Aula360
Aprendizaje para el siglo XXI

Apuntes Unidad 1

Función inversa

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

CMM Centro de Modelamiento Matemático

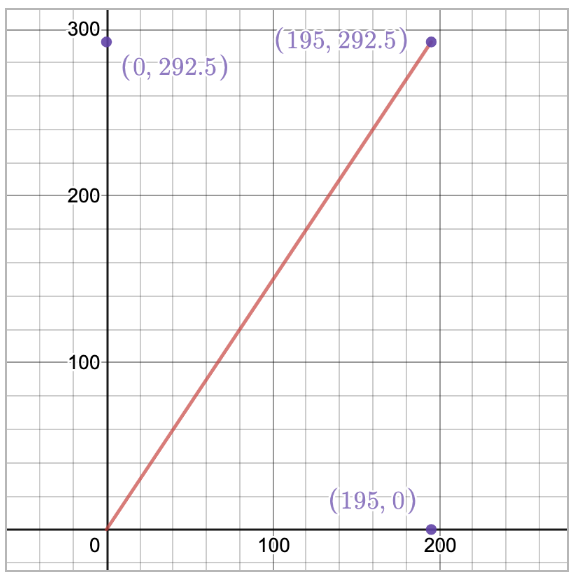
Curso: Límites, derivadas e integrales
Unidad 1: Representar y modelar situaciones de cambio por medio de funciones
Tema: Nociones de funciones
Contenido: Función inversa

MÁQUINA INVERSA

Nos referimos a un problema inverso cuando su resolución requiere encontrar la preimagen de un valor en el recorrido de una función.

La función que resuelve el problema inverso para una función D se conoce como **función inversa** de D, y se le anota como D^{-1}.

Por ejemplo para D, la función que representa la distancia recorrida asociada al viaje de Concepción a Temuco, tenemos que $D^{-1}(120) = 80$. Este valor indica que el vehículo pasa por el kilómetro 120, a los 80 minutos de haber comenzado el viaje.



Si analizamos el ejemplo anterior, podemos llegar a que el problema inverso sólo se puede resolver cuando la distancia es menor o igual que la distancia entre Concepción y Temuco. Es decir, el dominio de D^{-1} es igual al recorrido de D que es el intervalo $[0, 292.5]$. En el contexto de definir de forma precisa la función D^{-1}, es natural preguntarse:

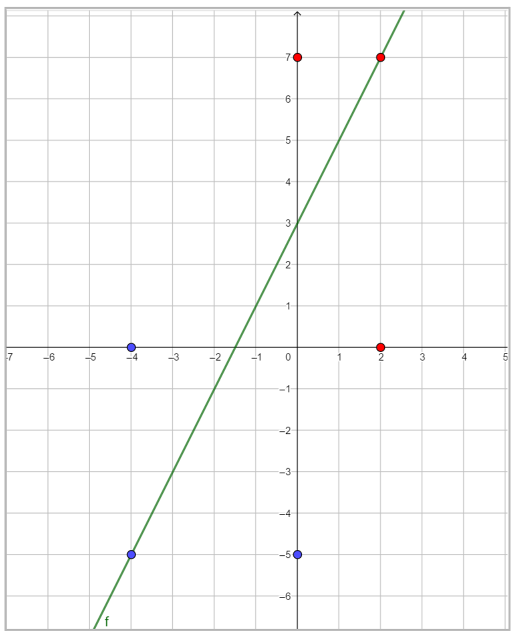
- ¿Cuál es el codominio y recorrido de D^{-1}?
- ¿Es posible encontrar una fórmula para $D^{-1}(x)$?

Curso: Límites, derivadas e integrales
Unidad 1: Representar y modelar situaciones de cambio por medio de funciones
Tema: Nociones de funciones
Contenido: Función inversa

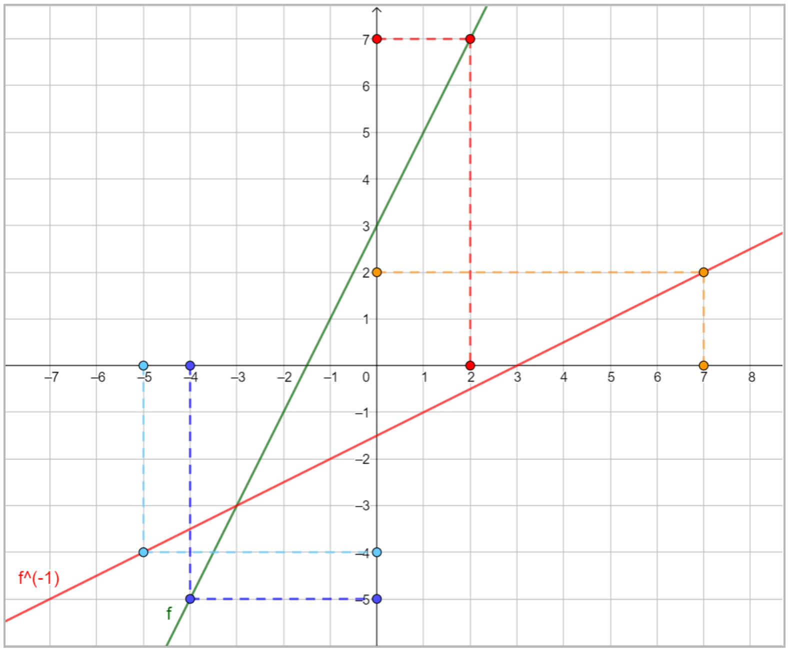
INVERSA DE LA FUNCIÓN LINEAL

Toda función lineal de la forma $f(x) = mx + b$, con $m \neq 0$ tiene una función inversa. Cuando $m = 0$ el gráfico de f es una recta horizontal, por lo que su recorrido es solo un punto, que es imagen de todos los números reales.

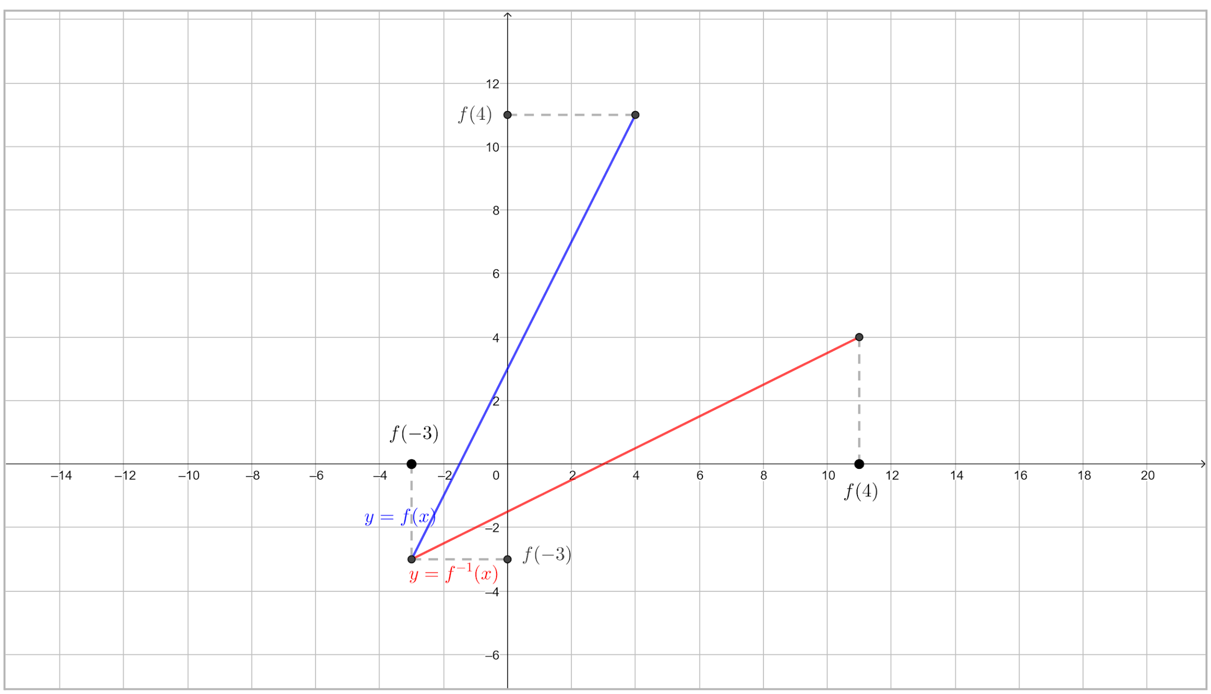
En otras palabras, siempre que el gráfico de f sea una recta oblicua, podemos resolver el problema inverso para f, lo que se puede ver claramente al observar un gráfico:



Esto nos permite definir la función inversa f^{-1}con dominio igual a todos los números reales.



La función inversa puede definirse incluso cuando el dominio de f está restringido a un cierto intervalo, digamos $[a, b]$. En este caso, el dominio de f^{-1}será el recorrido de f, es decir, el intervalo que tiene como extremos a $f(a)$ y a $f(b)$.



En todos estos casos, para encontrar una fórmula para la función inversa, planteamos la ecuación

$$y = f(x) = mx + b$$

y despejamos la variable x, obteniendo:

$$x = \frac{y-b}{m} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-b}{m}$$

Si bien a veces puede ser útil conocer esta fórmula de memoria, mucho más importante es comprender y recordar la estrategia que lleva a su deducción:

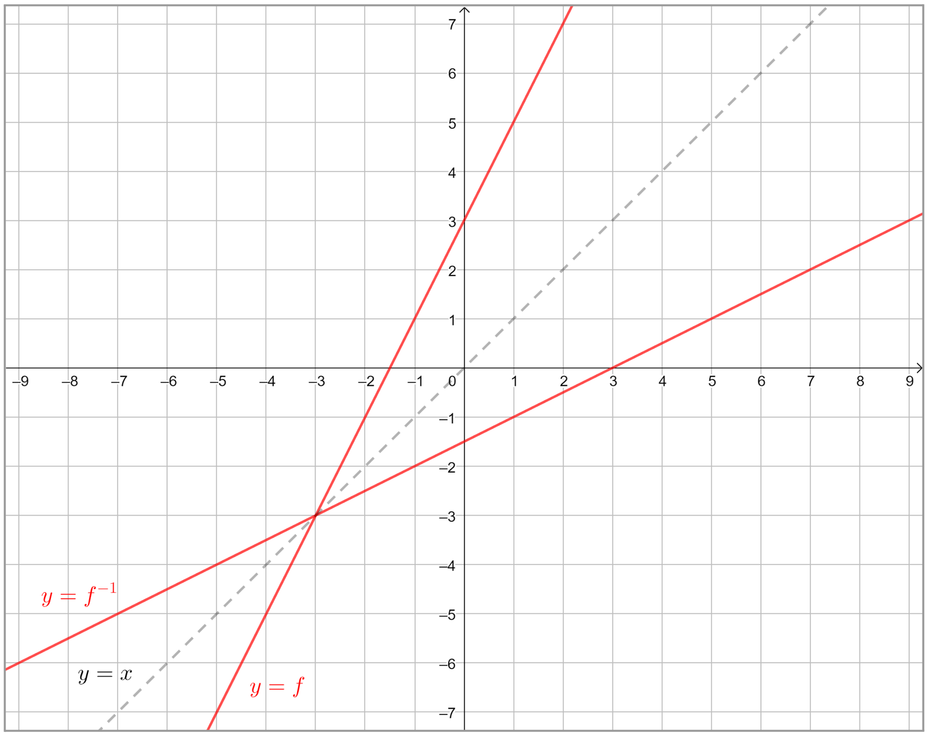
(1) Escribir $y = f(x)$ usando la fórmula conocida para $f(x)$.

(2) Despejar la variable x.

Aunque nosotros la hemos aplicado a funciones lineales, esta estrategia también es efectiva en situaciones más generales. En particular, plantear el problema en forma de ecuación como en (1), es una de las ideas fundamentales en matemáticas. El paso (2), en este caso, es más un tema de manejo algebraico.

Algo importante es que en la fórmula para $f^{-1}(y)$ puedes reemplazar la variable y por cualquier otra que quieras usar, ¡incluso puedes reemplazarla por x! Este cambio de nombre de la variable dependiente para escribir $f^{-1}(x)$ es común de hacer.

Finalmente, el gráfico de la función f^{-1}se puede obtener a partir del gráfico de f reflejándolo a través de la recta $y = x$, es decir a la diagonal de los cuadrantes I y III en el plano cartesiano. Esto funciona bien al considerar el dominio natural de f.



MODELO EXPONENCIAL PARA EL DECAIMIENTO DE C-14

Seguramente has escuchado noticias en las que un equipo de arqueólogos desentierran una momia y determinan que vivió hace aproximadamente 20 mil años. ¿Cómo pueden determinar la época en que vivió la momia sin mirar su carnet de identidad? La respuesta es la **radiactividad**.

En la naturaleza existen elementos como el Carbono 14 (C-14). Este corresponde a un elemento *inestable* o *radiactivo*, es decir que tiene la propiedad de transformarse de manera espontánea en un elemento diferente. Se crea natural y continuamente en la atmósfera a partir del Nitrógeno excitado por rayos cósmicos.

Existe un método de **datación por Carbono 14** que consiste en medir la cantidad de C-14 en una muestra orgánica, y resolver el problema inverso asociado, es decir, determinar a partir de la medición de C-14 presente en la muestra, el tiempo transcurrido desde su muerte hasta el momento de la medición.

Ahora, pensemos en desarrollar un modelo que nos permita estimar la cantidad de C-14 remanente en una muestra al cabo de t años desde la muerte del ser vivo que dio origen a la muestra.

La función $C(t)$ representa la cantidad de C-14 presente en una muestra transcurridos t años desde la muerte del ser vivo, y P es el **periodo de semidesintegración** del C-14, que es de 5730 años.

Realizando algunos cálculos se puede llegar a que para tiempos que son múltiplos enteros de **P**, es decir, de la forma $t = n \cdot P$ para algún número n, la función $C(t)$ cumple la propiedad siguiente:

$$C(n \cdot P) = \frac{C(0)}{2^n}$$

Reescribiendo esta expresión en términos de $t = n \cdot P$, obtenemos:

$$C(t) = \frac{C(0)}{2^{\frac{t}{P}}}$$

Esta función es, por lo tanto, buen candidato para modelar los datos, pues los reproduce con gran precisión. ¿Podemos usar esta función para extrapolar?

Al analizar esta función para tiempos que no son necesariamente múltiplos enteros de P, podemos notar que:

$$C(t + P)= \frac{C(0)}{2^{\frac{t+P}{P}}} = \frac{C(0)}{2^{\frac{t}{P}+1}} = \frac{C(t)}{2}$$

Es decir, la función cumple además con la propiedad de período de semidesintegración para todos los valores de t, y tiene por lo tanto sentido utilizarla para modelar el decaimiento de C-14.

Es común escribir esta función de la forma:

$$C(t) = C(0) \cdot 2^{-\frac{t}{P}}$$

Podemos reconocer que se trata de una **función exponencial.**

INVERSA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Al despejar t en la expresión $43340 \cdot 2^{-\frac{t}{5.730}} = 20000$ hemos resuelto el problema inverso de manera analítica, en lugar de gráficamente. Para ello ha sido esencial el uso de logaritmo, específicamente para despejar el exponente a partir de la propiedad:

$$log_a(a^x) = x$$

Recordemos que si $a > 0$, $a \neq 1$, entonces $f(x) = a^x$ define una función exponencial, cuyo dominio son todos los números reales y cuyo recorrido son los reales positivos.

Usando lo anterior, tenemos que:

$$y = a^x \text{ es equivalente a decir que } x = log_a y$$

es decir:

- La función $log_a x$ es la función inversa de a^x.
- La función a^x es la función inversa de $log_a x$.

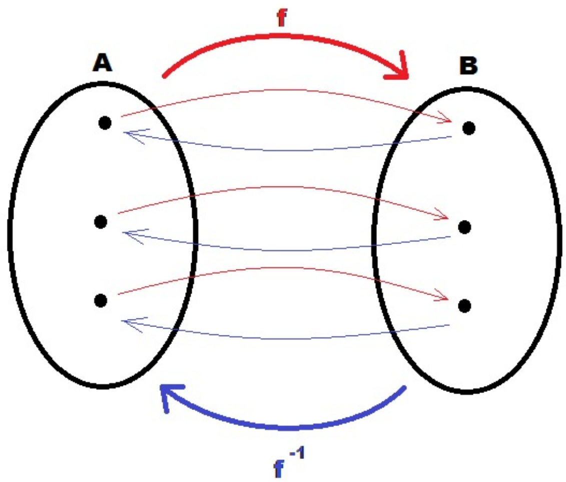
Recordemos que el dominio de la función $log_a x$ son todos los números positivos, y su recorrido son todos los números reales.

LA FUNCIÓN INVERSA

Si una función f: $A \rightarrow B$ cumple que cada elemento de B tiene una única preimagen, entonces podemos definir su inversa, que denotamos como f^{-1}: $B \rightarrow A$. Esta función se define como $f^{-1}(y) = x$ *si y solo si* $y = f(x)$. Es decir $f^{-1}(y)$ es igual a la única preimagen de y.

Esta condición se puede visualizar usando diagramas sagitales:

Curso: Límites, derivadas e integrales
Unidad 1: Representar y modelar situaciones de cambio por medio de funciones
Tema: Nociones de funciones
Contenido: Función inversa



Este tipo de diagramas también nos pueden ayudar a visualizar distintas propiedades de la función inversa:

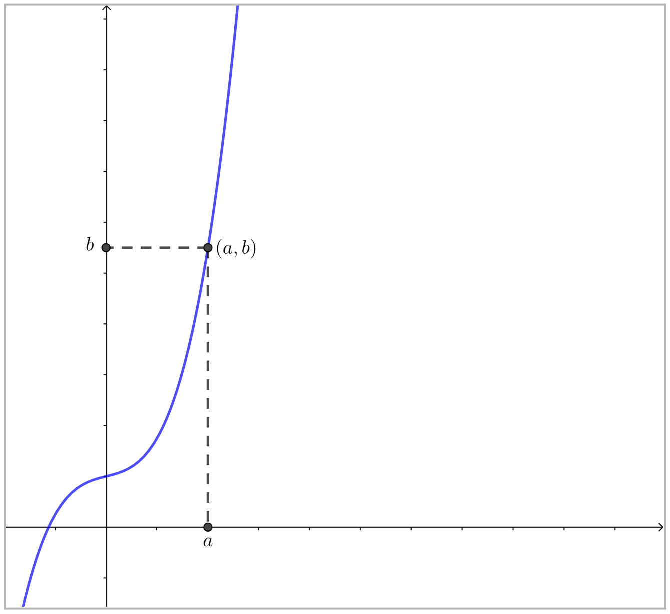
- $Dom\,(f^{-1}) \;=\; Rec\,(f).$
- $Rec\,(f^{-1}) \;=\; Dom\,(f).$
- $f^{-1}(x) \;=\; t \quad es\,equivalente\,a\;\; f(t) \;=\; x.$
- $(f^{-1} \circ\, f)(x) = x.$
- $(f \;\circ\; f^{-1})(x) = x.$

Por otra parte, al graficar la función inversa hemos observado que:

- Los gráficos de f y de f^{-1} son simétricos respecto de la recta $y = x$, es decir, los gráficos se obtienen uno del otro intercambiando las coordenadas del eje X por las del eje Y.

GRÁFICO DE LA FUNCIÓN INVERSA

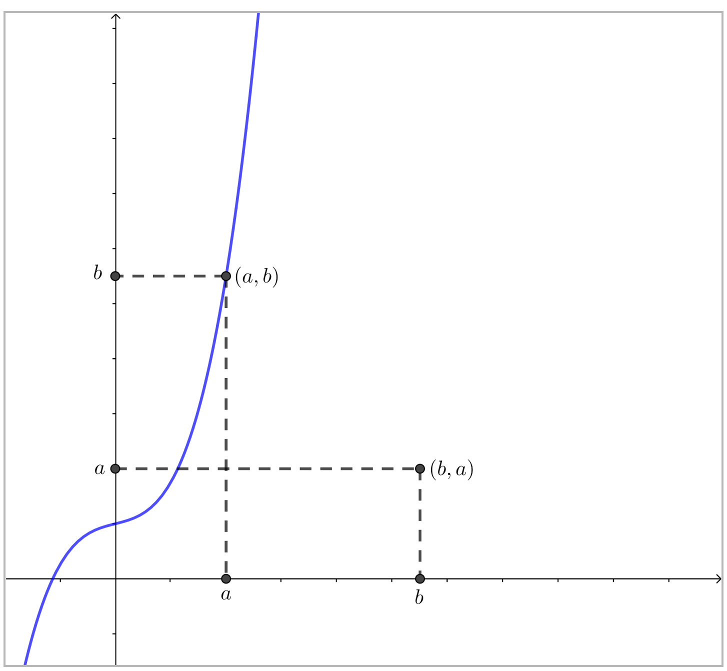
Consideremos el gráfico de la función $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x + 1$



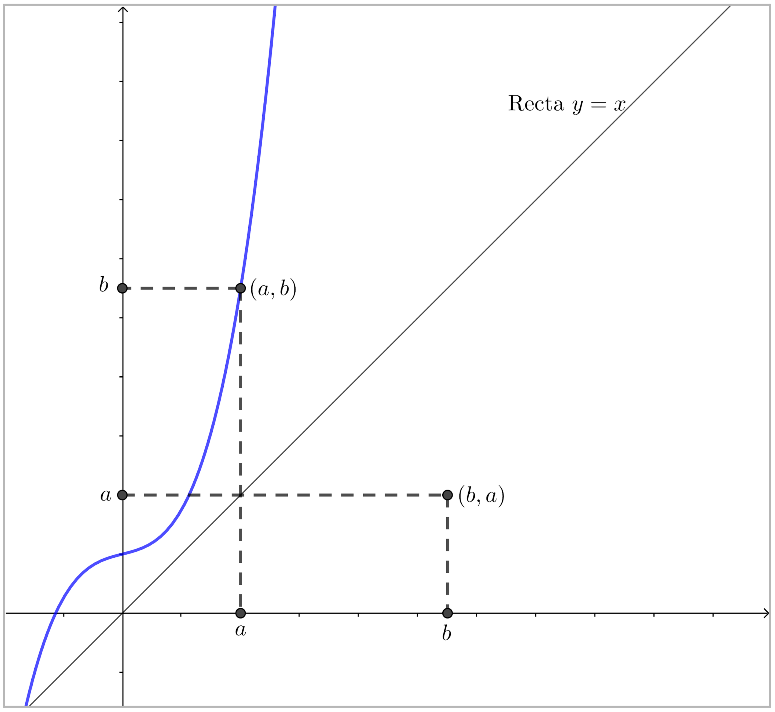
Observamos a partir de este gráfico que la función es creciente. Como hemos visto antes, esto asegura que la función tiene inversa.

Además, consideremos un punto (a, b) que esté en el gráfico.

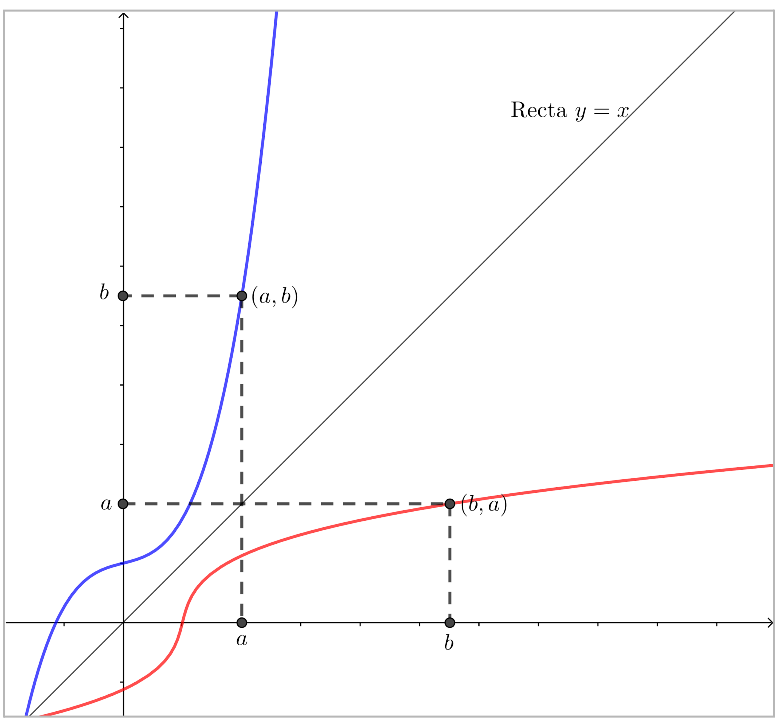
Que el punto (a, b) esté en el gráfico de f significa que $b = f(a)$. Entonces, $a = f^{-1}(b)$, por lo que el punto (b, a) está en el gráfico de f^{-1}.



Notemos que los puntos (a, b) y (b, a) son simétricos con respecto a la recta $y = x$.



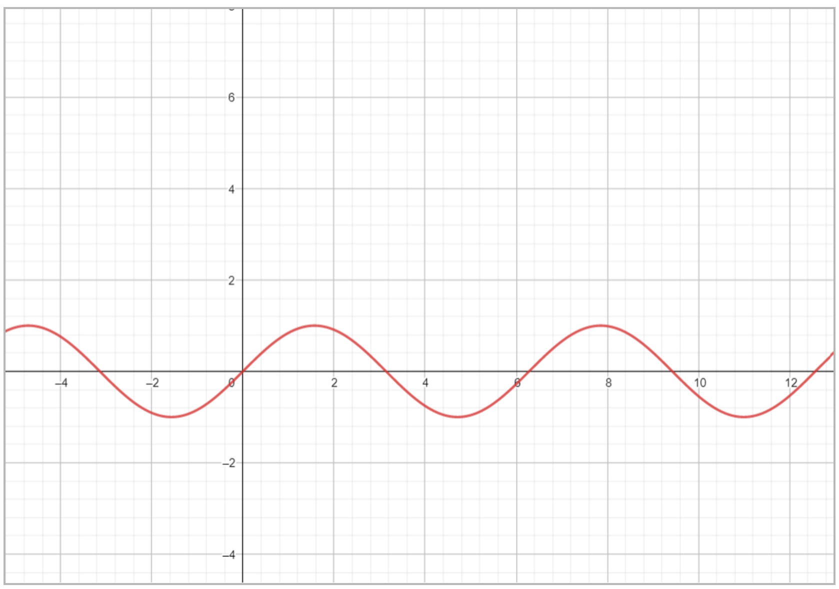
Si hacemos esto para todos los puntos del gráfico, obtenemos el gráfico de f^{-1}.



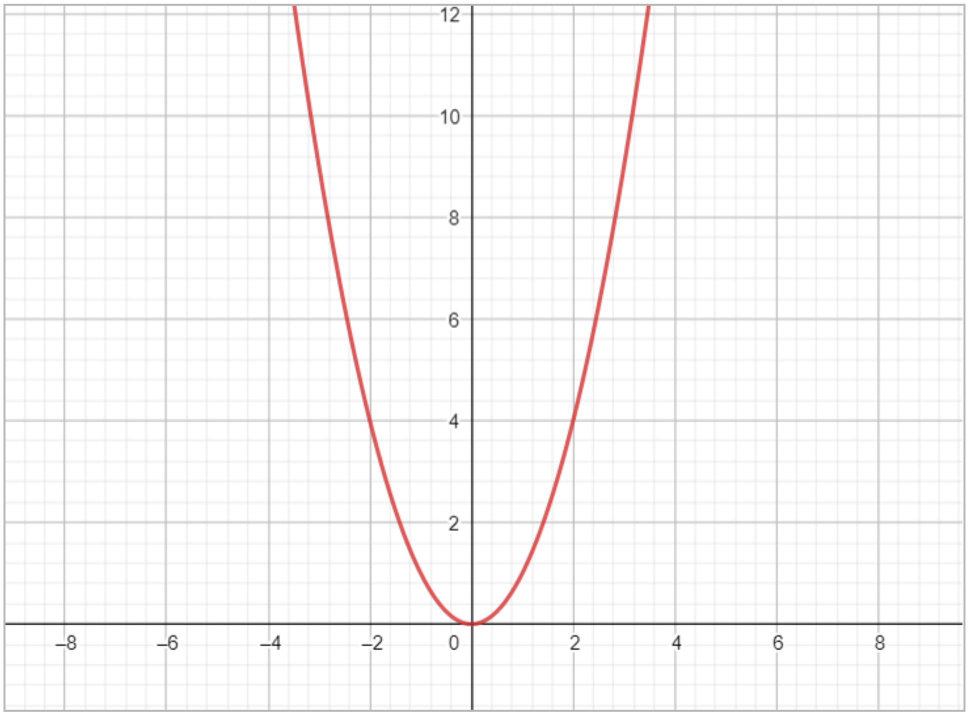
Así, el gráfico de f^{-1} es la reflexión con respecto a la recta $y = x$ del gráfico de f.

¿CUÁNDO HAY INVERSA?

Cuando conocemos el gráfico de una función, siempre lo podemos reflejar a través de la recta $y = x$, es decir, podemos dibujar este gráfico intercambiando los roles de los ejes X e Y. Sin embargo, en algunos casos, el gráfico obtenido por esta reflexión no representa a una función. Esto ocurre justamente cuando el problema inverso para la función original no tiene una única solución, por ejemplo, esto es el caso del gráfico de la función $f = sen(x)$.



Y algo similar ocurre, por ejemplo, para la función $y = x^2$.

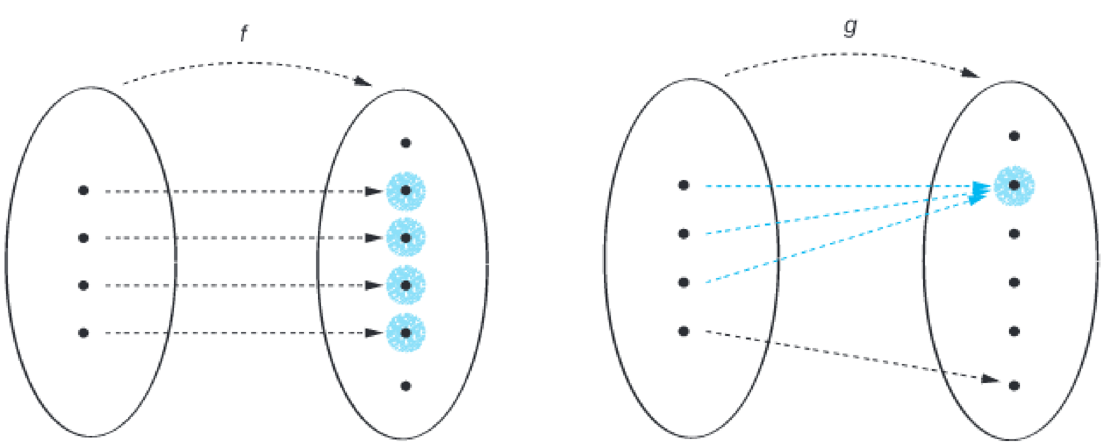


En esos casos, no podemos definir una función inversa para toda la función.

Cuando el problema inverso tiene una única solución, decimos que la función es **inyectiva.** En este caso, para cada valor de la imagen, hay una única preimagen que le corresponde.

Un ejemplo de funciones que siempre son inyectivas son las funciones estrictamente crecientes, como por ejemplo, todas las funciones potencias $f(x) = x^n$ cuando n es un número impar. Y por supuesto también las funciones que son estrictamente decrecientes. Estas funciones siempre tienen una función inversa.

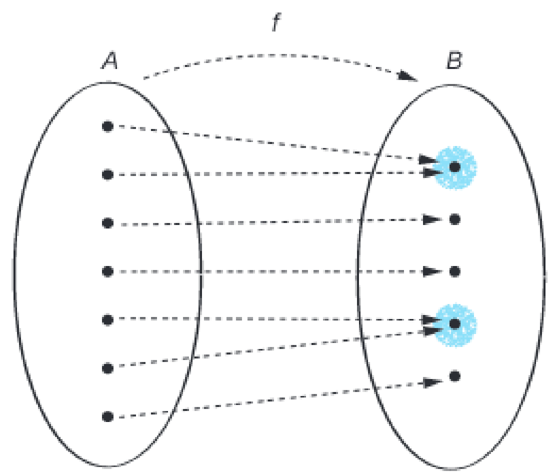
La propiedad de inyectividad la podemos comprender también a partir de un diagrama sagital.



Lo que vemos, es que en el caso de una función inyectiva, cada imagen corresponde a la punta de una única flecha. Mientras que en el caso de una función que no es inyectiva, existe una o más imágenes que corresponden a la punta de más de una flecha.

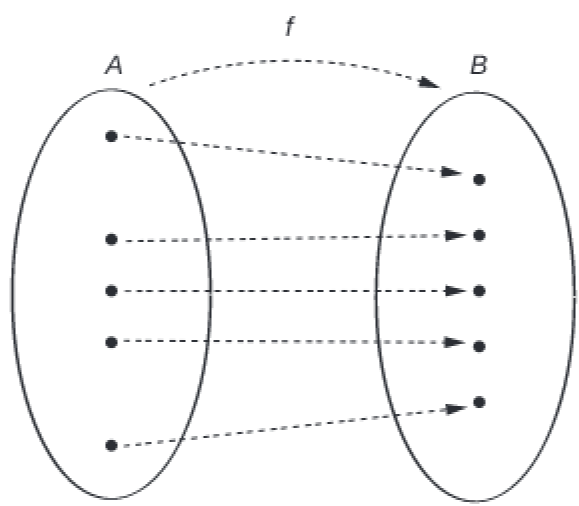
RESTRICCIÓN DEL DOMINIO

Una manera de “forzar” la inyectividad de una función se puede lograr eligiendo solo una preimagen cuando hay múltiples opciones. Veamos la siguiente figura.

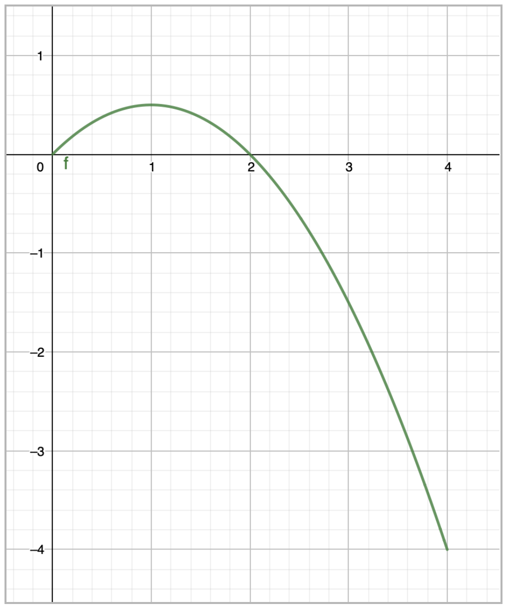


En este ejemplo, vemos que hay dos elementos del codominio de f con dos preimágenes.

Si eliminamos las preimágenes “sobrantes”, achicamos el dominio de la función, pasando de A a A'. Al considerar este nuevo dominio, obtenemos una función que si es inyectiva.



Pero, **¿cómo elegir cuál preimagen preservar, y cuáles eliminar?** Imaginemos una situación: supongamos que nos encontramos en un puente y lanzamos una pelotita. En primer lugar, sube sobre la altura del puente y luego comienza a caer, de tal manera que podemos describir su trayectoria usando el siguiente gráfico:



En el ejemplo de la situación anterior, podemos **usar el contexto para separar la trayectoria en dos**: cuando va subiendo, y cuando va bajando. En estos casos, por separado, el problema inverso tiene una única solución.

LA RAÍZ CUADRADA

La función dada por $f(x) = x^2$ no es invertible cuando consideramos su dominio natural. Sin embargo, tiene inversa si consideramos en su dominio sólo los números positivos y el cero, es decir, el intervalo $[0, \infty[$.

En este caso, a la función inversa f^{-1} le llamamos **raíz cuadrada**. Esta inversa ya la conoces y la usas, pues comúnmente se le anota como $\sqrt{\ }$. Tenemos entonces:

$$\sqrt{\ } : [0, \infty[\ \rightarrow [0, \infty[$$

Formalmente esta es la definición de la función $\sqrt{\ }$. Acá hemos tomado una convención: el resultado de una raíz cuadrada es único y siempre mayor o igual a 0.

Curso: Límites, derivadas e integrales
Unidad 1: Representar y modelar situaciones de cambio por medio de funciones
Tema: Nociones de funciones
Contenido: Función inversa

Una observación importante es que para un número x cualquiera, $\sqrt{x^2}$ debe ser el único número **positivo** que elevado al cuadrado da como resultado x^2. Si no sabemos de antemano si x es positivo o negativo, y para cubrir todas las posibilidades, utilizamos la fórmula:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Por ejemplo:

$$\sqrt{(-3)^2} = |3| = 3 \ , \sqrt{5^2} = |5| = 5 \ , \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$$

OTRA POSIBLE INVERSA DE $y = x^2$

La función dada por $f(x) = x^2$ también puede restringirse al intervalo $]-\infty, 0]$, en donde es estrictamente decreciente, y por lo tanto en este caso también obtenemos una función inversa. Sin embargo esta inversa <u>no es</u> la raíz cuadrada.

Precisamente, la inversa en este caso se expresa mediante la fórmula $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

En general, cuando es posible restringir el dominio de una función para obtener una inversa decimos que la función posee **inversa local**. Y cuando la función tiene inversa en su dominio natural, es decir, cuando no es necesario restringir el dominio, decimos que la **inversa es global.**

De esta manera, la función $f(x) = x^2$ posee inversas locales, pero no posee una inversa global.

Por otra parte, hemos visto que las funciones lineales y las funciones exponenciales sí tienen inversas globales.

SÍNTESIS

- Toda función lineal, es decir, de la forma $f(x) = mx + b$, tiene una función inversa asociada, excepto en el caso en que $m = 0$.
- El dominio natural de la inversa de una función lineal son todos los reales, pero también es posible invertir funciones lineales definidas en intervalos.
- Para hallar una fórmula para la inversa de $f(x) = mx + b$ una estrategia posible se basa en plantear la ecuación $y = mx + b$ y despejar la variable x. La expresión resultante corresponde a $f^{-1}(y)$.
- El gráfico de la función f^{-1}se puede obtener a partir del gráfico de f, reflejando este respecto de la recta $y = x$.

- El decaimiento del C-14 se puede modelar a través de una función exponencial. El procedimiento de datar usando el C-14 corresponde a un problema inverso.

- Para $a > 0$, $a \neq 1$, la función a^x tiene como dominio $\mathbb{R}$ y como recorrido $]0, \infty[$. Si restringimos su codominio a $]0, \infty[$, su inversa es la función $log_a x$ cuyo dominio es $]0, \infty[$ y recorrido es $\mathbb{R}$.

- Si una función $f: A \to B$ cumple que cada elemento de B tiene una única preimagen, entonces podemos definir su inversa, que denotamos como $f^{-1}: B \to A$. Esta función se define por la expresión:
$$f^{-1}(y) = x \quad si\ y\ solo\ si \quad y = f(x)$$

- Si una función f es invertible, el gráfico de f^{-1}es la reflexión con respecto a la recta $y = x$ del gráfico de f.
- Para que una función tenga inversa es necesario que sea inyectiva, es decir que para cada imagen haya una sola preimagen.
- Si una función es estrictamente creciente o estrictamente decreciente entonces automáticamente es inyectiva.
- Si podemos restringir el dominio de una función para obtener una inversa decimos que la función posee inversa local.
- Cuando una función tiene inversa en para todo su dominio natural, es decir, cuando no es necesario restringir el dominio, decimos que tiene inversa global.
- La función $\sqrt{\ }: [0, \infty[\ \to [0, \infty[$ es la función inversa de $f(x) = x^2$ cuando restringimos su dominio a $[0, \infty[$.
- La fórmula $\sqrt{x^2} = |x|$ es válida para todo x.
- Usar herramientas gráficas nos ayuda a visualizar dominio, recorrido y comportamiento de la función inversa.

Recursos y links de interés

➔ ***CALCULADORA DE FUNCIONES INVERSAS, SOLO LA PARTE ALGEBRAICA***
Por otra parte, te presentamos una calculadora de funciones inversas (sólo la parte algebraica). Te sugerimos que la utilices para comprobar tus cálculos y resolver dudas durante tu estudio.
https://es.symbolab.com/solver/function-inverse-calculator/inversa%20f%5Cleft%28x%5Cright%29%3Dx%5E3?or=ex