

# Apuntes Unidad 3

Derivadas de funciones compuestas



Curso: Límites, derivadas e integrales

Unidad 3: Derivadas

Tema: Cálculo de derivadas

Contenido: Derivadas de funciones compuestas

## REGLA DE LA CADENA

La derivada de la composición de dos funciones  $f$  y  $g$  se puede expresar como:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

siempre que las derivadas del lado derecho de esta ecuación existan.

Esta fórmula para la derivada de la función compuesta lleva el nombre de “**Regla de la cadena**”. La regla de la cadena es una propiedad muy usada en matemática y en física.

También puede expresarse con la notación de función compuesta como:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

## DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA

Veamos qué se obtiene al tratar de calcular la derivada de una composición.

Consideremos dos funciones  $f$  y  $g$ . De acuerdo a la definición de derivada, tenemos:

$$(f(g(x)))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

- **Caso 1:**

En lo que sigue, supondremos que la expresión  $g(x+h) - g(x) \neq 0$  se cumple para valores pequeños de  $h$ .

Multiplicando y dividiendo por  $(g(x+h) - g(x))$  se obtiene:

$$(f(g(x)))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Analicemos por separado estos dos factores:

- Por definición de derivada aplicada a la función  $g$ , si el límite existe, se tiene que:

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Si  $g'(x)$  existe, entonces  $g(x)$  es continua en  $x$  y cuando  $h \rightarrow 0$  tenemos que  $g(x+h) \rightarrow g(x)$ , y por lo tanto  $g(x+h) - g(x) \rightarrow 0$ .

Curso: Límites, derivadas e integrales

Unidad 3: Derivadas

Tema: Cálculo de derivadas

Contenido: Derivadas de funciones compuestas

Definamos una variable auxiliar  $r = g(x + h) - g(x)$ . Tendremos que  $r \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow 0$  y  $g(x + h) = g(x) + r$ .

Expresando el límite en términos de la variable  $r$  y usando que  $g(x + h) = g(x) + r$  obtenemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(g(x+r)) - f(g(x))}{r}$$

Por otro lado, recordemos que la derivada de la función  $f$  en el número  $a$  es:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ahora, si  $a = g(x)$  y en lugar de  $h$  usamos  $r$ , tenemos:

$$f'(g(x)) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(g(x)+r) - f(g(x))}{r}$$

Notemos que escribimos  $g'(x)$  y  $f'(g(x))$  como límites. Por las propiedades de límite, tenemos que si el límite de ambos factores existe, el del producto también. Por lo tanto:

$$(f(g(x)))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

En conclusión, si los límites existen, tenemos:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

### • Caso 2:

Si estabas lo suficientemente atento, recordarás que al comienzo de todo este argumento supusimos que  $g(x + h) - g(x) \neq 0$  para valores de  $h$  suficientemente pequeños. Existen funciones  $g$  para lo que esto no es cierto y para las cuales la fórmula anterior también sigue siendo válida.

No veremos una demostración del caso general ya que por razones técnicas, excede el alcance del curso. Sin embargo, veamos el caso más simple que ilustra esta situación, y que corresponde a cuando  $g$  es una función constante.

Si  $g(x) = k$ , para todo  $x$ , tenemos que  $g'(x) = 0$  para todo  $x$ .

También tenemos que  $f(g(x)) = f(k)$  es constante, y por lo tanto  $(f(g(x)))' = 0$ .

Ya que ambos lados de la ecuación son iguales a 0, tenemos entonces que:

Curso: Límites, derivadas e integrales

Unidad 3: Derivadas

Tema: Cálculo de derivadas

Contenido: Derivadas de funciones compuestas

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

## EJEMPLO DE APLICACIÓN

Considera la función  $h(x) = (3x^2 + 1)^2$ . Supongamos que queremos calcular  $h'(x)$ . Veamos que no sólo podemos realizar los cálculos utilizando lo aprendido en clases anteriores, sino que también usando regla de la cadena.

- **Método 1: Desarrollar algebraicamente**

Una alternativa para encontrar la derivada de  $h$  es primero desarrollar el binomio y luego aplicar las propiedades de la suma de derivadas.

Al desarrollar el cuadrado de binomio resulta:

$$(3x^2 + 1)^2 = 9x^4 + 6x^2 + 1$$

Luego, podemos calcular  $h'(x)$  derivando cada término del polinomio (pues  $h(x)$  corresponde a sumas de funciones).

- $(9x^4)' = 4 \cdot 9 \cdot x^{4-1} = 36x^3$
- $(6x^2)' = 2 \cdot 6 \cdot x^{2-1} = 12x$
- $(1)' = 0$

Finalmente, usando la derivada de la suma obtenemos:

$$h'(x) = (9x^4 + 6x^2 + 1)' = 36x^3 + 12x + 0 = 36x^3 + 12x$$

- **Método 1: Desarrollar algebraicamente**

Resolvamos ahora la misma derivada usando la regla de la cadena.

Notemos que  $h(x)$  se puede escribir como la composición de las funciones  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = 3x^2 + 1$ :

$$h(x) = f(g(x)) = (3x^2 + 1)^2$$

Para aplicar la regla de cadena primero conviene calcular las derivadas  $f'(x)$  y  $g'(x)$  por separado:

- $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

Curso: Límites, derivadas e integrales

Unidad 3: Derivadas

Tema: Cálculo de derivadas

Contenido: Derivadas de funciones compuestas

$$- \quad g(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow g'(x) = 6x + 0 = 6x$$

Es también conveniente expresar  $f'(g(x))$ :

$$f'(g(x)) = 2(g(x)) = 2(3x^2 + 1)$$

Finalmente, para obtener  $h'(x)$  basta con multiplicar esta última expresión para  $f'(g(x))$  por  $g'(x)$ :

$$h'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 2(3x^2 + 1) \cdot 6x$$

Y al desarrollar obtenemos:

$$h'(x) = 36x^3 + 12x$$

Tal como ya anticipamos, usando ambos métodos llegamos al mismo resultado. Esto no es casualidad, en efecto, llegamos al mismo resultado porque los dos métodos son correctos.

## SÍNTESIS

La regla de la cadena nos permite calcular la derivada de funciones compuestas y nos dice que:

$$\text{Si } f'(g(x)) \text{ y } g'(x) \text{ existen, entonces } (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Para aplicar la regla de la cadena para derivar una función  $h$  puedes seguir los siguientes pasos:

- 1) Identificar funciones  $f$  y  $g$  tal que  $h(x) = f(g(x))$ .
- 2) Encontrar las expresiones para  $f'(x)$  y  $g'(x)$ .
- 3) Encontrar la expresión para  $f'$  evaluada en  $g(x)$ .
- 4) Multiplicar  $f'(g(x))$  por  $g'(x)$ .