

Apuntes Unidad 2

Comportamiento en el infinito de sucesiones



**COMPORTAMIENTOS DE SUCESIONES**

Hasta ahora hemos observado algunos comportamientos de sucesiones$\{a\_{n}\}$cuando $n \rightarrow \infty $. A continuación formalizaremos qué es el comportamiento convergente y divergente de una sucesión:

Diremos que una sucesión$\{a\_{n}\}$es **convergente** si su término $a\_{n}$ tiende a un número $A$ cuando $n\rightarrow \infty $, es decir, **si dada cualquier distancia** $d$**,** **se puede determinar un número** $N$**, tal que** $a\_{N}$ **y todos los términos siguientes están a distancia menor que** $d$ **del número** $A$.



En contraste, si una sucesión no converge, diremos que **diverge.** Es posible describir varios tipos de comportamientos para sucesiones que divergen, en particular en este curso estudiaremos con mayor detalle los siguientes casos:

* Para un número arbitrario $K$, no importa cuan grande, siempre es posible encontrar un $N$ tal que $a\_{N}$ y todos los términos siguientes de la sucesión **son mayores que** $K$**.** En estos caso diremos que cuando $n \rightarrow \infty $ se tiene que $a\_{n}\rightarrow \infty $, o simplemente que $\{a\_{n}\}$**diverge al infinito.**



* Para un número arbitrario $K$, no importa cuán negativo, siempre es posible encontrar un $N$ tal que $a\_{N}$y todos los términos siguientes de la sucesión **son menores que** $K$**.** En estos caso diremos que cuando $n \rightarrow \infty $ se tiene que $a\_{n} \rightarrow -\infty $, o simplemente que $\{a\_{n}\}$**diverge al menos infinito.**

****

De manera independiente a si converge o diverge, una sucesión $\{a\_{n}\}$ también se puede clasificar como:

* **Creciente,** si $a\_{n} \leq a\_{n+1}$ para todo $n$. Es decir, los términos van creciendo, aunque también se pueden repetir.

$a\_{1} \leq a\_{2} \leq a\_{3} \leq a\_{4} \leq ...$

* **Estrictamente creciente,** si $a\_{n} < a\_{n+1}$ para todo $n$. Es decir, los términos van creciendo sin repetirse.

$a\_{1} < a\_{2} < a\_{3} < a\_{4} < …$

* **Decreciente,** si $a\_{n} \geq a\_{n+1}$ para todo $n$. Es decir, los términos van decreciendo, aunque también se pueden repetir.

$a\_{1} \geq a\_{2} \geq a\_{3} \geq a\_{4} \geq …$

* **Estrictamente decreciente,** si $a\_{n} > a\_{n+1}$ para todo $n$ para todo \(n\). Es decir, los términos van decreciendo sin repetirse.

$a\_{1} > a\_{2} > a\_{3} > a\_{4} > …$

* **Alternada**, si los términos $a\_{n}$ toman alternadamente valores positivos y negativos.

Para entender mejor lo anterior, estudiemos la sucesión $a\_{n}$ cuyos diez primeros términos, partiendo con el $a\_{1}$, son:

$\{ \frac{5}{2} , \frac{10}{3} , \frac{15}{4} , \frac{20}{5} , \frac{25}{6} , \frac{30}{7} , \frac{35}{8} , \frac{40}{9} , \frac{45}{10} , \frac{50}{11} \} $

Fijémonos en los valores que toma el numerador, los cuales son: $\{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45\}$. Observemos que podemos escribirlos como: $\{5⋅1, 5⋅2, 5⋅3, 5⋅4, ... \}$. Es decir, $5⋅n$

Por otro lado, el denominador aumenta su valor de uno en uno. Así, podemos escribir: $\{ 1+1, 2+1, 3+1, 4+1, ... \}$. Es decir, $n+1$

Luego,

 $a\_{n}=$$\frac{5n}{n+1}$

Observemos su comportamiento:



A partir de lo observado en la recta numérica, podemos conjeturar que la sucesión $\{a\_{n}\}$ converge a $5$ cuando $n$ crece. En particular vemos que los valores de la sucesión van aumentando, acercándose cada vez más a $5$

$a\_{1}<a\_{2}<a\_{3}<a\_{4}<...<a\_{204}$

Por lo que podemos concluir que $\{a\_{n}\}$es convergente, y además, es estrictamente creciente.

Analicemos ahora una sucesión $\{c\_{n}\}$, cuyos diez primeros términos, partiendo con el $c\_{1}$, son:

$\{-1, 2, -3, 4, -5, 6 -7, 8, -9 , 10, ...\}$

Observemos que para los valores dados, si $n$ es par los términos de la sucesión $c\_{n}$ tienen signo positivo, mientras que si $n$ es impar los términos tienen signo negativo:

$n$ **par:**  $a\_{2}=2>0 , a\_{4}=4>0 , a\_{6}=6>0, a\_{8}=8>0 , a\_{10}=10>0, ...$

$n$ **impar:**  $a\_{1}= -1<0 , a\_{3}= -3<0, a\_{5}= -5<0 , a\_{7}= -7<0 , a\_{9}= -9<0, ...$

Una forma de asignar signo negativo a los números impares es multiplicar $n$ por la potencia $(-1)^{n}$. De este modo nos queda:

$c\_{n}=(-1)^{n}⋅n$

En esta sucesión podemos ver que los signos se van alternando según si el valor de $n$ es par o impar. También se observa que el valor absoluto de cada término $c\_{n}$ es cada vez más grande para valores de $n$ más grandes.

Luego, podemos concluir que $\{c\_{n}\}$es una sucesión alternada, y además, divergente.

**SÍNTESIS**

En esta lección estudiaste algunos tipos de comportamientos que pueden tener las sucesiones cuando $n\rightarrow \infty $

* Diremos que una sucesión$\{a\_{n}\}$es **convergente** si dada cualquier distancia $d$, se puede determinar un número $N$, tal que $a\_{N}$ y todos los términos siguientes están a distancia menor que $d$ del número $A$.

En contraste, si una sucesión no es convergente, decimos que es **divergente,** en cuyo caso algunos posibles comportamientos se describen a continuación:

* Diremos que una sucesión$\{a\_{n}\}$diverge al infinito si dado un número arbitrario $K$, siempre es posible encontrar un número $N$ tal que $a\_{N}$ y todos los términos siguientes son todos mayores que $K$.
* Diremos que una sucesión$\{a\_{n}\}$diverge a menos infinito si dado un número arbitrario $K$, siempre es posible encontrar un número $N$ tal que $a\_{N}$ y todos los términos siguientes son todos menores que $K$.

Independientemente de si es convergente o divergente, también es usual clasificar una sucesión como:

* **Creciente**: $a\_{n} \leq a\_{n+1}$
* **Estrictamente creciente**: $a\_{n} < a\_{n+1}$
* **Decreciente**: $a\_{n} \geq a\_{n+1}$
* **Estrictamente decreciente**: $a\_{n} > a\_{n+1}$
* **Alternada**: Diremos que una sucesión $\{a\_{n}\}$ es alternada si los términos $a\_{n}$ de una sucesión toman alternadamente valores positivos y negativos.

