

Apuntes Unidad 3

Derivada en un punto

RAZÓN DE CAMBIO

Consideremos el problema de calcular cómo varía la superficie de una esfera, a medida que su radio aumenta.

Recordemos que la superficie S de una esfera de radio r se calcula como:

$$S = 4\pi r^2$$

Nos interesa en particular saber cuánto cambia la superficie de la esfera cuando su radio es 10 cm y 20 cm.

¿Cuándo crees que la esfera aumenta más su superficie? ¿Cuando su radio es 10 cm o cuando es 20 cm?

Responderemos esta pregunta calculando la **razón de cambio instantánea** cuando el radio mide 10 cm y 20 cm.

Para responder esta pregunta, veamos primero algunos conceptos.

La **razón de cambio** corresponde a la medida de cuánto se modifica una variable en relación a otra. Se expresa como una razón, y se calcula como la variación de la variable de interés, dividida por la variación de la otra variable. Así por ejemplo, si queremos calcular la razón de cambio de una variable y respecto a otra variable x , debemos calcular primero lo que varía y : $\Delta y = y_2 - y_1$, y lo que varía x : $\Delta x = x_2 - x_1$. Luego, dividimos ambos resultados y obtenemos la razón de cambio:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Las unidades de la razón de cambio de una variable dependiente y en función de otra variable independiente x son:

$$\frac{\text{unidades } y}{\text{unidades } x}$$

Así, por ejemplo, si la variable dependiente y está en metros, y la variable independiente x en segundos, la razón de cambio se mide en m/s . En este caso, la variable dependiente S se mide en cm^2 y la variable independiente r en cm, por lo tanto, la razón de cambio se mide en cm^2/cm .

La tabla a continuación muestra la razón de cambio entre un instante $r = 10$ y un instante $r = 10 + \Delta r$, para un valor de Δr dado. Nota que **la razón de cambio media no está definida cuando $\Delta r = 0$** .

r	Δr	Expresión razón de cambio $\frac{S(r+\Delta r) - S(r)}{\Delta r}$	Valor de la razón de cambio cm^2/cm
10	1	$\frac{S(10+1) - S(10)}{1}$	84π
10	0,1	$\frac{S(10+0,1) - S(10)}{0,1}$	$80,4\pi$
10	0,005	$\frac{S(10+0,005) - S(10)}{0,005}$	$80,02\pi$
10	- 0,005	$\frac{S(10-0,005) - S(10)}{-0,005}$	$79,98\pi$
10	- 0,1	$\frac{S(10-0,1) - S(10)}{-0,1}$	$79,6\pi$
10	- 1	$\frac{S(10-1) - S(10)}{-1}$	76π

Por otro lado, tenemos el concepto de **razón de cambio instantánea**. Para calcular esta, basta aplicar límite a la razón de cambio. Es decir, en este caso calcularemos:

$$c(r) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(r+h) - S(r)}{h}$$

Volviendo a la pregunta de cuándo crece más rápido la superficie de una esfera, si cuándo el radio es 10 cm o cuándo es 20 cm, la responderemos calculando la razón de cambio instantánea para $r = 10$ y $r = 20$.

- **$r = 10$ cm:**

Debemos calcular:

$$c(10) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(10+h) - S(10)}{h}$$

Reemplazando la expresión que definimos inicialmente para $S(r)$, obtenemos:

$$c(10) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4\pi(10+h)^2) - (4\pi 10^2)}{h}$$

Expandimos el cuadrado de binomio en el numerador:

Curso: Límites, derivadas e integrales

Unidad 3: Derivadas

Tema: Concepto de derivada

Contenido: Derivada en un punto

$$c(10) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4\pi(10^2 + 2 \cdot 10 \cdot h + h^2) - (4\pi 10^2))}{h}$$

Multiplicamos y simplificamos términos:

$$c(10) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4\pi \cdot 10^2 + 4\pi \cdot 2 \cdot 10 \cdot h + 4\pi \cdot h^2) - (4\pi 10^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4\pi \cdot 2 \cdot 10 \cdot h + 4\pi \cdot h^2)}{h}$$

Factorizamos por h en el numerador:

$$c(10) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4\pi \cdot 20 + 4\pi h)}{h}$$

Simplificamos h en el numerador y el denominador y evaluamos el límite:

$$c(10) = \lim_{h \rightarrow 0} (4\pi \cdot 20 + 4\pi h) = \lim_{h \rightarrow 0} (4\pi \cdot 20 + 4\pi \cdot 0) = \lim_{h \rightarrow 0} (4\pi \cdot 20 + 0) = 4\pi \cdot 20$$

Finalmente obtenemos:

$$c(10) = 80\pi \text{ cm}^2/\text{cm}$$

- **$r = 20 \text{ cm}$:**

Podemos resolver de manera análoga al caso anterior, solo que ahora calculando el límite:

$$c(20) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(20+h) - S(20)}{h}$$

Si reemplazamos $S(20 + h)$ y $S(20)$ a la expresión, obtenemos:

$$c(20) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4\pi \cdot 40h + 4\pi h^2}{h}$$

Factorizamos por h en el numerador, y la simplificamos en el numerador y denominador:

$$c(20) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4\pi \cdot 40 + 4\pi h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4\pi \cdot 40 + 4\pi h)$$

Evaluamos el límite:

Curso: Límites, derivadas e integrales

Unidad 3: Derivadas

Tema: Concepto de derivada

Contenido: Derivada en un punto

$$c(20) = \lim_{h \rightarrow 0} (4\pi \cdot 40 + 0) = 4\pi \cdot 40$$

Finalmente obtenemos:

$$c(20) = 160\pi \text{ cm}^2/\text{cm}$$

A partir de los cálculos realizados para ambos casos, podemos observar que:

- La razón de cambio instantánea de la superficie de la esfera cuando su radio mide 10 cm es $80\pi \text{ cm}^2/\text{cm}$, mientras que cuando su radio mide 20 cm es $160\pi \text{ cm}^2/\text{cm}$.
- A partir de los puntos anteriores, se concluye que la superficie de la esfera aumenta más cuando su radio mide 20 centímetros.

DERIVADA DE UN PUNTO

La razón de cambio de una variable $y = f(x)$ respecto a su variable independiente x es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Se define la **razón de cambio instantánea** en $x = x_0$ como el límite de la razón de cambio cuando Δx tiende a 0:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

La **velocidad instantánea** vista en la clase anterior es un ejemplo particular de razón instantánea de cambio.

Así como la velocidad instantánea se interpreta como la pendiente de la recta tangente, la razón instantánea de cambio en $x = x_0$ también corresponde a la **pendiente de la tangente** al gráfico de $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$.

A partir de la noción de razón de cambio instantánea, que tiene una interpretación en contexto, se define la **derivada** que es un concepto matemático abstracto. La derivada de $f(x)$ en $x = x_0$ está dada por:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

La derivada de $f(x)$ en $x = x_0$ se designa usualmente con la notación $f'(x_0)$.

Curso: Límites, derivadas e integrales

Unidad 3: Derivadas

Tema: Concepto de derivada

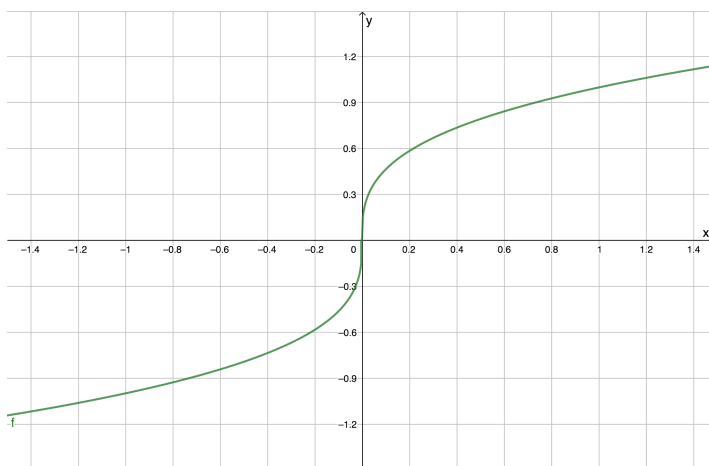
Contenido: Derivada en un punto

En resumen, **razón de cambio instantánea**, **velocidad instantánea** y **pendiente de la recta tangente** son conceptos **equivalentes**, que se agrupan en el concepto de **derivada**.

CASOS EN QUE LA DERIVADA NO EXISTE

En esta sección analizaremos gráficamente en qué casos la **derivada** de una función en un punto **no existe**.

Analicemos la función raíz cúbica: $f(x) = \sqrt[3]{x}$



¿Es posible trazar la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$ (la recta vertical que coincide con eje de las ordenadas)?

Usemos la definición de derivada, que vimos anteriormente:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

En este caso queremos calcular la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$. Es decir, $f'(0)$.

Debemos calcular $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$, donde $f(x) = \sqrt[3]{x}$. De esta manera queda:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{0+h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} \quad f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{h^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}$$

Este límite no existe, y por lo tanto, $f'(0)$ tampoco.

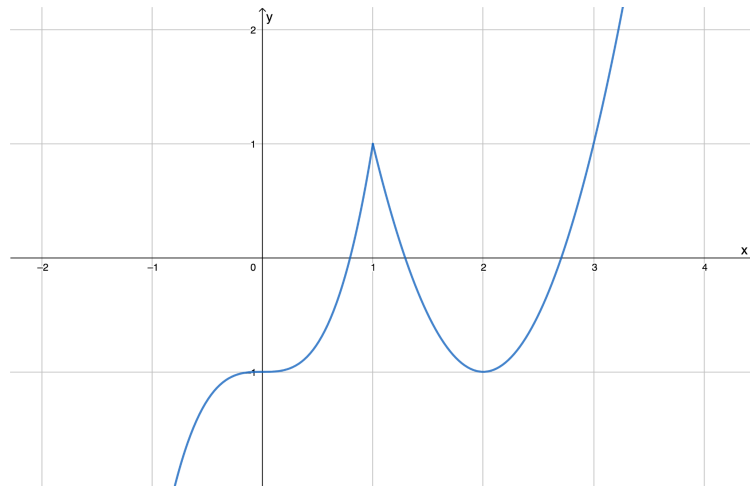
Analicemos ahora el caso de la función $h(x)$ que se muestra en el gráfico a continuación.

Curso: Límites, derivadas e integrales

Unidad 3: Derivadas

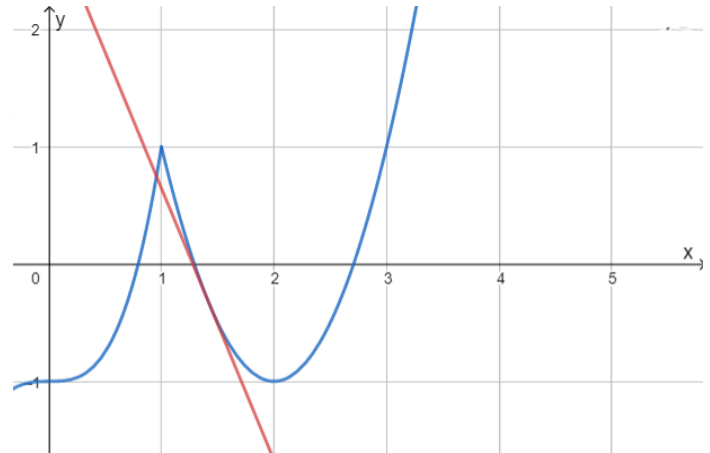
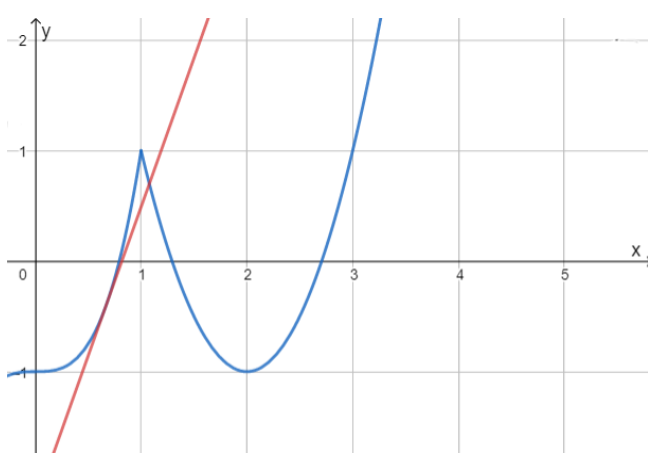
Tema: Concepto de derivada

Contenido: Derivada en un punto



¿Es posible trazar la recta tangente a $h(x)$ en $x = 1$?

Observamos que las pendientes de las rectas tangentes por la izquierda y la derecha de $x = 1$ son distintas.



Lo anterior se puede probar también, usando los límites laterales. Más aún, notemos que la curva de la función presenta una "punta" en $x = 1$.

Se concluye que la pendiente de la recta tangente no está definida, por lo tanto, la recta tangente tampoco. Luego, $f'(0)$ no existe.

Vimos dos casos en que la **derivada** de una función en un punto **no existe**:

- Cuando la recta tangente es vertical, su pendiente no está definida y por tanto la derivada en ese punto tampoco.

- Cuando el gráfico presenta una “punta” como en el segundo ejemplo, las tangentes por la izquierda y la derecha no coinciden, lo que implica que la derivada no existe.

SÍNTESIS

- La **razón de cambio instantánea** de $f(x)$ respecto de x , cuando $x = x_0$ corresponde al límite:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- La razón instantánea de cambio en $x = x_0$ se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente al gráfico de $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$.
- La **derivada** de $f(x)$ en $x = x_0$ corresponde al límite:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- Si la recta tangente al gráfico de una función $f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$ es vertical, su pendiente no está definida y por tanto $f'(x_0)$ no existe.
- Cuando el gráfico de una función presenta una “punta” en $(x_0, f(x_0))$, las tangentes por la izquierda y la derecha no coinciden, lo que implica que $f'(x_0)$ no existe.