángulo tiene como altura a la **función evaluada en el borde izquierdo de cada subintervalo**. Por ejemplo, en el último rectángulo, el borde izquierdo es $2,7$, por lo tanto, su altura mide:

$$f(2,7) = (2,7)^2 = 7,29.$$

Llamemos **suma inferior** y denotémosla por I, al área de los rectángulos bajo la parábola $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,3]$:

$$I = f(0,3) \cdot 0,3 + f(0,6) \cdot 0,3 + \ldots + f(2,4) \cdot 0,3 + f(2,7) \cdot 0,3 = 7,7$$

Ahora, resolveremos de manera análoga para acotar **superiormente** el área:



En este caso, la altura de cada rectángulo corresponde a la función evaluada en el borde derecho de cada intervalo.

Llamemos **suma superior** y denotémosla por S**,** al área de los rectángulos sobre la parábola $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,3]$. Luego, una cota superior de esta área, es:

$$S = f(0,3) \cdot 0,3 + f(0,6) \cdot 0,3 + \ldots + f(2,7) \cdot 0,3 + f(3) \cdot 0,3 = 7,7$$

Notemos que en este caso, la diferencia entre la suma inferior y la suma superior, es el término $f(3) \cdot 0,3$ que aparece al final en la suma superior. Dado que $f(3) = 3^2 = 9$, obtenemos:

$$S = I + 0,3 \cdot 9$$

En resumen, si tomamos como aproximación del área bajo la parábola el promedio de la cota superior e inferior:

- En el caso de los rectangulitos, se obtiene $A \approx 9,3$
- En el caso de los rectángulos de igual base, se obtiene $A \approx 9,05$

Entonces, este método mejoró la aproximación anterior.

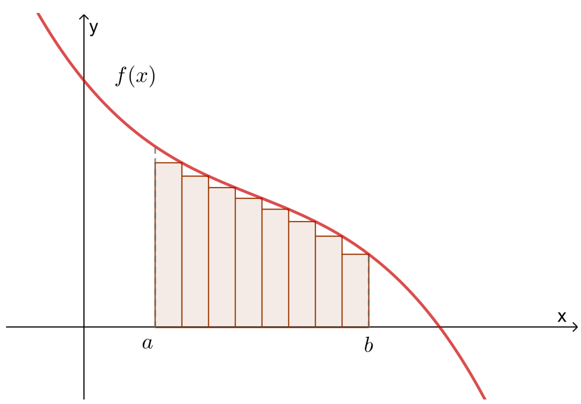
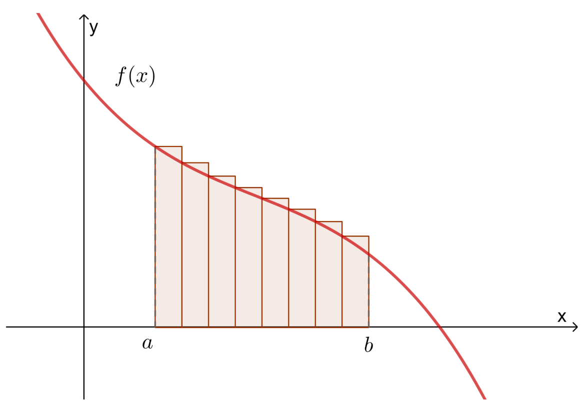
Nota:

Si ahora dividimos el intervalo $[0,3]$ en n rectángulos de igual ancho (es decir, dividimos el intervalo en n partes iguales):

- Se observa que I_n se aproxima cada vez más al área A bajo la parábola
- Se puede conjeturar que la cota inferior I_n tiende a 9
- A partir de los puntos anteriores, se puede conjeturar que el valor exacto del área bajo la parábola es 9

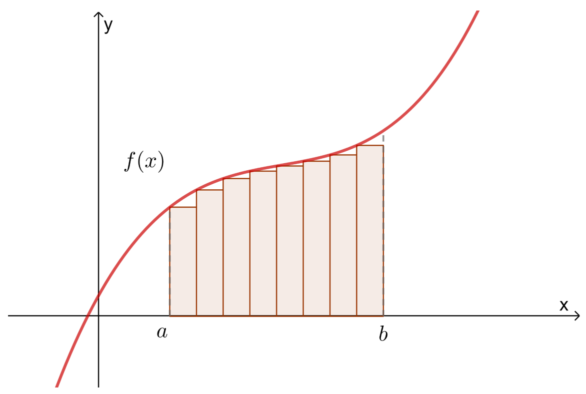
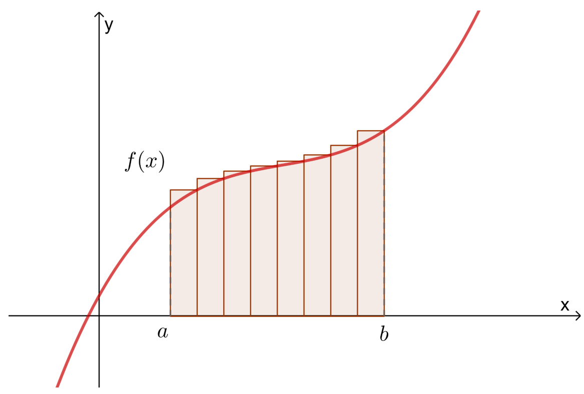
APROXIMACIÓN ÁREA BAJO UNA CURVA DE FUNCIONES MONÓTONAS Y NO MONÓTONAS

En las siguientes imágenes se muestra la suma inferior y superior del área bajo la curva de funciones estrictamente decrecientes y estrictamente crecientes (funciones monótonas).

Función estrictamente **decreciente** en $[a,b]$	
Suma inferior	**Suma superior**
	

Observemos que en este caso, la altura de los rectángulos corresponde a la función evaluada en el borde:

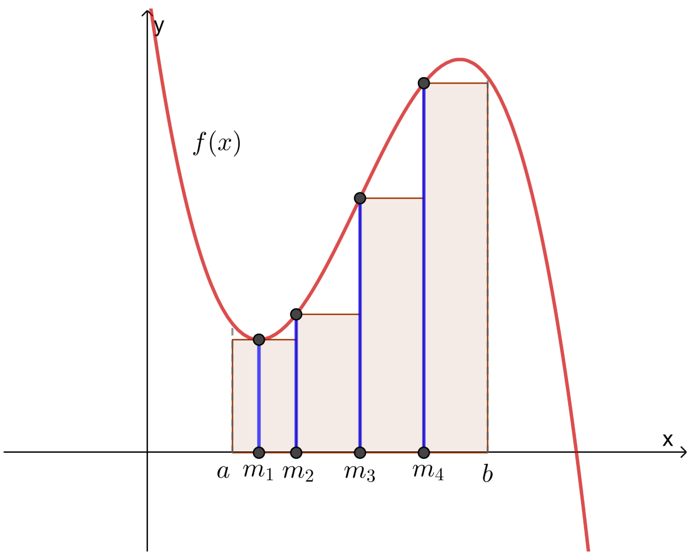
- **Derecho** de cada intervalo, si estamos considerando la **suma inferior.**
- **Izquierdo** de cada intervalo, si estamos considerando la **suma superior.**

Función estrictamente **creciente** en $[a, b]$	
Suma inferior	**Suma superior**
	

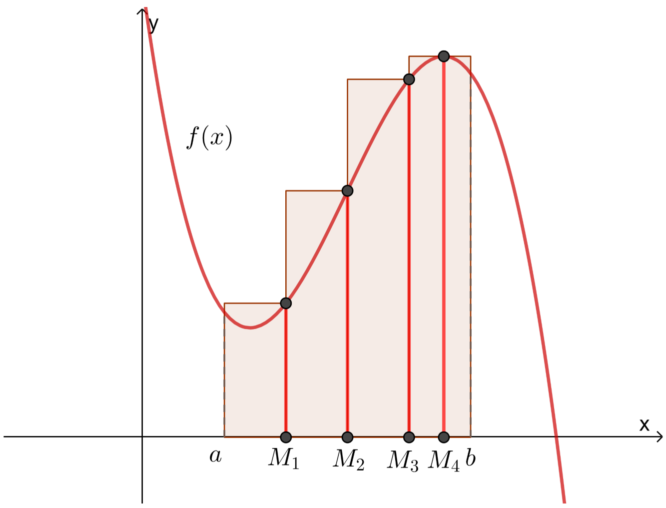
Observemos que en este caso, la altura de los rectángulos corresponde a la función evaluada en el borde:

- **Izquierdo** de cada intervalo, si estamos considerando la **suma inferior.**
- **Derecho** de cada intervalo, si estamos considerando la **suma superior.**

En el caso de la función $f(x)$, que es no monótona en $[a, b]$, se puede observar que la altura de los rectángulos de la suma inferior I_n corresponde al **valor mínimo** de $f(x)$ en cada subintervalo. En algunos de esos subintervalos el valor donde se produce el **mínimo** de la función está en alguno de los bordes, mientras que en otros está en el interior.



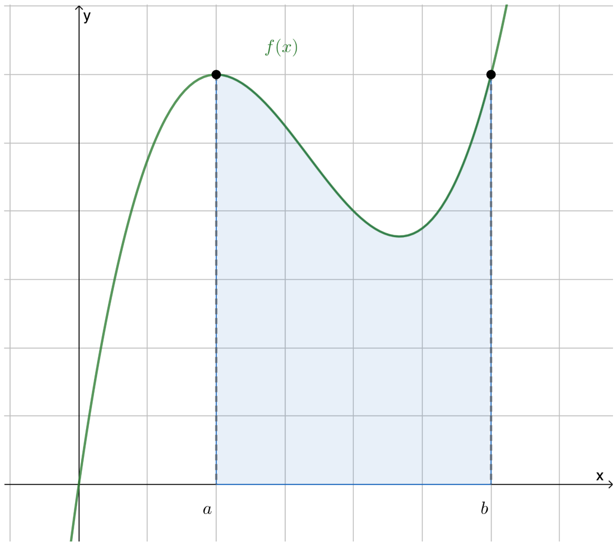
De manera similar, la altura de los rectángulos de la suma superior S_n corresponde al valor **máximo** de $f(x)$ en cada subintervalo. En algunos de esos subintervalos el valor donde se produce el máximo de la función está en alguno de los bordes, mientras que en otros está en el interior.



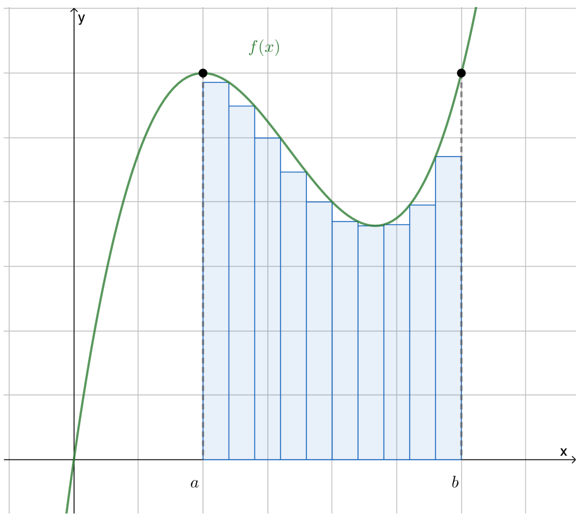
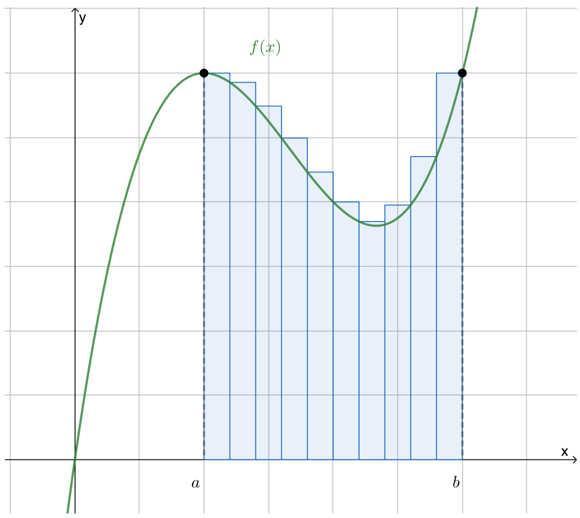
Notemos que si la función es creciente o decreciente en un subintervalo, la altura del rectángulo respectivo corresponde al valor de $f(x)$ en alguno de los bordes de ese subintervalo, que es donde se produce el mínimo o máximo de la función. Si la función es no monótona en un subintervalo, la altura corresponde a la función evaluada en un valor al interior de dicho subintervalo, específicamente el valor donde se produce el mínimo o máximo de $f(x)$.

DEFINICIÓN DEL ÁREA BAJO UNA CURVA F(X)

Sea A el área bajo la curva $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$, que supondremos que existe.



Una manera de aproximar el área bajo una curva en un intervalo $[a, b]$, consiste en sumar el área de n rectángulos de igual base, como se aprecia en las siguientes imágenes:

Suma Inferior	**Suma Superior**
	

Esto corresponde a dividir el intervalo $[a, b]$ en n, es decir, la base de cada rectángulo mide

$$base \ = \frac{b-a}{n}$$

lo que se llama una **equipartición** del intervalo. Nota que esta equipartición genera n **subintervalos**.

La altura de cada uno de los rectángulos es variable y depende de la función $f(x)$:

- Para la **suma inferior** de los n rectángulos**,** que denotamos por I_n , la altura corresponde al **mínimo** de la función $f(x)$ en **cada subintervalo**.
- Para la **suma superior** de los n rectángulos, que denotamos por S_n, la altura corresponde al **máximo** de la función $f(x)$ en **cada subintervalo**.

De esta manera, en la suma inferior, todos los rectángulos están debajo de la función, mientras que en la suma superior, todos están sobre ella. Por lo tanto, se tiene que

$$I_n \leq A \leq S_n$$

para todo n natural.

Notemos que I_n y S_n son sucesiones que dependen de n. Si aplicamos límite a esta desigualdad, obtenemos

$$\lim_{n \to \infty} I_n \leq A \leq \lim_{n \to \infty} S_n$$

Si se tiene que el límite de la suma inferior es igual al límite de la suma superior:

$$\lim_{n \to \infty} I_n = \lim_{n \to \infty} S_n$$

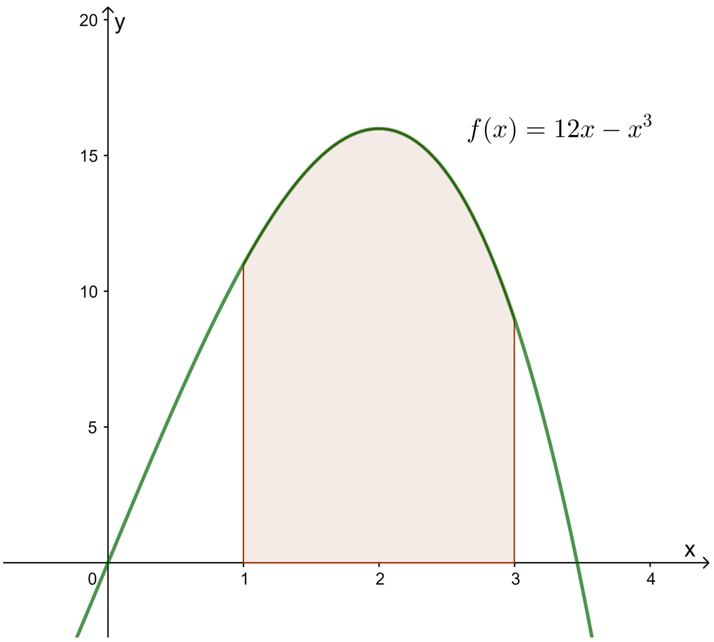
entonces, podemos definir el área A bajo la curva $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$, como

$$A = \lim_{n \to \infty} I_n = \lim_{n \to \infty} S_n$$

Lo expuesto es válido para funciones continuas y positivas. Por ahora no veremos casos en los que la función sea discontinua o negativa.

EJEMPLO DE APLICACIÓN

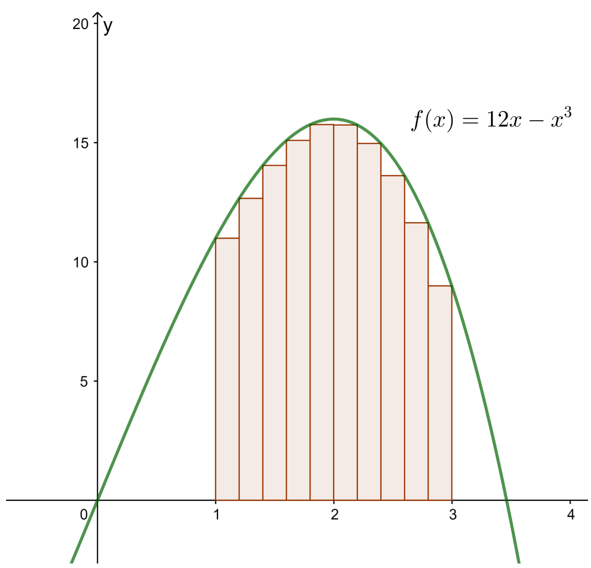
Dada la función $f(x) = 12x - x^3$, acotemos el área bajo la curva en el intervalo $[1, 3]$.



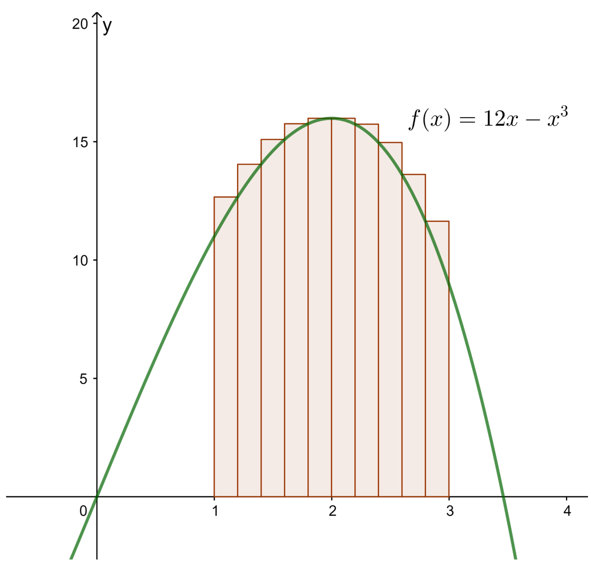
Para eso, consideremos una partición del intervalo $[1, 3]$ en 10 subintervalos de igual longitud. Luego, el ancho de los subintervalos será de $0,2$.

A continuación se muestra una imagen de la suma inferior y superior del área bajo la curva.

Suma inferior



Suma superior



Notemos que la función $f(x) = 12x - x^3$ es decreciente en $]2, 3]$ y creciente en $[1, 2[$. Haremos los cálculos tomando estos dos casos por separado.

Suma inferior:

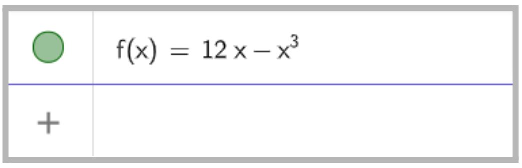
Para los subintervalos ubicados entre 1 y 2	**Para los subintervalos ubicados entre 2 y 3**
La altura de los rectángulos corresponden a la función evaluada en el borde izquierdo.	La altura de los rectángulos corresponden a la función evaluada en el borde derecho.

Suma superior:

Para los subintervalos ubicados entre 1 y 2	**Para los subintervalos ubicados entre 2 y 3**
La altura de los rectángulos corresponden a la función evaluada en el borde derecho.	La altura de los rectángulos corresponden a la función evaluada en el borde izquierdo.

Para calcular tanto I_n como S_n, basta sumar el área de cada uno de los rectángulos correspondientes en cada caso. Para eso, multiplicamos su altura por el ancho (que está dado por el ancho de cada intervalo).

Otra manera de realizar estos cálculos, es con la ayuda de GeoGebra. En primer lugar, graficamos la función, ingresando su fórmula en la línea de entrada:

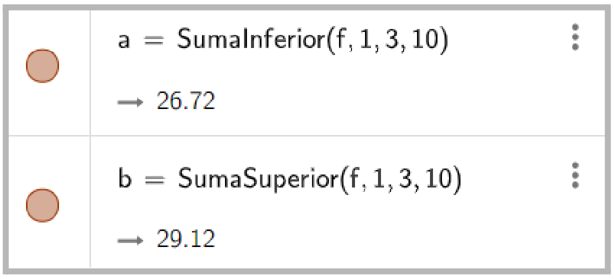


Luego, también en la línea de entrada, ingresamos los comandos:

- **SumaInferior(f,1,3,10)** → Para calcular I_n
- **SumaSuperior(f,1,3,10)** → Para calcular S_n

El primer argumento de este comando corresponde a la función (f), el segundo argumento al borde izquierdo del intervalo (1), el tercero al borde derecho (3) y el último argumento a la cantidad de rectángulos de igual base que se consideran (10).

Obtenemos:



Así, tenemos que $I_n = 26,72$ y $S_n = 29,12$.

SUMATORIA

La **sumatoria** es una notación matemática que permite **representar de manera abreviada la suma de varios elementos**. La expresión:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

representa la suma de los primeros n elementos de una sucesión a_k, es decir:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

y se lee como "sumatoria desde k igual a 1 hasta n, de a sub k".

Por ejemplo, la suma de los n primeros número naturales $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$ se puede expresar como sumatoria de la siguiente manera:

$$\sum_{k=1}^{n} k$$

Mientras que la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2$ se puede expresar como:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Algunas de las propiedades de la sumatoria se muestran a continuación. Considera que m y n son números naturales, y que tanto a_k como b_k son sucesiones de elementos que depende de k:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Si C es una constante, entonces:

- $\sum_{k=1}^{n} C = n \cdot C$
- $\sum_{k=1}^{n} C \cdot a_k = C \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$

Usemos lo anterior para resolver la siguiente sumatoria, a modo de ejemplo.

$$\sum_{k=1}^{15} 5k + k^2$$

Usamos las propiedades de la suma para reescribir la sumatoria buscada:

$$\sum_{k=1}^{15} 5k + k^2 = 5 \cdot \sum_{k=1}^{15} k + \sum_{k=1}^{15} k^2$$

Ahora podemos resolver cada sumatoria por separado:

- $5 \cdot \sum_{k=1}^{15} k = 5(\frac{n(n+1)}{2}) = 5(\frac{15(15+1)}{2}) = 600$
- $\sum_{k=1}^{15} k^2 = (\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}) = (\frac{15(15+1)(2 \cdot 15+1)}{6}) = 1\,240$

Finalmente sumamos los resultados obtenidos para cada sumatoria:

$$\sum_{k=1}^{15} 5k + k^2 = 5 \cdot \sum_{k=1}^{15} k + \sum_{k=1}^{15} k^2 = 600 + 1\,240 = 1\,840$$

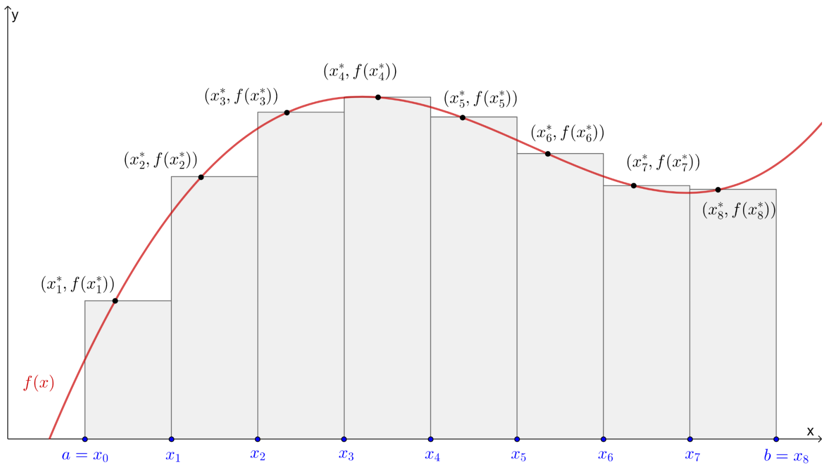
En la próxima sección veremos cómo la notación sumatoria es útil para expresar la aproximación del área bajo una curva como la suma de las áreas de cada rectángulo A_k .

SUMA DE RIEMANN

Supongamos que se desea aproximar **el área bajo la gráfica de una función** f que es **continua en el intervalo** $[a, b]$**.**

Consideremos que al intervalo $[a, b]$ se le realiza una equipartición en n partes iguales de ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. La **partición genera rectángulos cuyas bases corresponden a los subintervalos** $[\, x_{k-1} , x_k \,]$ **para** $k = 1, \; ... \; , n$**.** Para definir la altura de cada rectángulo, en cada intervalo **se elige un valor** x_k^*. De esta manera se obtienen n rectángulos de base Δx y respectivas alturas $f(x_k^*)$.

En la siguiente figura se representa la descripción anterior para una función $f(x)$ en rojo cuyo intervalo $[a, b]$ se divide en $n = 8$ partes. Notemos que $x_0 = a$ y $x_n = b$.

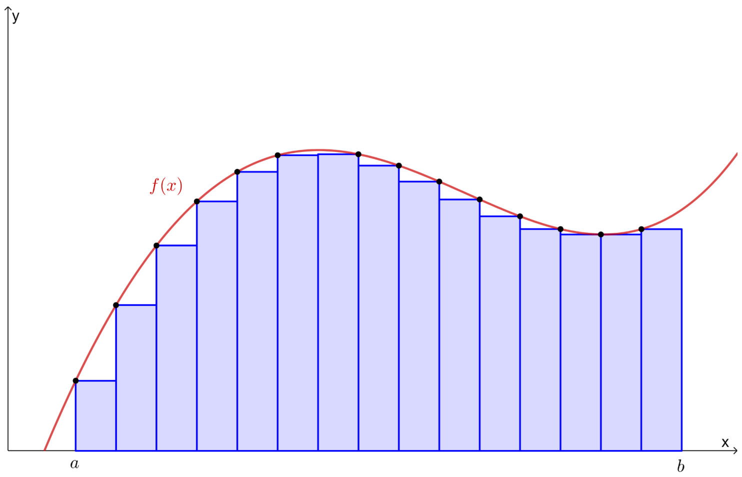


Se define la **Suma de Riemann** como la suma de las **áreas de los rectángulos** obtenidos por este procedimiento de subdivisión.

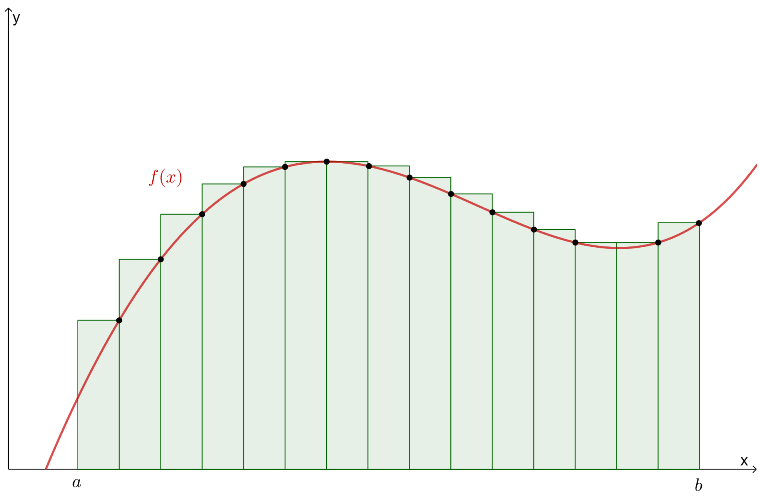
$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x$$

De este modo R_n **es una aproximación al área bajo la curva** de la función f en el intervalo $[a, b]$. Según el valor x_k^* que se elija se pueden obtener **distintos tipos** de Sumas de Riemann:

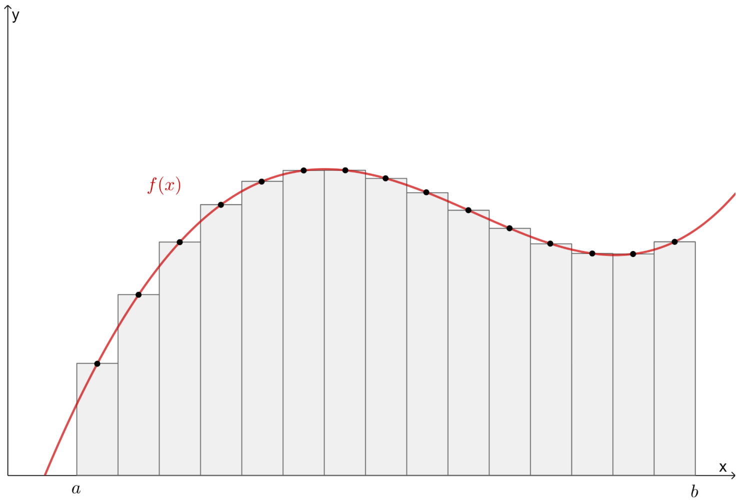
- La expresión para R_n corresponderá a **la suma de Riemann Inferior** I_n cuando, para todo k, **el valor de** x_k^* **corresponda al mínimo valor que toma** $f(x)$ al interior del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$.



- La expresión para R_n corresponderá a **la suma de Riemann Superior** S_n cuando, para todo k, **el valor de** x_k^* **corresponda al máximo valor que toma** $f(x)$ al interior del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$.



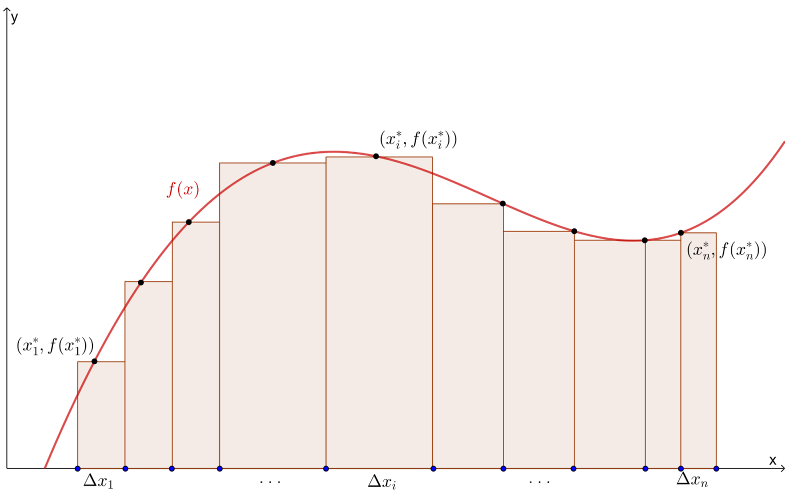
- De modo similar, la expresión para R_n corresponderá a **la suma de Riemann de punto medio** M_n cuando, para todo k, **el valor de** x_k^* **corresponda al punto medio** del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$.



En general, en lugar de considerar equiparticiones, se pueden considerar particiones del intervalo $[a, b]$ en las cuales los subintervalos no sean del mismo largo. La Suma de Riemann, en este caso general es:

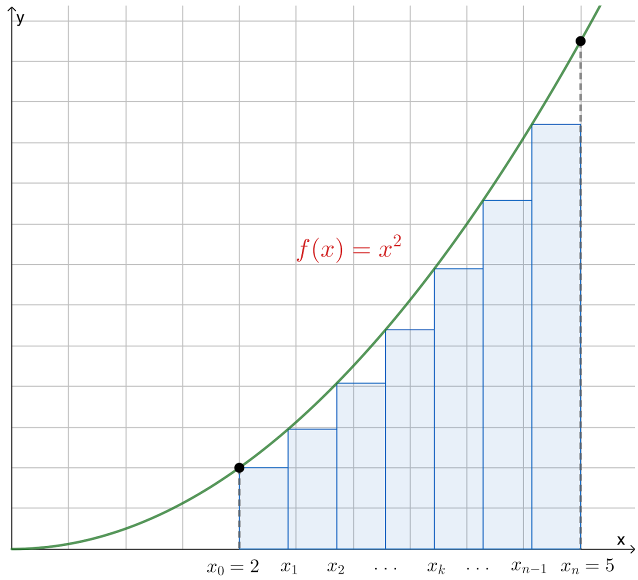
$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\, \Delta x_k$$

donde Δx_k corresponde al ancho de k-ésimo subintervalo, como se aprecia en la figura:



EJEMPLO DE APLICACIÓN

Calculemos el área bajo la parábola $f(x) = x^2$, pero en el intervalo $[2, 5]$. Para eso, consideremos que al intervalo $[2, 5]$, se le realiza una equipartición en n subintervalos como se ilustra a continuación:



A partir de la imagen podemos notar que el ancho de cada subintervalo mide $\Delta x = \frac{3}{n}$. Además, el intervalo empieza en $x_0 = 2$, y como cada vez se agrega un Δx para obtener $x_1, x_2, \ldots$, entonces $x_k = 2 + k\,\Delta x$.

Dado que la función $f(x) = x^2$ es creciente en el intervalo $[2, 5]$, el mínimo de la función en cada subintervalo se encuentra en el borde izquierdo, mientras que el máximo se encuentra en el borde derecho.

Recordemos que la altura de cada rectángulo está dada por $h_k = f(x_k^*)$. Luego, la suma inferior se puede expresar como:

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\,\Delta x$$

Reemplazamos con $x_k = 2 + k\,\Delta x$ obtenida previamente, en la expresión de $f(x) = x^2$ y obtenemos:

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} (2 + (k - 1)\,\Delta x)^2\,\Delta x$$

Usando el valor de Δx encontrado anteriormente, y las expresiones

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

se puede llegar a:

$$I_n = \frac{78\,n^2 - 63\,n + 9}{2n^2}$$

Haciendo un desarrollo análogo al anterior, se obtiene que la **suma de Riemann superior** S_n se expresa como:

$$I_n = \frac{78\,n^2 + 63\,n + 9}{2n^2}$$

Luego, calculando los límites $\lim_{n \to \infty} I_n$ y $\lim_{n \to \infty} S_n$, se puede llegar a que el área bajo la parábola $f(x) = x^2$ en el intervalo $[2, 5]$ es $A = 39$.

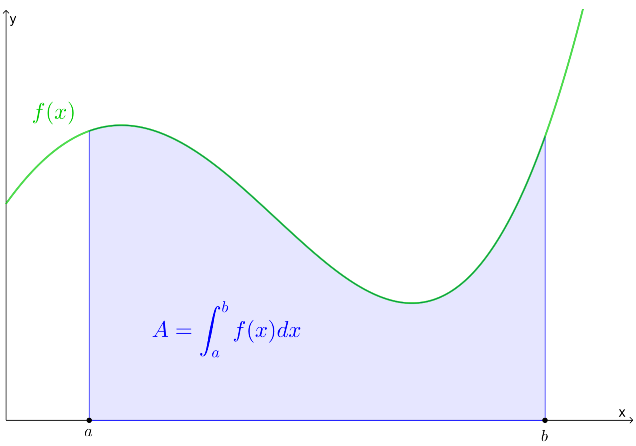
LA INTEGRAL DEFINIDA

Supongamos que se tiene la función $f(x)$ continua en el intervalo $[a, b]$, el cual se divide en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Bajo estas condiciones, se puede demostrar que el límite cuando $n \to \infty$ de R_n existe y tiene un único valor para cualquier elección de los puntos x_k^*. Esto nos permite dar sentido al área bajo la curva a través de la noción de un nuevo concepto que llamaremos **integral definida** como veremos a continuación.

La **integral** desde a hasta b de la función $f(x)$, que anotamos como $\int_a^b f(x)dx$, se define como:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k^*})\, \Delta x$$



En esta definición, tanto $f(x)$ como dx se heredan de los términos $f(x_k^*)$ y Δx respectivos en la suma de Riemann. A efectos prácticos, el dx nos indica también cuál es la **variable de**

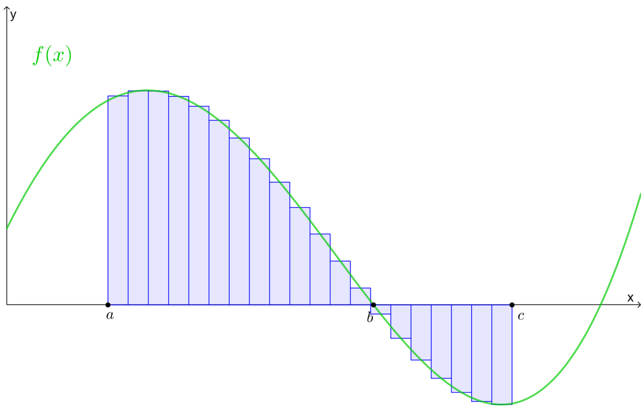
integración, que hasta ahora ha sido x, sin embargo, también podrían integrarse funciones donde la variable de integración sea otra, como por ejemplo el tiempo t.

La variable de integración solo tiene un rol referencial, pues lo importante es la función que se integra y el intervalo sobre el que se hace. De esta manera, las siguientes expresiones indican exactamente la misma integral:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$$

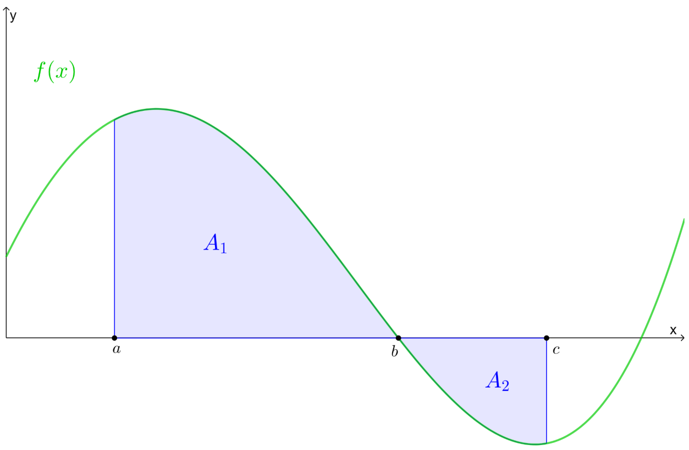
Cuando la función $f(x)$ **solo toma valores positivos**, la integral definida entre a y b **nos permite definir el área de la región delimitada por el gráfico** de una función $f(x)$, el eje x, y las líneas verticales $x = a$ y $x = b$.

Observemos que tanto la suma de Riemann como la integral definida tienen sentido cuando la función toma tanto valores positivos como negativos:



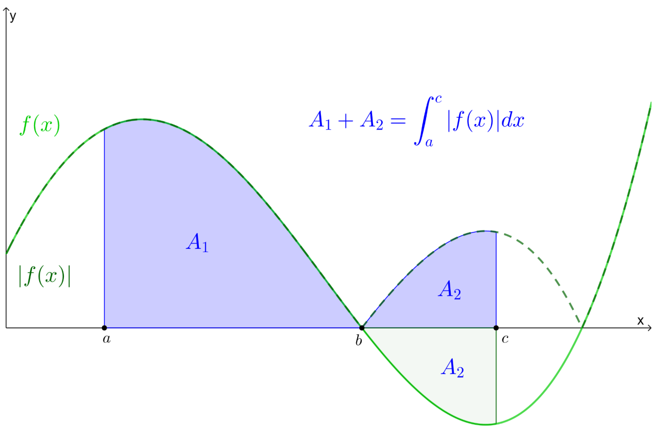
Cuando $f(x_k^*) < 0$, el producto $f(x_k^*)\,\Delta x$ es negativo, por lo que la suma de Riemann ya no representa el área. Precisamente, en el caso de la figura anterior, al calcular directamente la integral sobre el intervalo $[a, c]$ lo que se obtiene es la diferencia entre el área de las región por sobre el eje x menos el área de las región bajo el eje x:

$$\int_a^c f(x)dx = A_1 - A_2$$



Si queremos calcular el área total encerrada entre el gráfico de la función y el eje x, podemos hacerlo usando valor absoluto, como se muestra en la siguiente expresión:

$$\int_a^c |f(x)|dx = A_1 + A_2$$



Además, como una consecuencia de las propiedades de las sumas y de los límites, se pueden establecer las siguientes propiedades de la integral definida:

Consideremos las funciones $f(x)$ y $g(x)$ ambas continuas en el intervalo $[a, b]$. Bajo estas condiciones se cumple que:

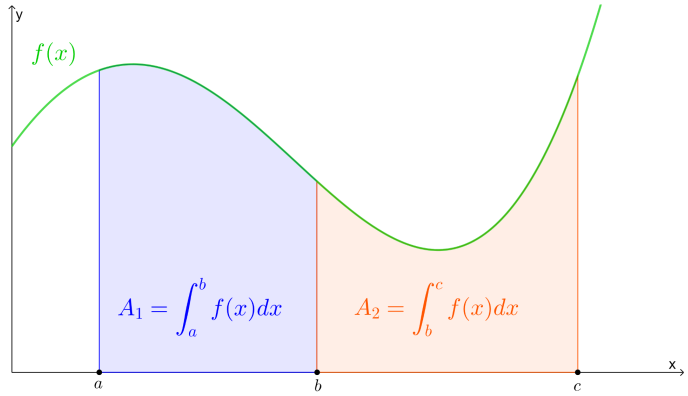
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b [\, f(x) \pm g(x)\,]\, dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

Si además, C es una constante, entonces:

- $\int_a^b C \cdot f(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$

Sea la función f continua en el intervalo $[a, c]$ entonces, si $a < b < c$ se cumple que:

- $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$



$$A_1 + A_2 = \int_a^c f(x)dx$$

SÍNTESIS

En esta lección aprendimos:

- A aproximar el área bajo una curva $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$, mediante la suma del área de rectángulos de igual base, y altura variable dependiendo de $f(x)$.
  - **Suma inferior:** la altura de cada rectángulo corresponde al mínimo de la función en cada subintervalo.
  - **Suma superior:** la altura de cada rectángulo corresponde al máximo de la función en cada subintervalo.
- En el caso de funciones monótonas, la altura de cada rectángulo es igual a la función evaluada en uno de los bordes izquierdo o derecho de cada subintervalo.
- En GeoGebra, los comandos 'SumaInferior(f,a,b,n)' y 'Suma Superior(f,a,b,n)' permiten encontrar las sumas inferior y superior del área bajo la curva f, al considerar una **equipartición** en n partes del intervalo $[a, b]$.

- Una estrategia para conocer **el área bajo la gráfica de una función** f que es **continua en el intervalo** $[a, b]$ es la siguiente:
    - Consideremos que a dicho intervalo se le realiza una equipartición en n partes de ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Esta **partición genera rectángulos cuyas bases corresponden a los subintervalos** $[x_{k-1}, x_k]$ **para** $k = 1, \dots , n$ **.** Además, para definir la altura de cada rectángulo, en cada subintervalo **se elige un valor** x_k^*. De este modo se obtienen n rectángulos de área $f(x_k^*) \cdot \Delta x$
    - Con esta notación se define Suma de Riemann como la suma de las **áreas de los rectángulos** obtenidos por este procedimiento de subdivisión.

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\, \Delta x$$

    - Esta estrategia entregará la suma de Riemann Inferior cuando, para todo k, **el valor de** x_k^***corresponda al mínimo valor que toma** $f(x)$ al interior del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$.
    - De modo similar, esta estrategia entregará la suma de Riemann Superior cuando, para todo k, **el valor de** x_k^* **corresponda al máximo valor que toma** $f(x)$ al interior del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

Además, si el límite de la Suma de Riemann cuando $n \to \infty$ existe y tiene un único valor para cualquier elección de los puntos x_k^* , es posible dar sentido al área bajo la curva a través de la **integral definida**, la cual se expresa como:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\, \Delta x$$