Apuntes Unidad 1

El proceso de modelamiento matemático

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

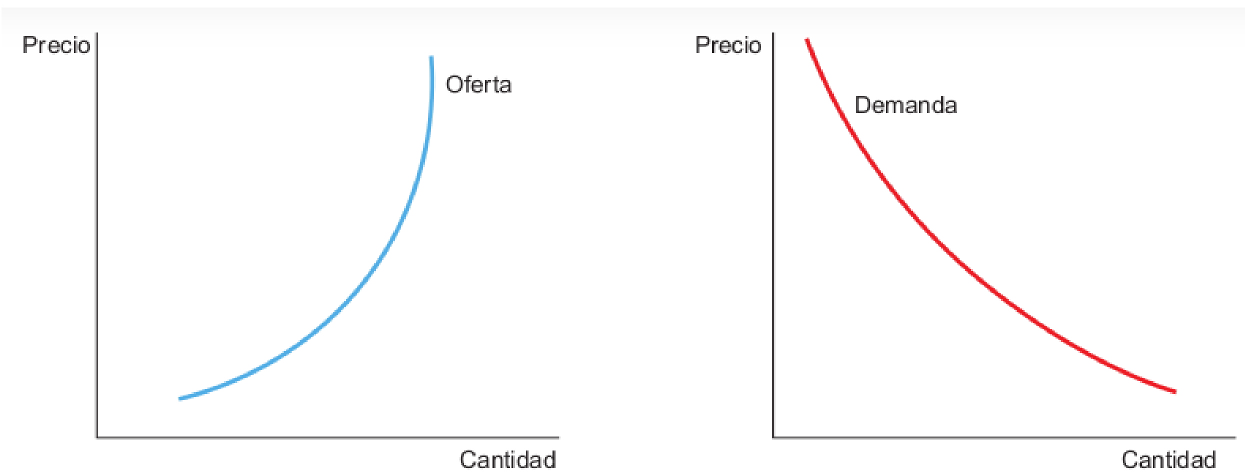
CMM
Centro de Modelamiento Matemático

PROBLEMA A MODELAR

¿Has escuchado que nuestro país es un gran productor y consumidor de paltas? Según la reconocida marca Hass, de la palta que se cosechó en Chile en la temporada 2019-2020 casi un 70% fue exportada a distintos lugares del mundo y el resto consumida en en nuestro país, siendo una de las cifras más altas en exportación en la última década. En este punto podemos imaginarnos la importancia que tiene planificar su producción.

Para las personas que se dedican al cultivo y venta de este producto es muy importante la pregunta: ¿Cuánto conviene producir en el año?

Y aunque parece obvio que entre más se logra producir, más se vende y por tanto más se gana, esto no es necesariamente cierto. De hecho, las ciencias económicas han logrado identificar que el precio de las paltas depende de cuántas personas están dispuestas a comprarlas, y cuánto del producto hay disponible para vender. Esto se conoce como “ley de oferta y demanda” y corresponde a una de las razones de por qué el precio de la palta es variable. De hecho, en el siguiente gráfico se aprecia este comportamiento:



Entonces ¿cuánto conviene producir en el año? o ¿Cuál es la cantidad de paltas que le conviene a los productores poner a la venta? Al analizar estas preguntas con más cuidado, es fácil darse cuenta que **la respuesta no es tan fácil como parece**, ya que son diversos los factores que afectan la venta y el consumo de paltas.

Por suerte, **los modelos matemáticos** y su representación en forma de función son muy útiles a la hora de buscar una respuesta a estas preguntas.

EL CICLO DEL MODELAMIENTO:

Un **problema de modelamiento** surge cuando queremos explicar o dar solución a una situación del "mundo real" mediante la matemática. En el ejemplo anterior, queremos tratar de responder cuál es el nivel de producción de paltas más conveniente.

Puesto que la realidad suele ser compleja de analizar y representar, **lo que se modela matemáticamente no es la situación real, sino una versión simplificada de ella**. Para eso, es necesario identificar los **factores** que pueden influir en la situación y seleccionar aquellos que más nos interesan. Además, es conveniente hacer supuestos que simplifiquen la situación sin sacrificar sus aspectos esenciales.

Por ejemplo, imaginemos a un agricultor local, el señor Pedro Tenue. Para resolver el problema planteado inicialmente, propone realizar una primera aproximación, que es más sencilla de analizar y resolver. De hecho, cree que el modelo matemático puede elaborarlo él mismo, con algunos datos que tiene a la mano. Como el señor Tenue vive del dinero recibido por la venta de paltas, le parece que la información más importante para saber cuánto producir es **determinar el nivel de producción que maximiza los ingresos.** Es decir, determinar la cantidad de paltas que le permite recibir la mayor cantidad de dinero por la venta de ellas, sin considerar el costo de producción u otros factores. Esto implica hacer supuestos sobre el tipo de relación que existe entre el precio de la palta y la producción. Por lo tanto, podemos decir que para reducir la complejidad y de acuerdo al interés de los involucrados, solo se consideran **algunos factores.**

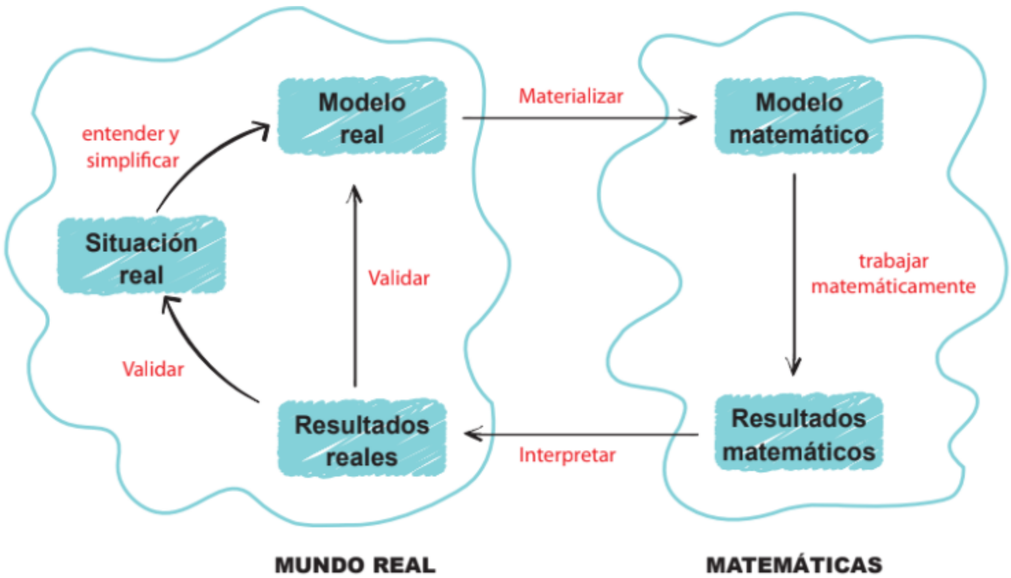
Una vez que tenemos **una versión más simple e idealizada de la realidad**, buscamos **matematizarla**, en este caso vamos a encontrar una función que calcule el ingreso dada la cantidad de paltas vendidas. Esto implica obtener y analizar datos, identificar y establecer relaciones entre las variables involucradas, representar estas relaciones mediante fórmulas, tablas o gráficos, etc.

El resultado de esta matematización corresponde al **modelo matemático.** Luego, trabajamos matemáticamente con el modelo para obtener resultados matemáticos que podemos interpretar en el contexto del problema real.

En nuestro caso, y según lo que decidió el señor Tenue, usaremos la función de ingreso para hallar la cantidad de paltas que hacen que el ingreso sea máximo y luego compararemos estos resultados con datos reales.

Finalmente, es importante **validar el modelo**, determinando si los resultados obtenidos a partir de él dan respuesta satisfactoria al problema y si tienen sentido en el contexto real. Se evalúa **hasta qué punto el modelo es útil**. Las conclusiones obtenidas de este análisis nos permiten **mejorar el modelo**, incorporando otros factores y supuestos. Esto implica volver sobre algunas de las etapas anteriores. Todo este proceso se conoce como el **ciclo de modelamiento**.

A continuación, podemos observar un diagrama que ilustra lo explicado anteriormente.



ENTENDER Y SIMPLIFICAR

Cuando se construyen **modelos matemáticos para explicar y entender situaciones reales**, es necesario **tomar decisiones**. Estas decisiones dentro del ciclo de modelamiento siempre pueden ser "cuestionadas" y modificadas si las consecuencias que tienen no nos parecen adecuadas. Sin embargo, se debe tener en cuenta que mientras más variables se consideren como relevantes, más complejo tenderá a ser el modelo.

El proceso de modelamiento implica encontrar un **balance entre el grado en que simplificamos la realidad, la exactitud del modelo que obtenemos y la dificultad de manejarlo matemáticamente**. Una buena idea es partir con un modelo sencillo, porque son más fáciles de manipular y usar para sacar conclusiones.

MATEMATIZAR:

En la lección anterior comenzamos a analizar el problema de la producción de paltas más conveniente para los productores nacionales. Ciertas decisiones llevaron a reformular el problema en términos de los ingresos de la venta de este producto. La pregunta a responder, en este caso, es: ¿Cuántas toneladas de paltas se deben producir para maximizar los ingresos anuales?

En este caso, consideraremos como ingreso la cantidad de dinero que se obtiene por el total de venta en un año. Luego, si p es el precio en pesos de un kilogramo de paltas, podemos escribir:

$$Ingreso \ = \ precio \ \cdot cantidad$$

El precio p del kilogramo de paltas se puede expresar en **función de la cantidad de paltas** producidas. Por tanto, si encontramos una fórmula para esta función, obtendremos un modelo matemático para expresar el ingreso en función de la cantidad de kilogramos de paltas que se producen al año.

Analicemos la forma en que se comportan los datos sobre precios de venta y producción de años anteriores, con ayuda de la tabla a continuación:

Ventas anuales de paltas de productores nacionales*

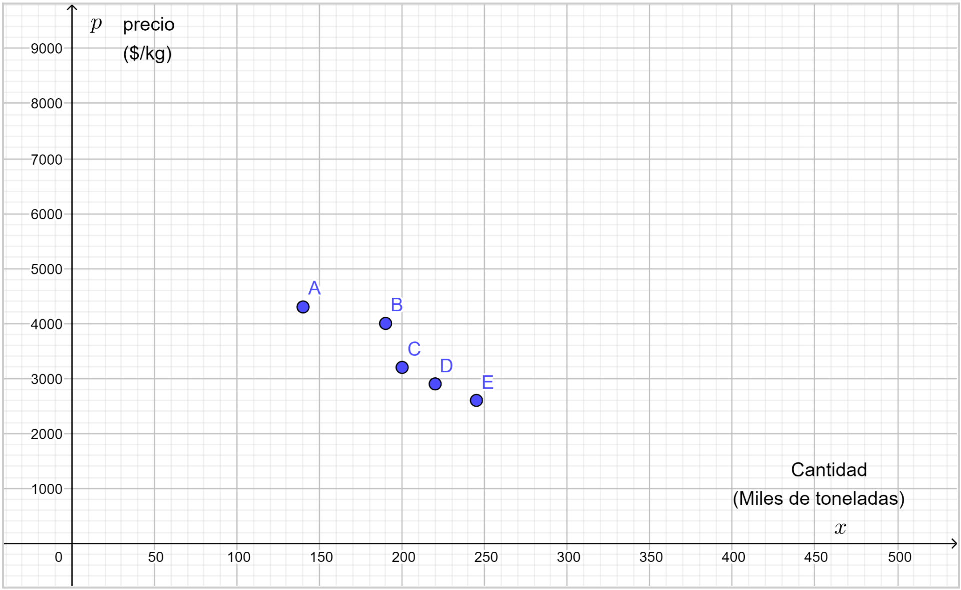
Año	**Producción** *(miles de toneladas)*	**Precio promedio** *($ kg)*
2020	190	4 000
2019	200	3 200
2018	245	2 600
2017	220	2 900
2016	140	4 300

*Datos estimados a partir de la información disponible en el sitio web de la Oficina de Estudios y Políticas Agrarias (www.odepa.gob).

Vamos a considerar las siguientes variables, expresadas en las mismas unidades en que se entregan los datos:

- ➔ x: cantidad de paltas producidas (en miles de toneladas)
- ➔ p: precio de un kilogramo de paltas (en pesos)

Al ubicar los puntos de los datos que tenemos en el plano cartesiano, observamos que en la mayoría de los puntos hay cierta tendencia a formar una línea recta, salvo quizás por el punto B.

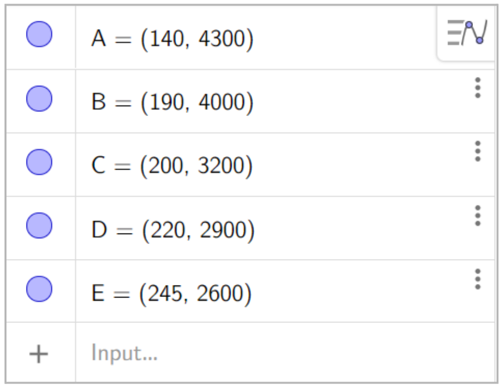


Esto nos sugiere que modelar el precio promedio de las paltas mediante una función afín podría ser una buena aproximación, al menos para el rango de producción de paltas que va entre 140 y 245 mil toneladas. La notoria desviación del punto B puede deberse a factores que influyeron de manera excepcional ese año, y que no necesariamente inciden en el comportamiento habitual que queremos capturar.

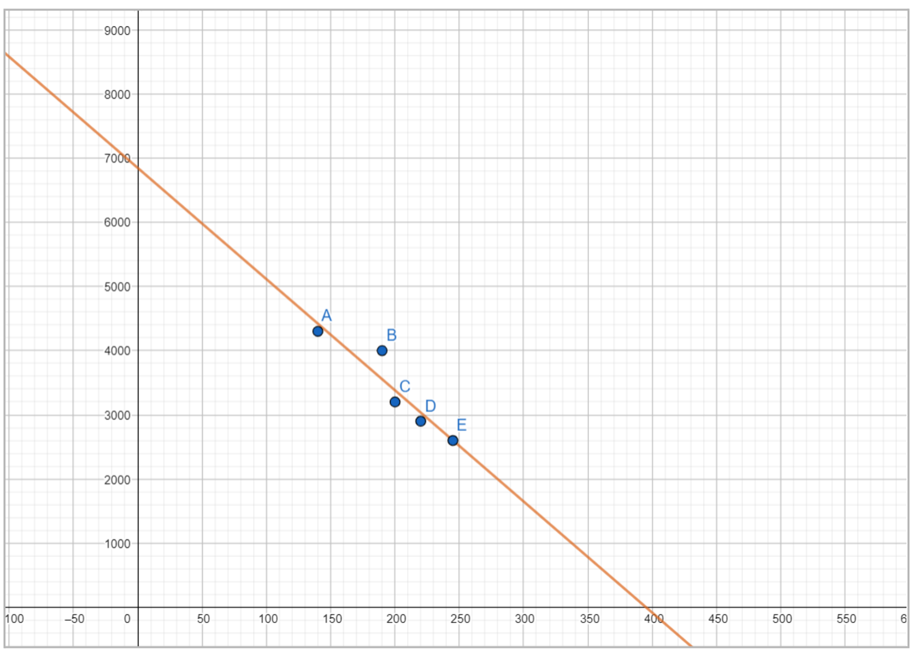
Dado que determinamos una buena aproximación, ahora podemos preguntarnos **¿cómo podemos ajustar una función afín a nuestros datos?**

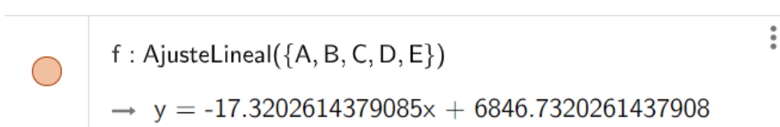
Si entras al link https://www.geogebra.org/m/kwjn4tdd , puedes comprobar que una manera de responder a la pregunta anterior, es manipular los deslizadores manualmente para poder obtener una recta que pase lo más cercano a todos los puntos dados. Sin embargo, esta no es una manera óptima de hacerlo, pues nos tomará tiempo y además no llegaremos a un resultado con gran precisión. Afortunadamente, GeoGebra cuenta con más herramientas para solucionar nuestro problema.

En primer lugar, ingresamos los datos en la sección Entrada de la calculadora gráfica de GeoGebra. Los definimos como puntos de la forma $P(x, y)$, donde x representa la producción e y el precio promedio.



Luego, usamos la función **Ajuste Lineal** que nos ofrece GeoGebra. Para esto, basta escribir en una nueva línea de Entrada: **AjusteLineal({**A,B,C,D,E**})**, donde A, B, C, D, E son los puntos con los que queremos trabajar, y los que definimos anteriormente. Al hacer esto, se graficará la función deseada, y además se mostrará su forma algebraica abajo del comando de Ajuste Lineal.





Así, llegamos a que la ecuación lineal asociada al modelo es:

$$f(x) = -17,32\,x + 6846,73$$

correspondiente a la función precios. Luego, basta multiplicar la ecuación anterior por la cantidad. Así, obtenemos que el modelo queda definido por la función:

$$I(x) = -17,32\,x^2 + 6846,73\,x$$

Notemos que en nuestro problema hemos obtenido un modelo matemático (función) para estimar el precio del kilogramo de palta en función de la producción. Sin embargo, nos falta determinar un modelo para el ingreso total en función de la producción, para poder así encontrar la producción óptima, es decir, aquella que maximiza los ingresos.

Dado que $p(x)$ es el precio de **1 kg**, y que la cantidad x está en **millones de kg**, al multiplicar $p(x) \cdot x$, obtenemos el ingreso $I(x)$:

$$I(x) = p(x) \cdot x$$

que se expresa en **millones de pesos**.

Al reemplazar $p(x)$ por la función afín que encontramos para aproximarla, obtenemos el siguiente modelo matemático para el ingreso:

$$I(x) = -17,32\,x^2 + 6846,73\,x$$

Tipos de modelos matemáticos

Los modelos matemáticos aparecen en distintos contextos. Por ejemplo, **hay modelos matemáticos que se obtienen a partir de principios físicos**, como la Ley de Gravitación de Newton, las leyes de la conservación de la energía, e incluso leyes que describen el comportamiento de partículas sub-atómicas o los agujeros negros.

Pero en otras ocasiones, **los modelos se desprenden exclusivamente de la relación entre datos** (como en el caso del ingreso por venta de paltas) y no pretenden explicar relaciones causales, por lo que no son generalizables a otras situaciones. En este último caso, las **herramientas computacionales** (como GeoGebra) juegan un rol primordial, como hemos podido comprobar en múltiples actividades.

Recapitulemos el proceso realizado hasta obtener el modelo matemático. El ciclo de modelamiento comienza por establecer una situación simplificada. Luego de esto, comienza el proceso de **“matematizar”**, que consiste en expresar el problema simplificado como un problema matemático. Matematizar involucra acciones como las siguientes:

- *Cuantificar las cantidades relevantes que fueron seleccionadas, especificando cómo se van a medir*. En este caso, los datos disponibles nos sugieren expresar *en pesos* el precio promedio anual de un kilogramo de palta, y en *miles de toneladas* la cantidad total de paltas producida al año.

- *Definir cómo se van a denotar estas cantidades*. En nuestro ejemplo, convenimos en usar las variables x y p para denotar respectivamente la cantidad y el precio.

- *Usar representaciones matemáticas adecuadas para comprender y visualizar las relaciones entre las variables.* En nuestro caso usamos tablas y gráficos.

- *Establecer relaciones entre estas variables y expresarlas matemáticamente mediante ecuaciones, funciones, etc*. En el problema que estamos abordando, aproximamos la relación entre las variables p y x por la función afín, que luego nos permitió obtener la función de ingresos:

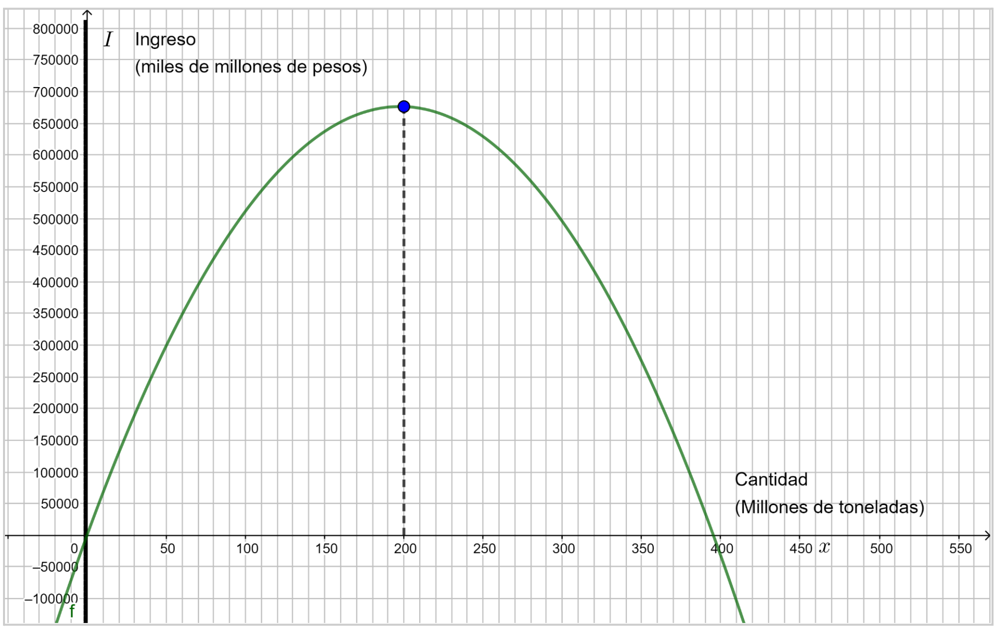
$$I(x) = -17,32\, x^2 + 6846,73\, x$$

El resultado de esta matematización se conoce como "**modelo matemático"** y puede corresponder a una ecuación, inecuación, función, gráfico o cualquier otra representación matemática del problema.

TRABAJAR MATEMÁTICAMENTE

Una vez construido el “modelo matemático”, es necesario **“trabajar matemáticamente”** para obtener resultados aplicando los conocimientos y técnicas matemáticas disponibles. En este caso, podemos graficar la función de ingresos y estimar el valor de x donde el ingreso es el más alto. En otras ocasiones, es posible que tengas que usar algoritmos, resolver ecuaciones, etc.

Observamos que la función de ingresos es una función cuadrática con coeficiente a negativo ($a = \ -17,32 < 0$), por lo que su gráfica corresponderá a una parábola que abre hacia abajo, y por tanto su máximo valor estará dado por su vértice.



Mirando el gráfico podemos estimar que la función de ingreso alcanza el máximo cuando $x = 200$. Esto nos permite sugerir que, de acuerdo con nuestro modelo, se deben producir 200 mil toneladas al año para lograr que el ingreso sea máximo.

VALIDACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

En las lecciones anteriores presentamos **el problema de cuántas paltas es conveniente producir en un año**. Este problema nos llevó a la construcción de un modelo matemático, es decir, una simplificación del problema real y cuya elaboración implicó tomar una serie de decisiones y asumir algunos supuestos.

La **primera decisión** que nos permitió simplificar el problema real fue considerar solamente **el problema de la**

maximización de los ingresos, para así tener una primera aproximación o valor de referencia para la cantidad de paltas que conviene producir.

La expresión matemática que nos permite calcular los ingresos es la **multiplicación entre el precio y la cantidad de paltas vendidas:**

$$Ingresos \ = \ Precio \cdot Cantidad$$

$$I(x) \ = \ p(x) \cdot x$$

La ley de oferta y demanda nos señala que ambas variables se relacionan, de modo tal que **el precio varía en función de la cantidad de paltas que estén a la venta.**

Para obtener la función $I(x)$ fue necesario determinar $p(x)$, esta función se obtuvo construyendo **un modelo matemático a partir de datos conocidos.**

Finalmente graficamos la función $I(x)$ y **estimamos el valor de x donde $I(x)$ es máximo**. Así dimos respuesta al problema de maximización de ingresos:

$$I(x) = \ - 17,32\, x^2 + 6846,73\, x$$

$$Producción\ óptima \ = \ 220\ toneladas\ (aproximadamente)$$

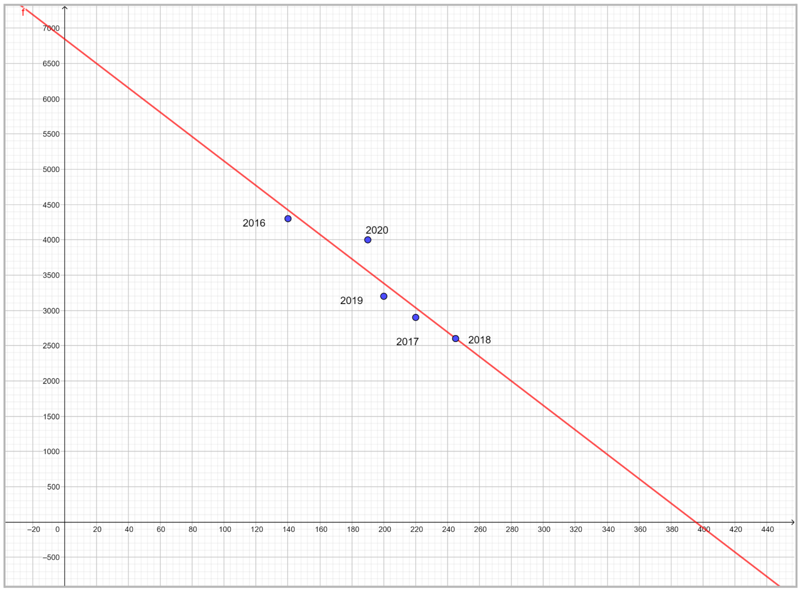
Supongamos que pasó un año, y ahora, el señor Tenue mira los informes de ingresos, que se muestran en la tabla a continuación.

	Producción que maximiza los ingresos ***(miles de toneladas)***	**Ingreso máximo** ***(millones de pesos)***
Modelo	197,65	676 631
Situación real	198	673 200

Se da cuenta que se logró cumplir la producción estimada y que tanto el precio de venta como los ingresos **fueron muy similares a lo que entregaba el modelo**, por lo que quedó conforme. Esto, porque él tiene muy claro que **este modelo matemático, con todos sus supuestos y simplificaciones**, sólo puede aproximarse a lo que ocurrirá en la realidad.

Sin embargo, **hay otra situación que le parece alarmante**. A pesar de que el modelo maximiza los ingresos percibidos por la venta de paltas, se ha enterado de que **un grupo de agricultores está descontento.** Ellos señalan que **con los ingresos percibidos no pueden seguir cumpliendo con la agenda de producción** que se les ha pedido.

Ante esto, aparece una colega: la agricultora Margarita Fuerte. Ella le propone **revisar la construcción del modelo.**



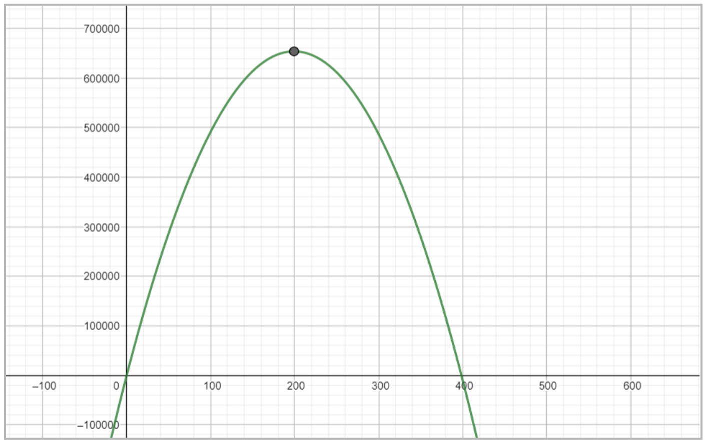
Repasando el proceso de construcción del modelo matemático, **plantea la hipótesis de que es la función que modela el precio de las paltas según la producción, la que tiene un problema.** Más aún, propone dejar fuera el dato anómalo. Es decir, no considerar el punto más alejado de los otros (en este caso, el correspondiente al año 2020). Para esto debemos reconstruir el modelo:

- Graficamos solo los otros cuatro puntos, correspondientes a los años 2016, 2017, 2018 y 2019.
- Realizamos ajuste lineal utilizando la herramienta de GeoGebra
- Obtenemos la ecuación lineal que describe la situación (función precios):

$$p(x) = y = -16,49\,x + 6568,64$$

- Multiplicamos la función anterior por la cantidad para obtener el modelo:

$$I(x) = -16,49\,x^2 + 6568,64\,x$$



Podemos utilizar el comando **Extremo(***<función>***)** de GeoGebra para encontrar el valor del vértice de una función. Haciendo esto, tanto para este modelo como para el encontrado anteriormente, obtenemos:

	Años considerados	**Cantidad que maximiza ingreso** ***(miles de toneladas)*** **A**	**Ingreso máximo posible** ***(millones de peso)*** **B**
Modelo de Pedro	2016 - 2020	197,65	676 631,52
Modelo de Margarita	2016 - 2019	199,17	654 133,93

Es importante considerar que en ambos modelos **el precio disminuye al aumentar la cantidad de paltas producidas**, tal como lo señala la Ley de Oferta y Demanda. Esto puede ocasionar que **no siempre una mayor cantidad de paltas a la venta implique un aumento en los ingresos.** En este caso en particular en el modelo de Margarita, la disminución de precios fue tal, que a pesar de que hay más paltas a la venta, los ingresos son menores que en el modelo de Pedro.

Pero, **¿la variación entre ambos modelos es significativa?** Para determinar si una variación es “grande” o “pequeña” es necesario considerar qué porcentaje representa dicha variación respecto a la cantidad inicial.

En este caso, el aumento de la producción causado por el modelo de Margarita corresponde a menos de un 1% de la producción estimada por el modelo de Pedro.

Es importante mencionar que los datos anómalos son una posible fuente de error en los modelos, es por eso que **es importante estudiar su efecto** en ellos y así poder **tomar la decisión de incluirlos o no en el modelo final**. Por ejemplo, recordemos que el modelo de Margarita no consideraba el dato anómalo, es decir el que se alejaba de la línea de tendencia.

Además, el ciclo de modelamiento requiere de una **evaluación permanente del modelo en construcción**, especialmente en dos sentidos:

- usar los resultados matemáticos para validar los supuestos del modelo.
- contrastar los resultados y los supuestos con el mundo real, para incluir nuevos factores en el modelo, en caso de que sea pertinente.

Hay que ser conscientes de que **cada modelo es perfectible**. Hay que comprender cuál es la utilidad de cada modelo, de manera que podamos interpretar sus resultados en el contexto en que lo hemos definido. Tal como lo hicimos al inicio con el ejemplo de las paltas.

En esta lección **hicimos una validación del modelo matemático construido**. En esta etapa del ciclo del modelamiento **contrastamos las predicciones obtenidas con el modelo con los resultados reales**, y evaluamos si el modelo permite dar solución al problema inicial. Esto permite realizar ajustes, **volver a analizar los supuestos y a partir de ahí, reformular el modelo.**

SÍNTESIS

- Las etapas del ciclo de modelamiento.
- El modelo matemático representa una situación simplificada de la realidad.
- Para reducir la complejidad del problema a modelar es necesario seleccionar algunos factores y dejar de lado otros.
- Cuando se construyen modelos se toman decisiones y se realizan supuestos que ayudan a simplificar el problema.
- Matematizar es el proceso del ciclo de modelamiento que busca expresar la situación simplificada en términos matemáticos.
- Para matematizar es necesario partir identificando las variables y unidades de medida en que se cuantificarán.
- Las tablas y gráficos, son herramientas útiles para analizar y establecer la relación entre las variables del problema.
- Para expresar la relación entre las variables del problema se pueden usar ecuaciones, funciones, tablas, gráficos, etc.
- Una vez que se obtiene el modelo matemático, se debe trabajar con él para obtener resultados que permitan entender y dar respuesta al problema real.
- Los modelos matemáticos sirven para predecir de forma aproximada una situación real.

- Una vez obtenidos los resultados de un modelo matemático es necesario evaluarlos.
- Es necesario identificar los datos anómalos utilizados en la construcción de un modelo matemático.
- El ciclo del modelamiento es un proceso iterativo, en el que usualmente se debe volver sobre las etapas anteriores para mejorar el modelo.