Aula360
Aprendizaje para el siglo XXI

Apuntes Unidad 3

Volumen y Principio de Cavalieri

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

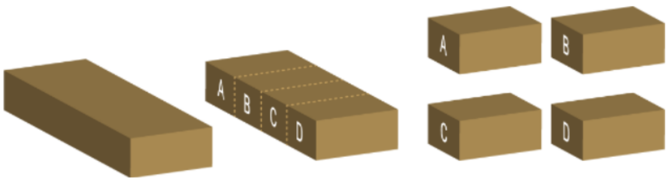
CMM Centro de Modelamiento Matemático

EL VOLUMEN

El **volumen** de un objeto tridimensional lo entendemos como una medida del espacio que este ocupa. Es una magnitud inherente al objeto, siempre mayor o igual que cero.

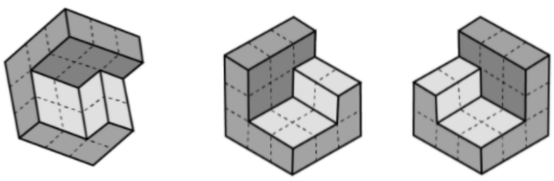
Es necesario definir una unidad de volumen, que usualmente corresponde a un cubo de lado uno. El volumen posee las siguientes propiedades:

- Cuando se descompone un cuerpo geométrico en dos o más partes disjuntas, el volumen del cuerpo inicial es igual a la suma de los volúmenes de cada una de las partes. A esto lo llamaremos **propiedad aditiva**.



$$Volumen\,(Cuerpo) \;=\; Volumen\,(A) \;+\; Volumen\,(B) \;+\; Volumen\,(C) \;+\; Volumen\,(D)$$

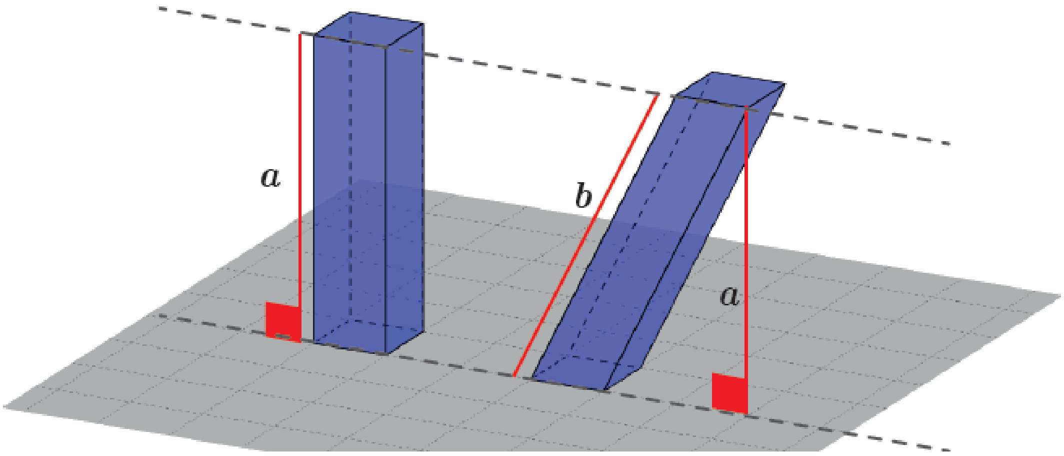
- Al desplazar o rotar un cuerpo, el volumen se mantiene. Además, si a partir de un cuerpo se obtiene otro mediante reflexión (como en un espejo), entonces los dos cuerpos tienen igual volumen. A esto lo llamaremos **propiedad de invarianza por transformaciones isométricas**.



Cuerpo rotado   Cuerpo original   Cuerpo reflejado

VOLUMEN DE UN PRISMA OBLICUO

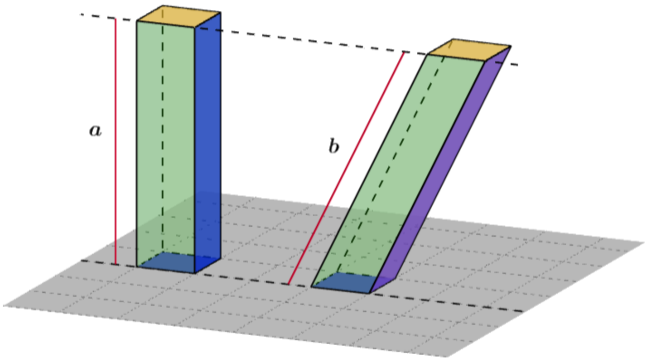
El volumen de un prisma oblicuo puede ser calculado por un proceso en el que se consideran *capas* que lo conforman y tiene **igual volumen que un prisma recto** de igual base e igual altura, como se muestra a continuación.



La percepción visual nos puede hacer creer erróneamente que “un cuerpo tiene mayor volumen que otro, solo porque es más alargado”.

Un razonamiento muy común que no es siempre verdadero es “si una de las magnitudes de una figura aumenta, las otras magnitudes que se relacionan con ella también lo hacen”. En este caso, como se observa, la arista b es más larga que la arista a, por lo que se podría pensar, incorrectamente, que “**el prisma que tiene arista** b tiene mayor volumen que **el prisma que tiene arista** a ”.

Notemos además, que **ambos prismas** tienen el mismo volumen, pero el área superficial del prisma de la derecha (con arista b), es mayor que el prisma de la izquierda (con arista$a$). Para justificarlo, observamos que no todas las caras correspondientes entre los dos cuerpos tienen igual área.

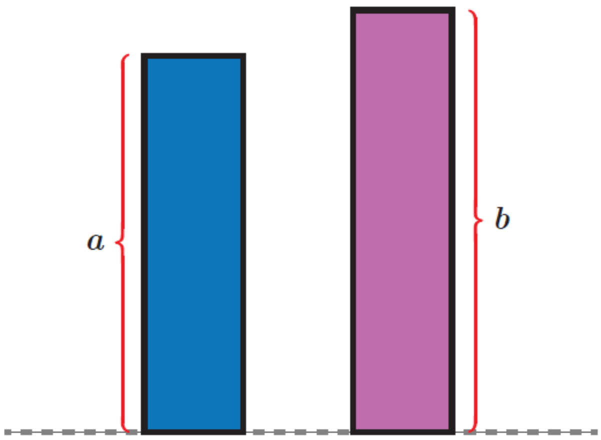


En el caso de las figuras de color:

- amarillo: tienen igual área porque corresponden a cuadrados iguales.

- verde: tienen igual área porque corresponden a paralelogramos de igual base e igual altura.

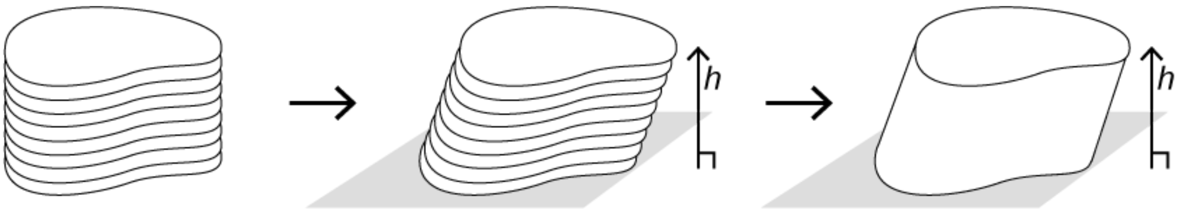
- azul y rosa: no tienen igual área. El área de las caras rosas es mayor que el de las caras azules correspondientes. Si bien todos estos paralelogramos tienen igual base (segmentos de 1 unidad), la figura rosa tiene mayor altura (pues corresponde al segmento b), indicado anteriormente. Para ello conviene ubicar ambas figuras sobre un mismo plano.



VOLUMEN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS I

El procedimiento de cortar el cuerpo en capas delgadas y desplazarlas no cambia su volumen, independientemente del número de capas.

Cuando hacemos que el número de capas tienda a infinito y las desplazamos, obtenemos una versión oblicua del cuerpo. De lo anterior podemos deducir que su volumen es igual al del cuerpo original.

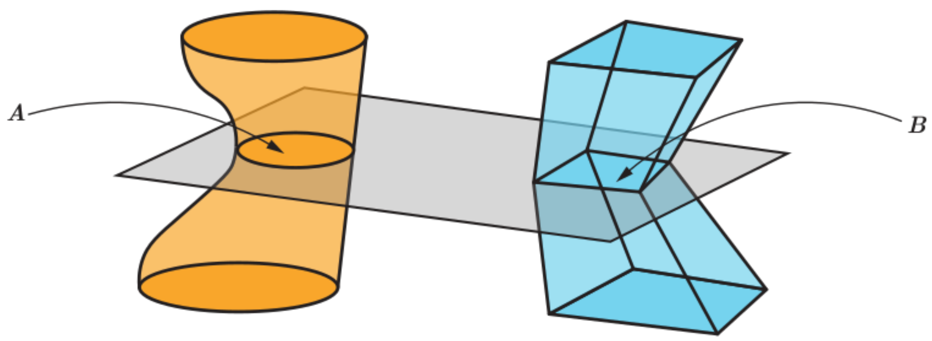


En particular, esta propiedad nos permite concluir que el volumen V de cualquier cuerpo generado de esta manera**,** siempre y cuando las capas tengan igual área basal, sigue obteniéndose mediante el producto entre su área basal A y su altura h.

$$V = A \cdot h$$

PRINCIPIO DE CAVALIERI

Consideremos dos cuerpos que se encuentran entre planos paralelos. Para cada corte transversal paralelo a los planos en donde se encuentran, se obtendrán dos secciones, digamos A y B. Una propiedad del volumen, conocida como el **Principio de Cavalieri,** nos dice que si las áreas de A y de B son iguales para cada corte, entonces el volumen de los cuerpos es el mismo.



VOLUMEN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS II

Para una pirámide de área basal A y altura h y un prisma de igual área basal y altura se tiene que:

- Volumen de la pirámide es $\frac{1}{3} \cdot A \cdot h$
- Volumen del prisma es $A \cdot h$

Para una cono de área basal A y altura h y un cilindro de igual área basal y altura se tiene que:

- Volumen de la cono es $\frac{1}{3} \cdot A \cdot h$
- Volumen del cilindro es $A \cdot h$

SÍNTESIS

- El volumen de un objeto tridimensional lo entendemos como una medida del espacio que este ocupa. Es una magnitud inherente al objeto, siempre mayor o igual que cero, y posee las siguientes propiedades:
    - Si un cuerpo se descompone en una o más partes, el volumen de un cuerpo es igual a la suma de los volúmenes de cada una de las partes (**propiedad aditiva**).
    - Al desplazar o rotar un cuerpo, el volumen se mantiene. Si un cuerpo se obtiene otro mediante reflexión entonces los dos cuerpos tienen igual volumen (**propiedad de invarianza por transformaciones isométricas**).

- El principio de escalamiento nos dice que si un cuerpo geométrico cualquiera se escala por un factor k en una dimensión, entonces su volumen se multiplica por k. Lo mismo ocurre si se escala consecutivamente en tres dimensiones ortogonales (ancho, largo o alto) por factores a, b y c, respectivamente, es decir, la medida del volumen del cuerpo se multiplica por el factor abc.

- El principio de Cavalieri postula que, dados dos cuerpos que se encuentran sobre un plano, si al realizar cortes transversales, paralelos a dicho plano, las áreas de las secciones de ambos cuerpos son iguales en cada corte, entonces el volumen de los cuerpos es el mismo.