Apuntes Unidad 2

Comportamiento en el infinito de sucesiones

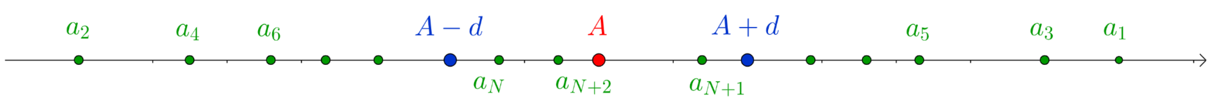
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

CMM Centro de Modelamiento Matemático

COMPORTAMIENTOS DE SUCESIONES

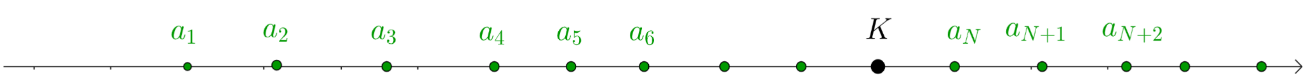
Hasta ahora hemos observado algunos comportamientos de sucesiones$\{a_n\}$cuando $n \to \infty$. A continuación formalizaremos qué es el comportamiento convergente y divergente de una sucesión:

Diremos que una sucesión$\{a_n\}$es **convergente** si su término a_n tiende a un número A cuando $n \to \infty$, es decir, **si dada cualquier distancia d, se puede determinar un número N, tal que a_N y todos los términos siguientes están a distancia menor que d del número A.**

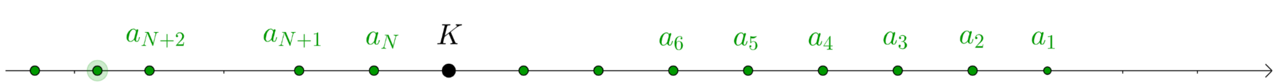


En contraste, si una sucesión no converge, diremos que **diverge.** Es posible describir varios tipos de comportamientos para sucesiones que divergen, en particular en este curso estudiaremos con mayor detalle los siguientes casos:

- Para un número arbitrario K, no importa cuan grande, siempre es posible encontrar un N tal que a_N y todos los términos siguientes de la sucesión **son mayores que K.** En estos caso diremos que cuando $n \to \infty$ se tiene que $a_n \to \infty$, o simplemente que $\{a_n\}$**diverge al infinito.**



- Para un número arbitrario K, no importa cuán negativo, siempre es posible encontrar un N tal que a_Ny todos los términos siguientes de la sucesión **son menores que K.** En estos caso diremos que cuando $n \to \infty$ se tiene que $a_n \to -\infty$, o simplemente que $\{a_n\}$**diverge al menos infinito.**



De manera independiente a si converge o diverge, una sucesión $\{a_n\}$ también se puede clasificar como:

- **Creciente,** si $a_n \le a_{n+1}$ para todo n. Es decir, los términos van creciendo, aunque también se pueden repetir.

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le \dots$$

- **Estrictamente creciente,** si $a_n < a_{n+1}$ para todo n. Es decir, los términos van creciendo sin repetirse.

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots$$

- **Decreciente,** si $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n. Es decir, los términos van decreciendo, aunque también se pueden repetir.

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \dots$$

- **Estrictamente decreciente,** si $a_n > a_{n+1}$ para todo n para todo \(n\). Es decir, los términos van decreciendo sin repetirse.

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots$$

- **Alternada**, si los términos a_n toman alternadamente valores positivos y negativos.

Para entender mejor lo anterior, estudiemos la sucesión a_n cuyos diez primeros términos, partiendo con el a_1, son:

$$\left\{ \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{15}{4}, \frac{20}{5}, \frac{25}{6}, \frac{30}{7}, \frac{35}{8}, \frac{40}{9}, \frac{45}{10}, \frac{50}{11} \right\}$$

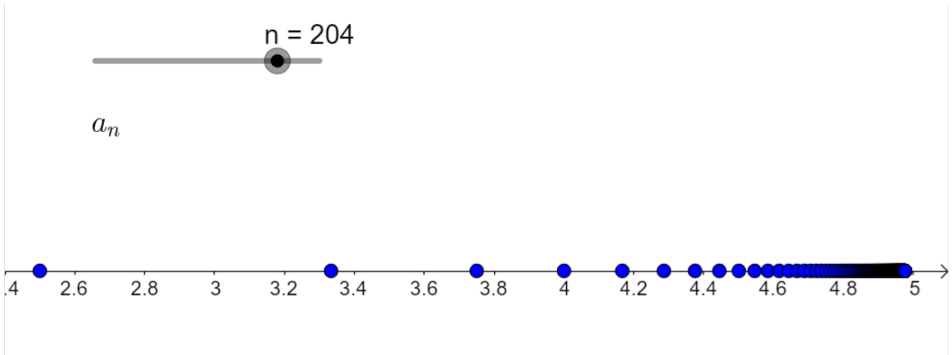
Fijémonos en los valores que toma el numerador, los cuales son: $\{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45\}$. Observemos que podemos escribirlos como: $\{5 \cdot 1, 5 \cdot 2, 5 \cdot 3, 5 \cdot 4, \dots\}$. Es decir, $5 \cdot n$

Por otro lado, el denominador aumenta su valor de uno en uno. Así, podemos escribir: $\{1 + 1, 2 + 1, 3 + 1, 4 + 1, \dots\}$. Es decir, $n + 1$

Luego,

$$a_n = \frac{5n}{n+1}$$

Observemos su comportamiento:



A partir de lo observado en la recta numérica, podemos conjeturar que la sucesión $\{a_n\}$ converge a 5 cuando n crece. En particular vemos que los valores de la sucesión van aumentando, acercándose cada vez más a 5

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < ... < a_{204}$$

Por lo que podemos concluir que $\{a_n\}$es convergente, y además, es estrictamente creciente.

Analicemos ahora una sucesión $\{c_n\}$, cuyos diez primeros términos, partiendo con el c_1, son:

$$\{-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,\ 6\ -7,\ 8,\ -9\ ,\ 10,\ ...\}$$

Observemos que para los valores dados, si n es par los términos de la sucesión c_n tienen signo positivo, mientras que si n es impar los términos tienen signo negativo:

n **par:** $a_2 = 2 > 0\ ,\ a_4 = 4 > 0\ ,\ a_6 = 6 > 0,\ a_8 = 8 > 0\ ,\ a_{10} = 10 > 0,\ ...$

n **impar:** $a_1 = -1 < 0\ ,\ a_3 = -3 < 0,\ a_5 = -5 < 0\ ,\ a_7 = -7 < 0\ ,\ a_9 = -9 < 0,\ ...$

Una forma de asignar signo negativo a los números impares es multiplicar n por la potencia $(-1)^n$. De este modo nos queda:

$$c_n = (-1)^n \cdot n$$

En esta sucesión podemos ver que los signos se van alternando según si el valor de n es par o impar. También se observa que el valor absoluto de cada término c_n es cada vez más grande para valores de n más grandes.

Luego, podemos concluir que $\{c_n\}$es una sucesión alternada, y además, divergente.

SÍNTESIS

En esta lección estudiaste algunos tipos de comportamientos que pueden tener las sucesiones cuando $n \to \infty$

- Diremos que una sucesión$\{a_n\}$es **convergente** si dada cualquier distancia d, se puede determinar un número N, tal que a_N y todos los términos siguientes están a distancia menor que d del número A.

En contraste, si una sucesión no es convergente, decimos que es **divergente,** en cuyo caso algunos posibles comportamientos se describen a continuación:

- Diremos que una sucesión$\{a_n\}$diverge al infinito si dado un número arbitrario K, siempre es posible encontrar un número N tal que a_N y todos los términos siguientes son todos mayores que K.
- Diremos que una sucesión$\{a_n\}$diverge a menos infinito si dado un número arbitrario K, siempre es posible encontrar un número N tal que a_N y todos los términos siguientes son todos menores que K.

Independientemente de si es convergente o divergente, también es usual clasificar una sucesión como:

- **Creciente**: $a_n \leq a_{n+1}$
- **Estrictamente creciente**: $a_n < a_{n+1}$
- **Decreciente**: $a_n \geq a_{n+1}$
- **Estrictamente decreciente**: $a_n > a_{n+1}$
- **Alternada**: Diremos que una sucesión $\{a_n\}$ es alternada si los términos a_n de una sucesión toman alternadamente valores positivos y negativos.