Aula360
Aprendizaje para el siglo XXI

Apuntes Unidad 3

Extremos de función

fcfm
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

CMM
Centro de Modelamiento Matemático

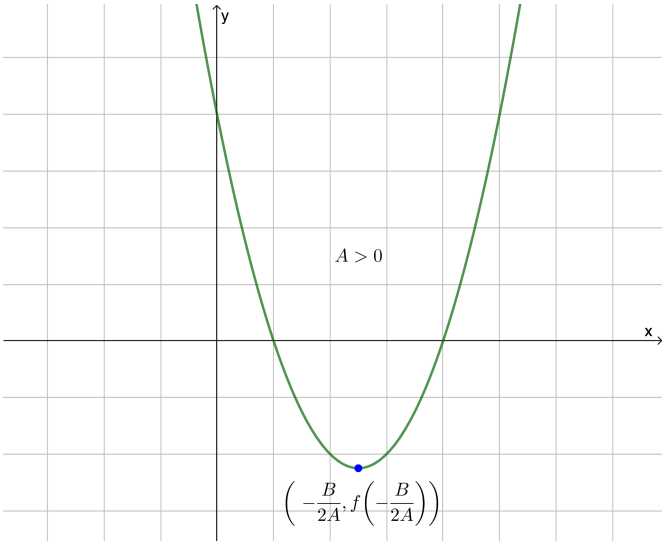
Curso: Límites, derivadas e integrales
Unidad 3: Derivadas
Tema: Aplicaciones de la derivada
Contenido: Extremos de función

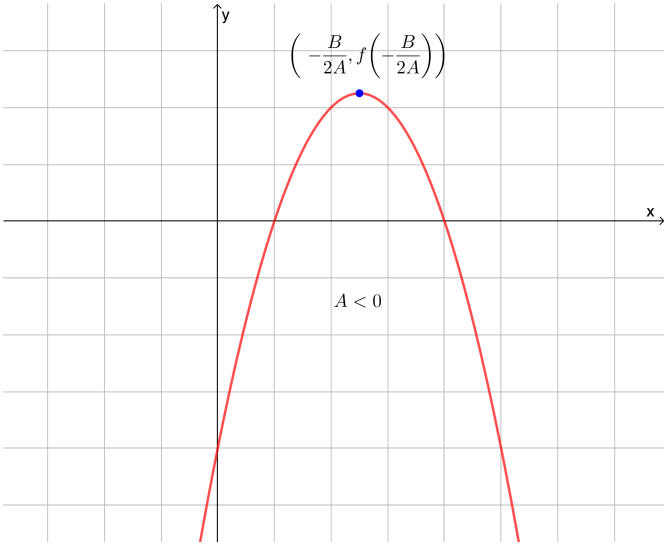
USO DE LA DERIVADA PARA DETERMINAR EXTREMOS LOCALES

En años anteriores estudiaste que la parábola, correspondiente a la función cuadrática $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, tiene su **vértice** en el punto:

$$(-\frac{B}{2A}, \ -f(\frac{B}{2A}))$$

Dependiendo de si A es positivo o negativo, tendremos que en la coordenada x del vértice, se alcanzará, respectivamente, el mínimo o el máximo de la función. Observa las siguientes imágenes:





En la figura de la izquierda, puedes ver que el vértice corresponde al mínimo de la función. Por otro lado, en la gráfica de la derecha, el vértice corresponde al máximo.

Esta fórmula se puede deducir completando cuadrados. En esta sección, usaremos el concepto de derivada para redescubrir la fórmula **para el vértice de una parábola**. Partiremos con un ejemplo.

Consideremos la función:

$$g(x) = x^2 - 3x - 3$$

La parábola correspondiente a $g(x)$ tiene coeficiente $A = 1$, por lo tanto, la parábola **se abre hacia arriba** y su vértice corresponde a un **mínimo** de dicha función.

Notemos que $g(x)$ es un polinomio. Como los **polinomios son derivables**, es decir, su derivada existe en todo el dominio, tenemos que si $g(x)$ tiene un mínimo o máximo local en a, entonces $g'(a)$ debe ser necesariamente igual a cero.

Calculemos $g'(x)$:

$$g'(x) = (x^2 - 3x - 3)' = 2 \cdot x - 3 \cdot 1 - 0 \Rightarrow g'(x) = 2x - 3$$

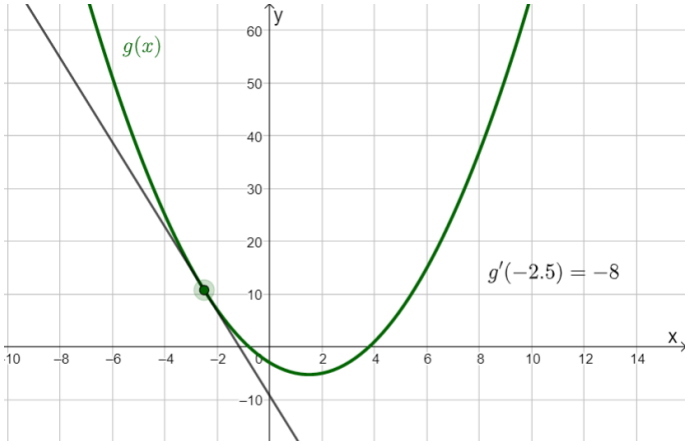
Ahora, podemos tomar la expresión encontrada, igualarla a cero, y despejar x. Así, conoceremos el valor de x para el cual se cumple que $g'(x) = 0$:

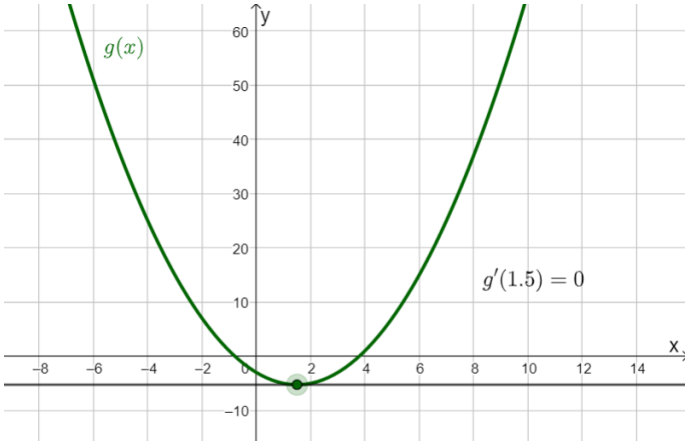
$$g'(x) = 2x - 3 = 0$$

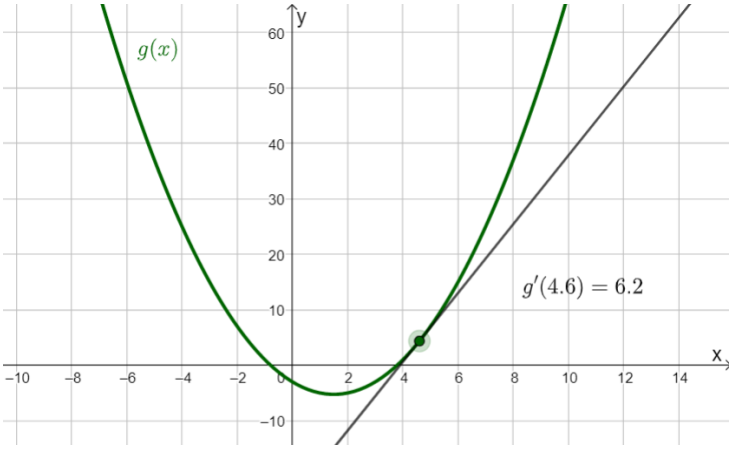
$$\Rightarrow \ x = \frac{3}{2}$$

Luego, como sabemos que la gráfica de $g(x)$ corresponde a una parábola que se abre hacia arriba, y que $g'(\frac{3}{2}) = 0$, podemos deducir que el punto $(\frac{3}{2}, g(\frac{3}{2}))$ corresponde a un mínimo de la función.

Veamos las siguientes imágenes para comprobar lo anterior.







Notemos que justo en la coordenada del vértice se alcanza el mínimo y la derivada de la función es cero. Por lo que se cumple lo enunciado anteriormente.

Por otro lado, podemos comprobar con ayuda de las pendientes de las tangentes al gráfico de esta función que cuando x toma valores menores a $\frac{3}{2}$ la derivada de la función es negativa, y cuando x toma valores mayores, la derivada es positiva.

Veamos ahora el caso general de cómo obtener **la fórmula para el vértice de una parábola usando derivada.**

Consideremos una función cuadrática genérica:

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Al derivar la función $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, obtenemos:

$$f'(x) = 2Ax + B$$

Igualando a cero y despejando x tenemos:

$$2Ax + B = 0$$

$$2Ax = -B$$

$$x = -\frac{B}{2A}$$

De este modo encontramos, usando derivadas, la expresión para la primera coordenada del vértice de una función cuadrática. Para la segunda coordenada solo falta calcular:

$$f\left(-\frac{B}{2A}\right)$$

En resumen, tenemos que:

- Aplicando el concepto de derivada hemos encontrado la expresión ya conocida para la coordenada x del vértice de una parábola.
- Para evaluar si el vértice de la parábola corresponde a un máximo o mínimo local de la función cuadrática, debemos analizar cómo cambia el signo de la derivada en $x = -\frac{B}{2A}$, o bien, fijarnos en el signo del coeficiente A.
- En el caso de la parábola, siempre tendremos un solo máximo o mínimo local, que además podemos ver que es también máximo o mínimo de toda la función. Esto lo veremos en la siguiente lección.

Además, los máximos y mínimos locales de una función también se conocen como **extremos locales de la función**. Usaremos ambos nombres en lo que sigue.

EJEMPLO APLICACIÓN: CÁLCULO DERIVADA DE UNA FUNCIÓN CÚBICA

En esta sección usaremos el concepto de derivada para estudiar los **extremos locales de una función cúbica** $f(x)$. Al derivar dicha función se obtiene un polinomio de grado 2. Encontramos tres casos dependiendo de las raíces de esta derivada:

- **Dos raíces reales y distintas:** La función f tiene un máximo y un mínimo local.
- **Dos raíces reales e iguales:** La función f es siempre creciente o decreciente, no presenta extremos locales, y tiene un punto silla donde la derivada se hace cero.
- **Sin raíces reales:** La función f es siempre creciente o siempre decreciente y su derivada nunca se hace cero, por lo tanto, no posee extremos locales, ni puntos silla.

Veamos un ejemplo para cada uno de los casos anteriores.

<u>Caso 1:</u> f tiene un mínimo y máximo local

Consideremos la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$. Al tratarse de un polinomio formado por una suma y resta de funciones derivables, tenemos que f también lo es. Luego, podemos calcular su derivada:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

¿Para qué valores de x se tiene que $f'(x) = 0$?

Queremos resolver $f'(x) = 0$, es decir, determinar los ceros de una ecuación cuadrática. Para esto, puedes factorizar directamente o resolver con la fórmula de la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

1. Factorizando:

$$3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x + 3)(x - 1)$$

   Luego, los ceros de $f'(x) = 0$ son $x = -3$ y $x = 1$.

2. Usando la fórmula para las raíces de la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-9)}}{2 \cdot 3} = \frac{-6 \pm 12}{6} = -1 \pm 2$$

Luego, los ceros de $f'(x)$ son $x = \ -3$ y $x = 1$.

Ahora que ya hemos encontrado los valores de x en donde puede haber extremos locales, debemos determinar si en dichos valores hay un máximo local, mínimo local o ninguno de ellos, es decir, un punto silla.

Para hacer lo anterior, estudiaremos el **crecimiento** de $f(x)$ analizando el **signo de la derivada**.

Dado que $x_1 = -3$ y $x_2 = 1$ son las raíces de $f'(x) = 0$, este polinomio se puede factorizar como:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x + 3)(x - 1)$$

Luego, si sabemos los signos de $x + 3$ y $x - 1$ podemos determinar el signo de $f'(x)$.

- ➔ Estudiemos el signo del factor $(x + 3)$:
  - Consideremos que $x < -3$. Si sumamos 3 a ambos lados de la desigualdad, esta queda:

    $$x + 3 < 0$$

    Es decir, si $x < -3$ el factor $(x + 3)$ es negativo.
  - De manera similar, si $x > -3$, obtenemos que $x + 3 > 0$, o sea, el factor $(x + 3)$ es positivo.
- ➔ Podemos resolver de forma análoga para el caso del factor $(x - 1)$:
  - Si $x < 1$, y restamos 1 a ambos lados de la desigualdad, obtenemos $x - 1 < 0$, es decir, el factor $(x - 1)$ es negativo.
  - De la misma forma, si $x > 1$, obtenemos $x - 1 > 0$, es decir, el factor $(x - 1)$ es positivo.

Ya sabemos los signos de $(x + 3)$ y $(x - 1)$ de acuerdo a los valores de x. Ahora debemos determinar el signo de $3(x + 3)(x - 1)$ según los valores de x.

Como en $x = -3$ y en $x = 1$ alguno de los factores cambia de signo, debemos considerar los tres intervalos $]-\infty, -3[$, $]-3, 1[$ y $]1, +\infty[$, y aplicar la regla del signo del producto en cada uno de ellos. Lo veremos a continuación.

Expresión	**Signo de la expresión en el intervalo** $]-\infty, -3[$	**Signo de la expresión en el intervalo** $]-3, 1[$	**Signo de la expresión en el intervalo** $]1, +\infty[$
$f'(x) = 3(x + 3)(x$	$+$	$-$	$+$

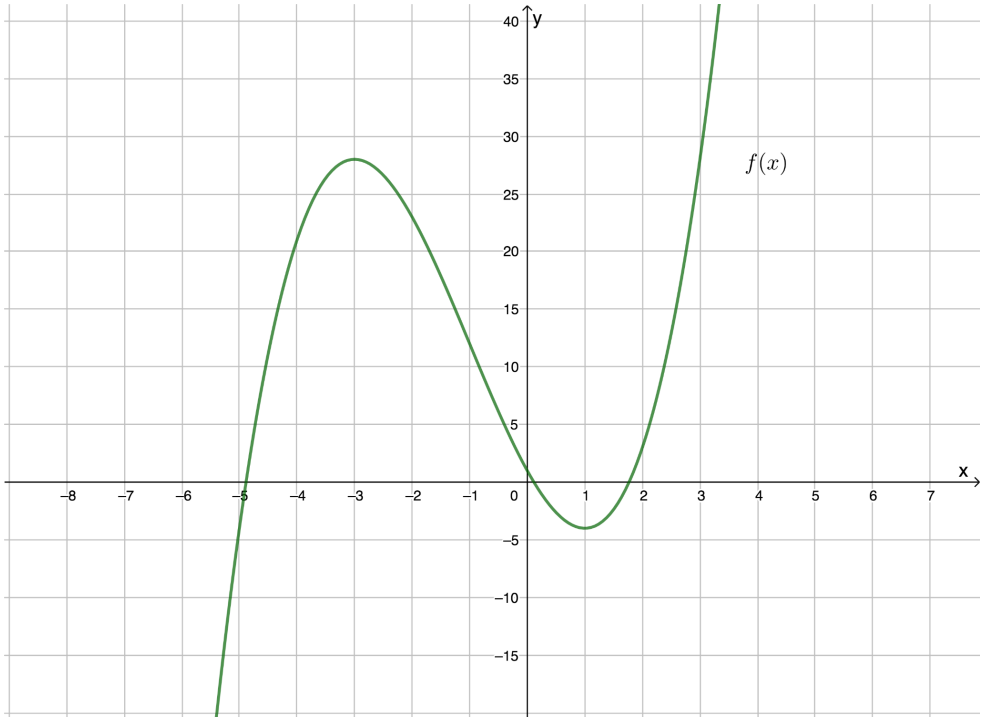
Además, se cumple que:

Expresión	**Crecimiento de la función en el intervalo** $]-\infty,-3[$	**Crecimiento de la función en el intervalo** $]-3,1[$	**Crecimiento de la función en el intervalo** $]1,+\infty[$
$f(x)=x^3+3x^2-9x$	Creciente	Decreciente	Creciente

A partir de las tablas anteriores, podemos concluir que:

- En $x=-3$ la función $f(x)=x^3+3x^2-9x+1$ pasa de ser **creciente a decreciente**, por lo que en $x=-3$ hay un **máximo local**, cuyo valor es $f(-3)=28$.
- En $x=1$ la función $f(x)=x^3+3x^2-9x+1$ pasa de ser **decreciente a creciente**, por lo que en $x=1$ hay un **mínimo local**, cuyo valor es $f(1)=-4$.

A continuación puedes ver el gráfico de la función $f(x)=x^3+3x^2-9x+1$ donde puedes visualizar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y el máximo y mínimo local encontrados.



Caso 2: f ***tiene un punto silla***

Consideremos la función $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$. Hagamos los análisis análogos a la parte anterior.

Calculamos su derivada y la factorizamos:

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$$

Si igualamos a cero la expresión encontrada, obtendremos que para $x = 1$ se cumple que $g'(x) = 0$. Luego, acabamos de encontrar un punto crítico. Ahora, debemos determinar si corresponde a un extremo local o punto silla.

Estudiemos los signos de los factores de la expresión $g'(x) = 3(x - 1)^2$.

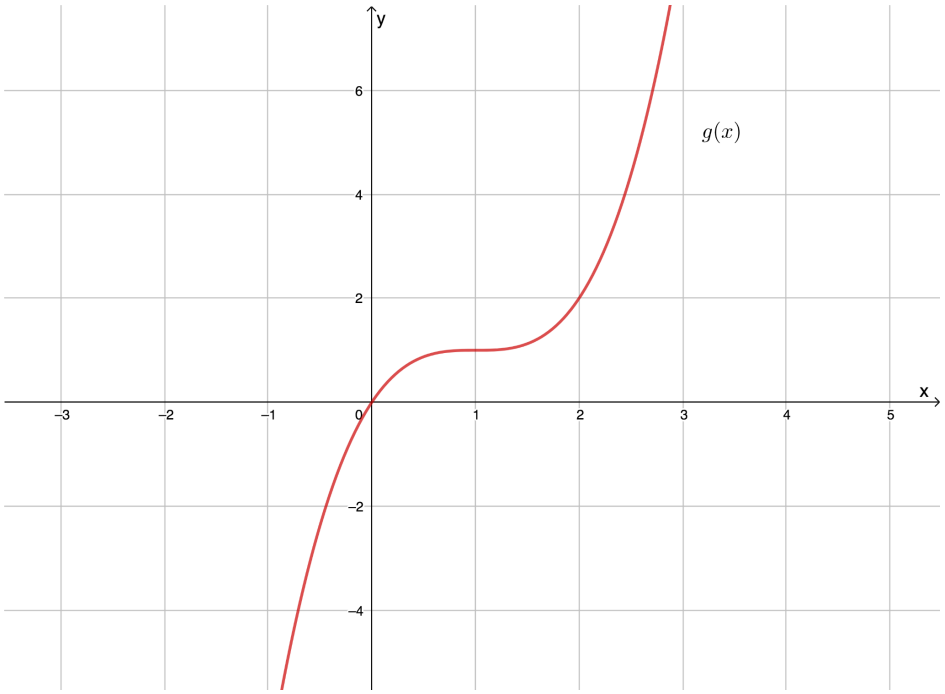
Expresión	**Signo de la expresión en el intervalo** $]-\infty, 1[$	**Signo de la expresión en el intervalo** $]1, +\infty[$
3	$+$	$+$
$(x - 1)^2$	$+$	$+$
$g'(x) = 3(x - 1)^2$	$+$	$+$

Así, obtenemos:

Expresión	**Crecimiento de la función en el intervalo** $]-\infty, 1[$	**Crecimiento de la función en el intervalo** $]1, +\infty[$
$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3$	Creciente	Creciente

Se concluye que en $x = 1$ hay un **punto silla.**

A continuación puedes ver el gráfico de la función $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$, donde puedes visualizar su crecimiento, y el punto silla encontrado.



Caso 3: f ***no posee extremos locales ni puntos silla***

Estudiemos ahora los extremos locales de la siguiente función cúbica:

$$h(x) = x^3 - 6x^2 + 13x + 2$$

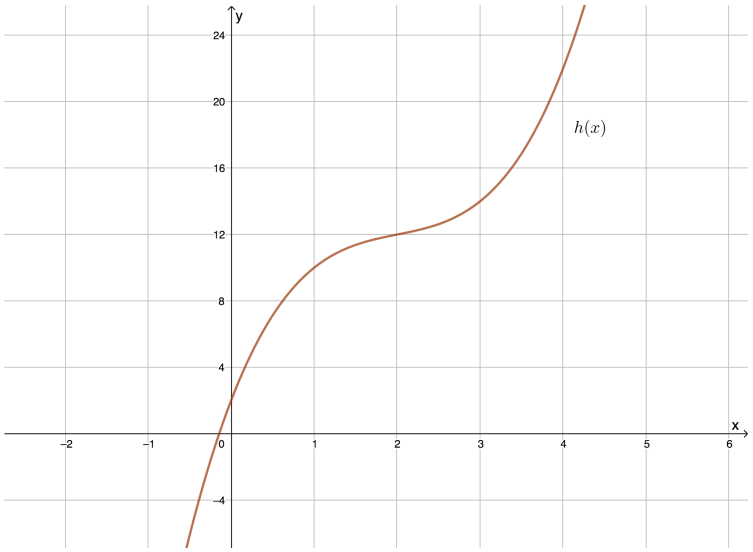
Al igual que en los casos anteriores, podemos calcular su derivada: $h'(x) = 3x^2 - 12x + 13$. Sin embargo, si queremos resolver la ecuación $h'(x) = 0$, llegaremos a que los valores de x que la satisfacen no son números reales.

Como la función derivada $h'(x)$ corresponde a una parábola que no tiene raíces reales, es decir, nunca intersecta el eje x, tenemos que dicha parábola es siempre positiva o siempre negativa.

En este caso, como $h'(x) = 3x^2 - 12x + 13$ abre hacia arriba, ya que $A > 0$, la única opción es que se ubique por sobre el eje de las x, es decir, que $h'(x) > 0$ para todo x. Luego, se concluye que $h(x)$ **es siempre creciente,** y por lo tanto, **no posee extremos locales ni puntos silla**.

A continuación puedes ver el gráfico de la función $h(x) = x^3 - 6x^2 + 13x + 2$ donde puedes visualizar su crecimiento.

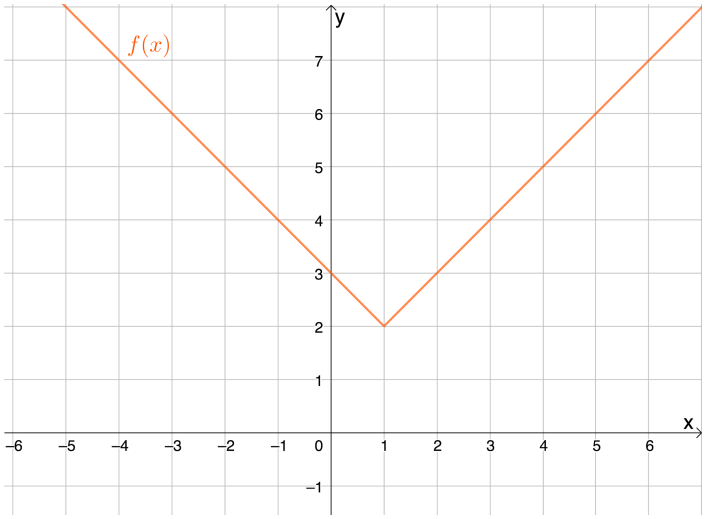
Curso: Límites, derivadas e integrales
Unidad 3: Derivadas
Tema: Aplicaciones de la derivada
Contenido: Extremos de función



EXTREMOS LOCALES DONDE LA DERIVADA NO EXISTE

Sabemos que si una función tiene un extremo local, y la derivada en ese punto existe, entonces debe ser igual a cero. En esta sección veremos que hay **extremos locales** donde la **derivada no existe**.

Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = |x - 1| + 2$, cuya gráfica se muestra a continuación.



A partir de la gráfica podemos observar que:

- La función f tiene un mínimo en $x = 1$.
- La derivada de la f es negativa para valores de x menores que 1.

- La derivada de la f es positiva para valores de x mayores que 1.
- La derivada de f en $x = 1$ no existe.

Notemos que la función presenta un mínimo en $x = 1$, sin embargo, también vemos que la función no es derivable en ese número.

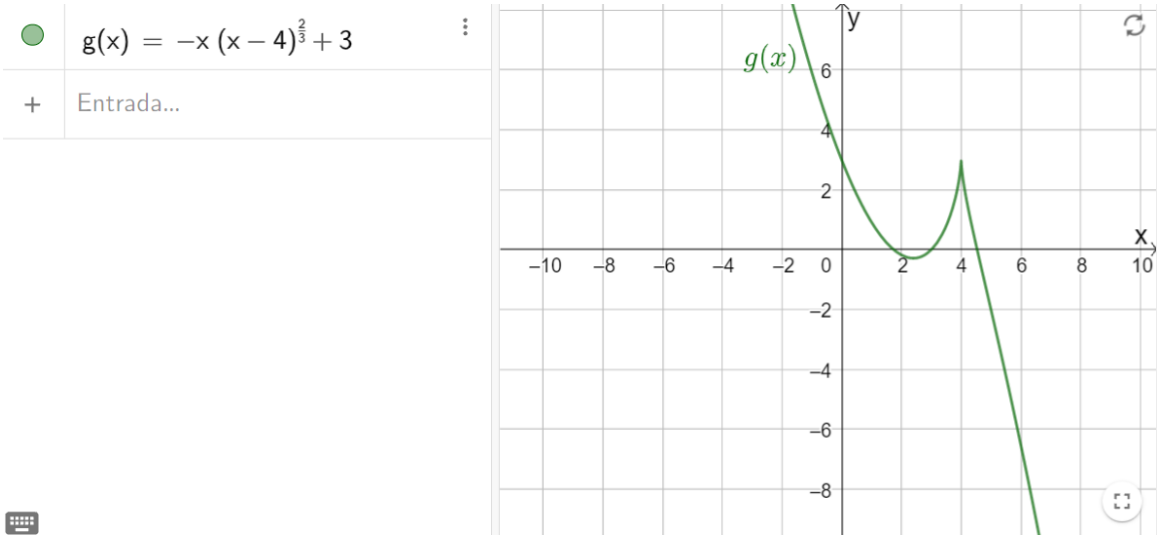
Luego, diremos que la función $f(x)$ tiene un mínimo local en $x = 1$. En ese número la función pasa de ser decreciente a ser creciente y la derivada no existe.

Llamaremos **punto anguloso** a aquellos en los cuales la función es continua pero no derivable. Por ejemplo, en la función $f(x) = |x - 1| + 2$, el punto $(1, 2)$ es un punto anguloso, ya que, a pesar de ser continua en ese punto, no se le puede trazar una recta tangente.

GEOGEBRA COMO RECURSO

Veamos cómo usar GeoGebra para realizar algunos de los cálculos descritos anteriormente.

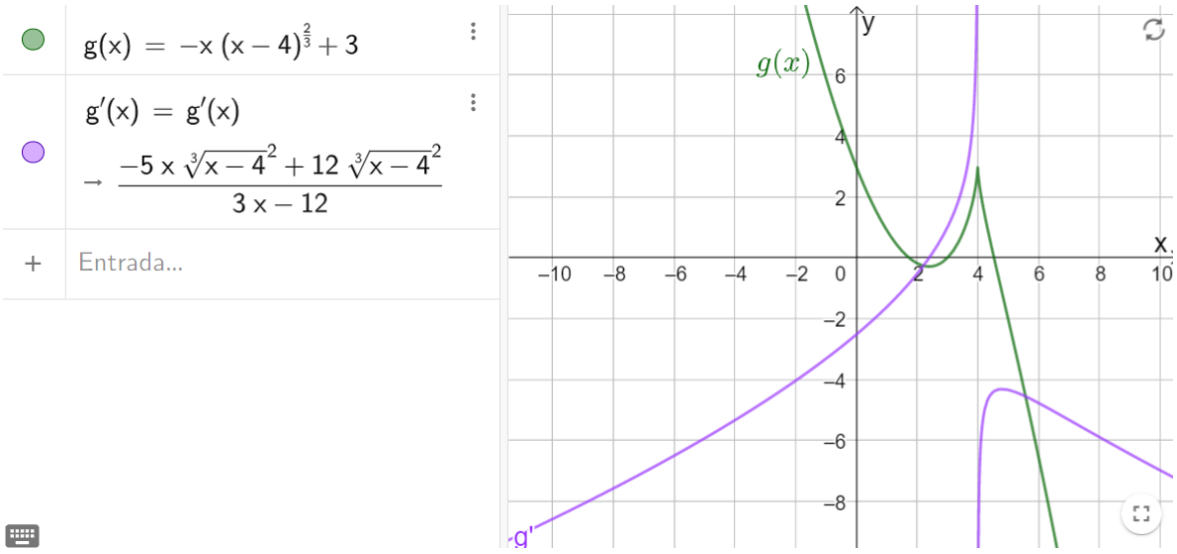
A modo de ejemplo, consideremos la función $g(x) = \quad - x(x - 4)^{\frac{2}{3}} + 3$.



Esta función se puede derivar aplicando las propiedades que ya conoces, pero también puedes obtener la derivada usando GeoGebra, escribiendo g'(x) en la línea de Entrada.

Este comando además de mostrar la expresión algebraica para la derivada, te muestra el gráfico de $g'(x)$.

Curso: Límites, derivadas e integrales
Unidad 3: Derivadas
Tema: Aplicaciones de la derivada
Contenido: Extremos de función

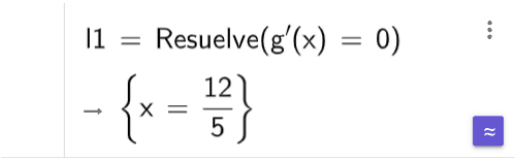


Por otro lado, para encontrar los valores de x donde $g'(x)$ es cero, puedes escribir en la línea de entrada:

Resuelve(g'(x)=0)

Este comando te entregará, entre llaves, todos los valores de x donde g' es cero. En caso de que no existan, GeoGebra te mostrará los corchetes sin ningún valor entre ellos.

En el ejemplo mencionado, GeoGebra entrega que $x = \frac{12}{5}$ satisface lo pedido.



Finalmente, para evaluar una función $g(x)$ en $x = a$, puedes escribir en la línea de entrada:

g(a)

Siguiendo con el ejemplo mencionado, GeoGebra entrega que $g(5) = -2$ satisface lo pedido.

PUNTOS CRÍTICOS

Los **extremos locales** de una función continua pueden presentarse en los números donde:

- La derivada es igual a cero.
- La derivada no existe.

Llamaremos a estos números, **números críticos** de una función continua.

En las secciones anteriores, hemos desarrollado una estrategia para encontrar extremos locales de funciones usando derivada:

1) **Derivamos** la función $f(x)$.
2) Determinamos **números críticos: derivada cero o no existe**.
3) Estudiamos el **crecimiento de la función**, apoyándose en el **signo de la derivada**.
4) **Clasificamos** según crecimiento y decrecimiento de la función, si los números críticos corresponden a: **máximo local, mínimo local, punto silla, o ninguno de los anteriores.**
5) **Evaluamos** $f(x)$ **en los números críticos** donde sabemos que es máximo o mínimo local, para determinar los valores de los extremos locales de la función.

EXTREMOS GLOBALES DE UNA FUNCIÓN

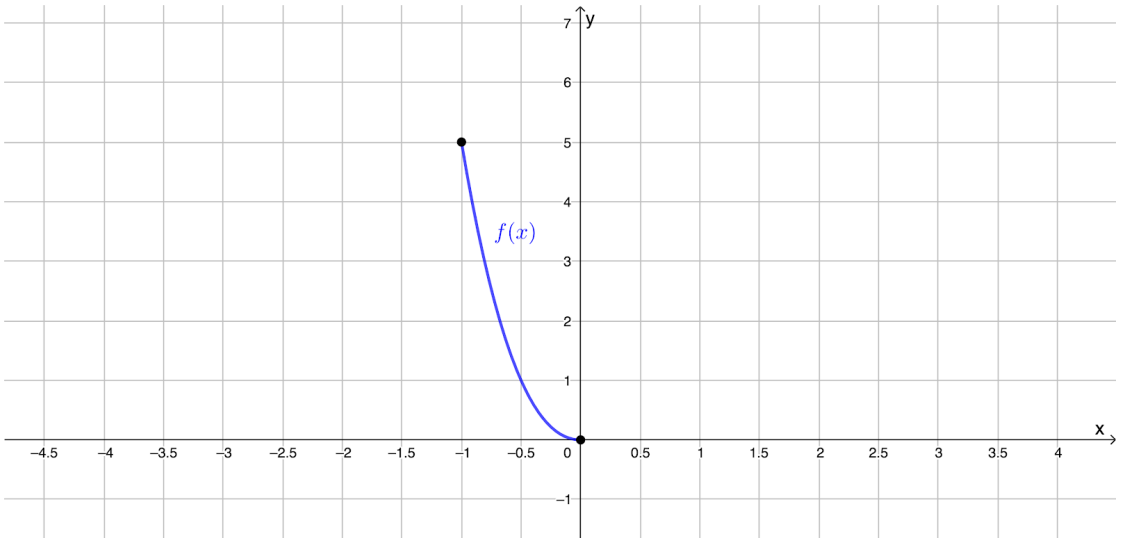
Los **máximos y mínimos globales** o **extremos globales** de una función, corresponden a los mayores y menores valores de una función en un intervalo cerrado.

Para funciones continuas en un intervalo cerrado, contamos con el siguiente teorema:

Si f es una función continua en un intervalo cerrado,
entonces alcanza un máximo y un mínimo en dicho intervalo.

Este teorema permite saber de antemano que la función que estamos estudiando tiene máximo y mínimo global.

A modo de ejemplo, analicemos la función $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ restringida al intervalo $[-1, 0]$. Podemos notar que es contínua en un intervalo cerrado. Entonces, de acuerdo con el teorema, la función alcanza un máximo y mínimo en $[-1, 0]$. Esto podemos comprobarlo observando su gráfica:



Notemos que a partir de la imagen, se puede deducir que la función $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ restringida al intervalo $[-1, 0]$:

- Alcanza el máximo en $x = -1$, cuyo valor es $f(-1) = 5$.
- Alcanza el mínimo en $x = 0$, cuyo valor es $f(0) = 0$

En algunos casos, algunos de los **extremos globales** de una función continua en un intervalo cerrado pueden corresponder a **extremos locales**, es decir, a **números críticos**, que corresponden a los valores de x donde la derivada de $f(x)$ se hace cero o no existe. En otros casos, los extremos globales se ubican en los **bordes del intervalo** (como en el ejemplo que acabamos de revisar).

De acuerdo a esto, podemos sugerir el siguiente procedimiento para determinar los extremos globales de una función f continua en un intervalo $[a, b]$:

1. Hallamos los números críticos de f que se encuentren en el intervalo $[a, b]$.
2. Evaluamos f en los números críticos.
3. Evaluamos f en los bordes del intervalo, es decir, calculamos $f(a)$ y $f(b)$.
4. Comparamos los valores obtenidos anteriormente, para determinar el mínimo y el máximo global de f en el intervalo $[a, b]$.

Remarcamos que lo anterior es válido para **funciones continuas** y en **intervalos cerrados**. Cuando al menos una de las dos condiciones anteriores no se cumple, no hay una regla general, por lo que hay que ver caso a caso.

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Analicemos los extremos globales de la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ en el intervalo $[-2, 0]$, utilizando los pasos mencionados anteriormente.

1. **Hallar números críticos de la función dentro del intervalo**

Calculamos la derivada de la función y buscamos los valores de x tal que $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1, x = 2$$

Los números críticos de $f(x)$ son $x = -1$ y $x = 2$. Dado que el último número no está en el intervalo $[-2, 0]$, solo consideraremos $x = 1$ en el análisis de los extremos globales en este intervalo.

2. **Evaluar f en los puntos críticos**

Al evaluar $f(x)$ en $x = -1$ se obtiene:

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 1 = 8$$

3. **Evaluar f en bordes del intervalo**

Ahora debemos evaluar $f(x)$ en $x = -2$ y en $x = 0$. Se obtiene:

$$f(-2) = 2(-2)^3 - 3(-2)^2 - 12(-2) + 1 = -3$$

$$f(0) = 2(0)^3 - 3(0)^2 - 12(0) + 1 = 1$$

4. **Comparamos los valores obtenidos**

Usando lo calculado anteriormente, comparamos los valores y concluimos:

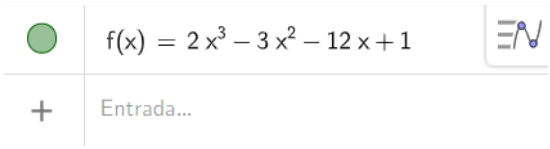
x	f(x)	Extremos globales en [-2,0]
-2	-3	Mínimo global

-1	8	Máximo global
0	1	

GEOGEBRA

Podemos utilizar GeoGebra para calcular los extremos globales de una función. A modo de ejemplo, utilizaremos este recurso para comprobar los resultados obtenidos en la parte anterior.

Ingresamos $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ en la línea de Entrada de GeoGebra.



Vamos a determinar los puntos del gráfico de $f(x)$ donde la función alcanza el máximo y mínimo valor en los intervalos analizados previamente. Para ello, usaremos los comandos

Máximo(<Función>,<Extremo inferior del intervalo>,<Extremo superior del intervalo>)

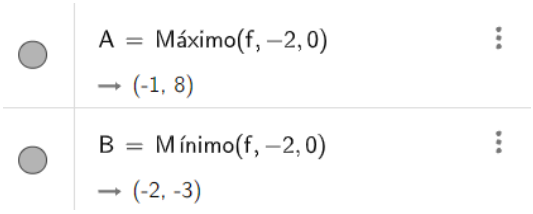
Mínimo(<Función>,<Extremo inferior del intervalo>,<Extremo superior del intervalo>)

En este caso ingresamos:

Máximo(f,-2,0)

Mínimo(f,-2,0)

Observemos que el resultado que entrega GeoGebra coincide con los obtenidos a través de los cálculos realizados anteriormente.



Observa que el software entrega como resultado el punto $(-1, 8)$. La primera coordenada del punto corresponde al valor de x donde se produce el máximo en el intervalo $[-2, 0]$, mientras que la segunda coordenada es el valor máximo de la función en ese intervalo.

SÍNTESIS

- Una estrategia para determinar **extremos locales** de una función usando derivada.
- Los **números críticos** de una función son aquellos en los que la **derivada** es cero o no existe.
- Para determinar si un número crítico es máximo local, mínimo local, punto silla, o ninguno de los anteriores, debemos estudiar el crecimiento de la función, para lo cual podemos analizar el **signo** de la derivada.
- Utilizamos la notación $f'(x)$ para calcular la derivada de una función $f(x)$ en GeoGebra. También usamos el comando 'Resuelve' para determinar las soluciones de una ecuación, en particular para la derivada igual a cero.
- Los **extremos globales** de una función en un intervalo cerrado, corresponden a los mayores y menores valores que alcanza la función en el intervalo.
- Los extremos globales de una función continua en un intervalo cerrado se encuentran en los números donde la **derivada se hace cero o no existe, o en los bordes del intervalo**.
- Para determinar si los números anteriores corresponden a un **mínimo** o un **máximo global**, basta con evaluar la función en dichos números y comparar los resultados.
- En GeoGebra, los comandos Mínimo(f,a,b) y Máximo(f,a,b) permiten determinar los extremos globales de una función f en un intervalo $[a, b]$.