

Apuntes Unidad 3

Derivada en un punto



**RAZÓN DE CAMBIO**

Consideremos el problema de calcular cómo varía la superficie de una esfera, a medida que su radio aumenta.

Recordemos que la superficie de una esfera de radio se calcula como:

Nos interesa en particular saber cuánto cambia la superficie de la esfera cuando su radio es y .

**¿Cuándo crees que la esfera aumenta más su superficie? ¿Cuando su radio es 10 cm o cuando es 20 cm?**

Responderemos esta pregunta calculando la **razón de cambio instantánea** cuando el radio mide y .

Para responder esta pregunta, veamos primero algunos conceptos.

La **razón de cambio** corresponde a la medida de cuánto se modifica una variable en relación a otra. Se expresa como una razón, y se calcula como la variación de la variable de interés, dividida por la variación de la otra variable. Así por ejemplo, si queremos calcular la razón de cambio de una variable respecto a otra variable , debemos calcular primero lo que varía : , y lo que varía : . Luego, dividimos ambos resultados y obtenemos la razón de cambio:

Las unidades de la razón de cambio de una variable dependiente en función de otra variable independiente son:

Así, por ejemplo, si la variable dependiente está en metros, y la variable independiente en segundos, la razón de cambio se mide en . En este caso, la variable dependiente se mide en cm2 y la variable independiente en cm, por lo tanto, la razón de cambio se mide en cm2/cm.

La tabla a continuación muestra la razón de cambio entre un instante y un instante , para un valor de dado. Nota que **la razón de cambio *media* no** **está definida cuando .**

| **r** | **r** | **Expresión razón de cambio** | **Valor de la razón de cambio**cm2/cm |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Por otro lado, tenemos el concepto de **razón de cambio instantánea**. Para calcular esta, basta aplicar límite a la razón de cambio. Es decir, en este caso calcularemos:

Volviendo a la pregunta de cuándo crece más rápido la superficie de una esfera, si cuándo el radio es 10 cm o cuándo es 20 cm, la responderemos calculando la razón de cambio instantánea para y .

* ***r* = 10 cm:**

Debemos calcular:

Reemplazando la expresión que definimos inicialmente para , obtenemos:

 Expandimos el cuadrado de binomio en el numerador:

Multiplicamos y simplificamos términos:

Factorizamos por en el numerador:

Simplificamos en el numerador y el denominador y evaluamos el límite:

Finalmente obtenemos:

* ***r* = 20 cm:**

Podemos resolver de manera análoga al caso anterior, solo que ahora calculando el límite:

Si reemplazamos y a la expresión, obtenemos:

 Factorizamos por en el numerador, y la simplificamos en el numerador y denominador:

Evaluamos el límite:

Finalmente obtenemos:

A partir de los cálculos realizados para ambos casos, podemos observar que:

* La razón de cambio instantánea de la superficie de la esfera cuando su radio mide 10 cm es cm2/cm, mientras que cuando su radio mide 20 cm es cm2/cm.
* A partir de los puntos anteriores, se concluye que la superficie de la esfera aumenta más cuando su radio mide 20 centímetros.

**DERIVADA DE UN PUNTO**

La razón de cambio de una variable respecto a su variable independiente es:

=

Se define la **razón de cambio instantánea** en como el límite de la razón de cambio cuando tiende a :

La **velocidad instantánea** vista en la clase anterior es un ejemplo particular de razón instantánea de cambio.

Así como la velocidad instantánea se interpreta como la pendiente de la recta tangente, la razón instantánea de cambio en también corresponde a la **pendiente de la tangente** al gráfico de en el punto .

A partir de la noción de razón de cambio instantánea, que tiene una interpretación en contexto, se define la **derivada** que es un concepto matemático abstracto. La derivada de en está dada por:

La derivada de en se designa usualmente con la notación .

En resumen, **razón de cambio instantánea, velocidad instantánea y pendiente de la recta tangente** son conceptos **equivalentes**, que se agrupan en el concepto de **derivada**.

**CASOS EN QUE LA DERIVADA NO EXISTE**

En esta sección analizaremos gráficamente en qué casos la **derivada** de una función en un punto **no existe**.

Analicemos la función raíz cúbica:



¿Es posible trazar la recta tangente a en (la recta vertical que coincide con eje de las ordenadas)?

Usemos la definición de derivada, que vimos anteriormente:

En este caso queremos calcular la pendiente de la recta tangente a en . Es decir, **.**

Debemos calcular , donde . De esta manera queda:

Este límite no existe, y por lo tanto, tampoco.

Analicemos ahora el caso de la función que se muestra en el gráfico a continuación.



¿Es posible trazar la recta tangente a en ?

Observamos que las pendientes de las rectas tangentes por la izquierda y la derecha de son distintas.

 

Lo anterior se puede probar también, usando los límites laterales. Más aún, notemos que la curva de la función presenta una "punta" en .

Se concluye que la pendiente de la recta tangente no está definida, por lo tanto, la recta tangente tampoco. Luego, no existe.

Vimos dos casos en que la **derivada** de una función en un punto **no existe**:

* Cuando la recta tangente es vertical, su pendiente no está definida y por tanto la derivada en ese punto tampoco.
* Cuando el gráfico presenta una “punta” como en el segundo ejemplo, las tangentes por la izquierda y la derecha no coinciden, lo que implica que la derivada no existe.

**SÍNTESIS**

* La **razón de cambio instantánea** de respecto de , cuando corresponde al límite:
* La razón instantánea de cambio en se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente al gráfico de en el punto .
* La **derivada** de en corresponde al límite:
* Si la recta tangente al gráfico de una función en un punto es vertical, su pendiente no está definida y por tanto no existe.
* Cuando el gráfico de una función presenta una “punta” en , las tangentes por la izquierda y la derecha no coinciden, lo que implica que no existe.



