Aula360
Aprendizaje para el siglo XXI

Apuntes Unidad 2

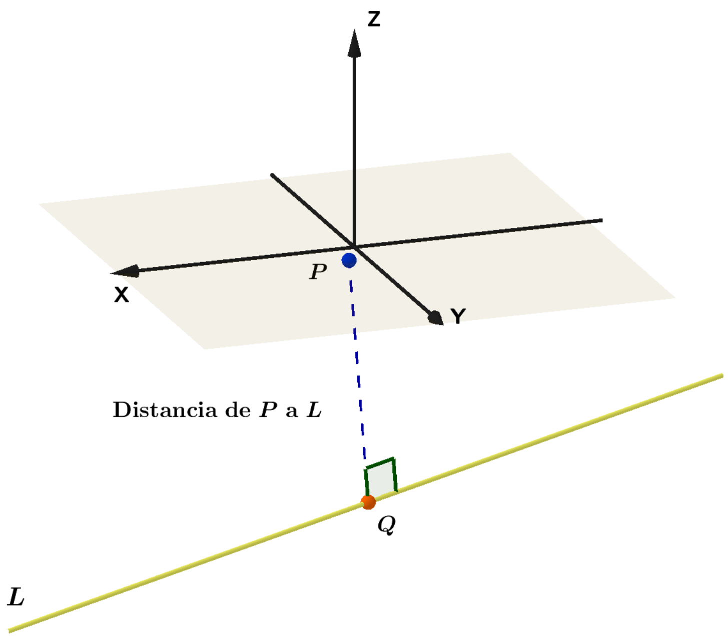
Distancias en el espacio

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

CMM
Centro de Modelamiento Matemático

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Diremos que la distancia de un punto P a una recta L_1 es la distancia más pequeña entre el punto P y un punto Q de la recta. Es decir, $d(P, L_1) = d(P, Q)$, donde Q es el punto de L_1 tal que para cualquier otro punto Q' de la recta se tiene $d(P, Q) \leq d(P, Q')$.



Un procedimiento para calcular la distancia entre un punto P y una recta L, conocida su ecuación vectorial, consiste en obtener las coordenadas del punto Q en L, y luego calcular la distancia entre los puntos P y Q.

Siguiendo este procedimiento, las coordenadas del punto Q se obtienen planteando la **condición de perpendicularidad** entre el vector $\vec{PQ}$ y un vector director $\vec{d}$ de la recta. A continuación se ilustra un ejemplo del procedimiento, tomando de referencia el punto $P = (50, 100, 0)$:

- Consideramos la recta L_1 definida como:
$$L_1 : \langle x, y, z\rangle = \langle 300, 200, -700\rangle + t\langle -1100, -400, 100\rangle$$
- Se considera el punto Q perteneciente a L_1, entonces para algún s su vector posición satisface:
$$\vec{Q} : \langle 300, 200, -700\rangle + s\langle -1100, -400, 100\rangle$$

- Conociendo las coordenadas de P, fue posible expresar las coordenadas del vector $\vec{PQ}$ en función de s
$$\vec{PQ} = \langle 250 - 1100s, 100 - 400s, -700 + 100s \rangle$$
- Dado que $\vec{PQ}$ es perpendicular a la recta L_1, es perpendicular al vector director que obtenemos de su ecuación vectorial:
$$\vec{d} = \langle -1100, -400, 100 \rangle$$
- Al aplicar la condición de perpendicularidad entre estos dos vectores obtuvimos la ecuación:

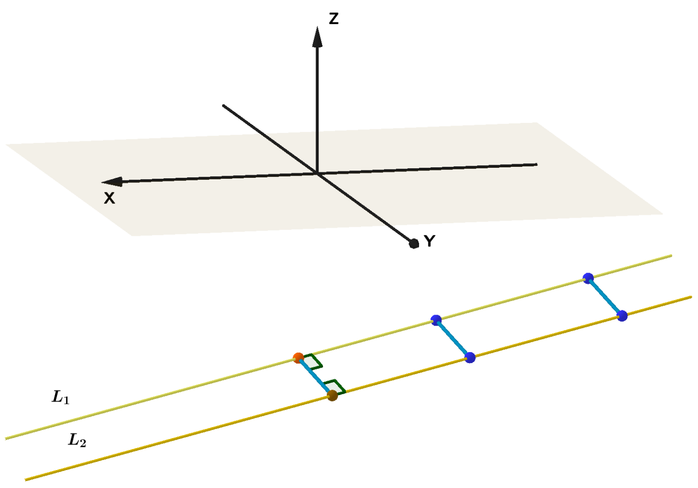
$$-1100(250 - 1100s) - 400(100 - 400s) + 100(-700 + 100s) = 0$$

de donde, $s \approx 0.28$

- Finalmente, conociendo s fue posible obtener las coordenadas de Q y con ello determinar la distancia entre los puntos P y Q que corresponde a la distancia de Pa la recta L_1 .

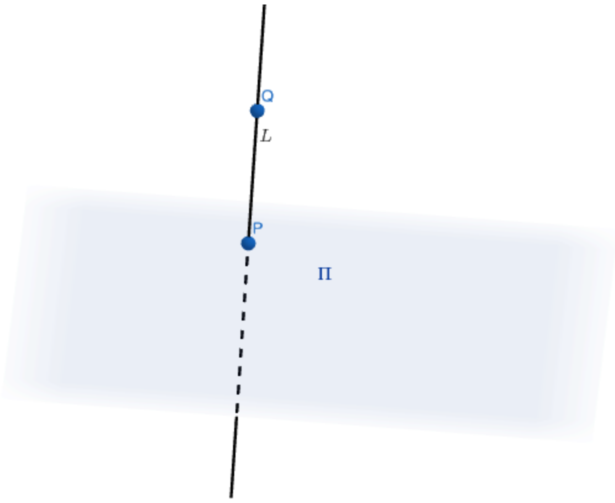
DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS

La distancia entre dos rectas paralelas en el espacio, se puede calcular como la distancia entre un punto de una de ellas y la otra. Esta distancia es independiente del punto que se tome en la primera recta.



DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UN PLANO

Para calcular la distancia entre un punto $Q = (x_0, y_0, z_0)$ y un plano π de ecuación $ax + by + cz = d$ se puede seguir el siguiente procedimiento:



Paso 1: Obtener un vector normal al plano. Por ejemplo, $\vec{n} = (a, b, c)$.

Paso 2: Definir la recta L que pasa por el punto Q y cuyo vector director es $\vec{n}$, es decir,

$$L : \langle x, y, z\rangle = \langle x_0, y_0, z_0\rangle + t\langle a, b, c\rangle$$

Paso 3: Se intersecta la recta L con el plano. Para ello, se reemplaza en la ecuación del plano $ax + by + cz = d$ y se despeja t .

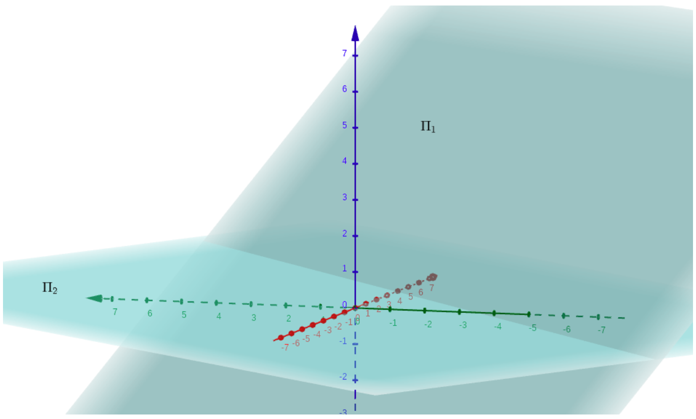
Paso 4: El punto más cercano del plano a Q, se obtiene al reemplazar el valor de t en la fórmula de la recta L. Este punto, denotado por P, se llama proyección de Q sobre el plano.

Paso 5: La distancia entre el plano y el punto Q se obtiene al calcular la distancia entre los puntos P y Q.

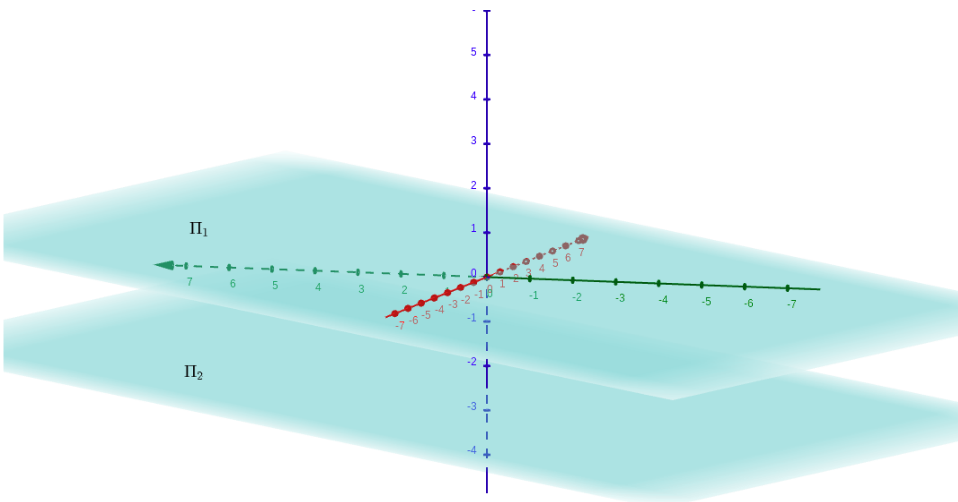
DISTANCIA ENTRE PLANOS

Sea π_1 y π_2 dos planos. La distancia entre ellos es la distancia más pequeña entre un punto de π_1 y un punto de π_2. Para calcular esta distancia podemos distinguir dos situaciones complementarias:

- El plano π_1 y el plano π_2 se cortan. En este caso, la distancia entre ellos es cero.



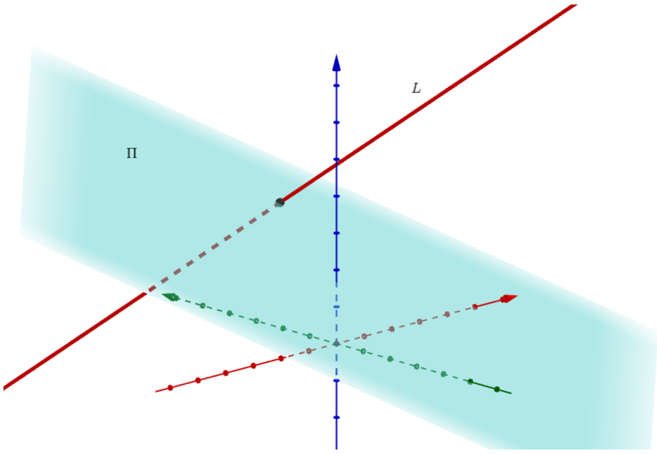
- El plano π_1 y el plano π_2 son paralelos. En este caso, la distancia es igual a la distancia de cualquier punto de π_1 al plano π_2; o equivalentemente, a la distancia de cualquier punto de π_2 al plano π_1.



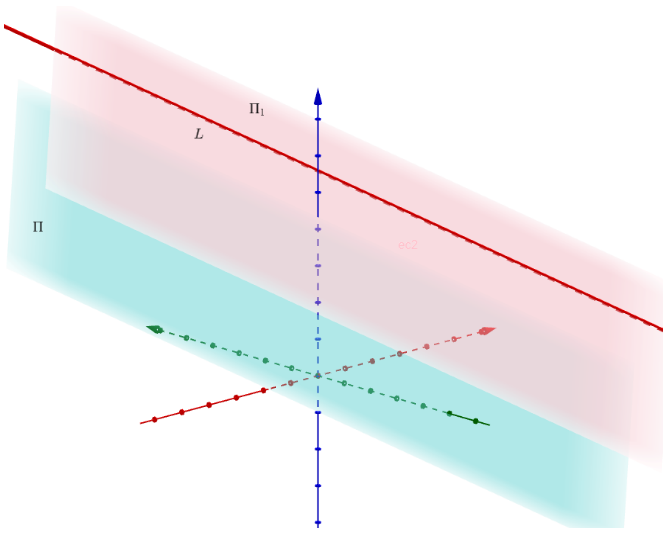
DISTANCIA ENTRE UN PLANO Y UNA RECTA

Sea π un plano y L una recta. La distancia entre ellos es la distancia más pequeña entre un punto del plano y un punto de la recta. Para calcular esta distancia podemos distinguir dos situaciones complementarias:

- El plano π y la recta L se cortan. En este caso, la distancia entre ellos es cero.



- El plano π y la recta Lno se cortan. En este caso, es posible construir un plano π_1 paralelo a π y que contiene a L. La distancia entre π y L es igual a la distancia entre π y π_1. Para calcular esta distancia podemos tomar cualquier punto de π_1, y en particular, cualquier punto de Lpara calcular la distancia a π.



¿QUÉ APRENDIMOS?

- La distancia de un punto P a un plano es la distancia más pequeña de P a un punto del plano.

- Para calcularla, se considera la recta que pasa por P y que tiene al vector normal del plano como vector director. Se determina la intersección de esta recta con el plano y se calcula la distancia entre P y el punto de intersección.

- La distancia entre dos planos paralelos se puede determinar calculando la distancia de cualquier punto de un plano al otro. Si los planos se cortan la distancia es cero.

- Cuando un plano y una recta no se cortan, la distancia entre ellos se puede determinar calculando la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano. Cuando el plano y la recta se cortan, la distancia es cero.

- La distancia de un punto P a una recta L es la distancia más pequeña entre el punto P y un punto Q de la recta. En este caso, el vector $\vec{PQ}$ es un vector **perpendicular** a la recta L.

- Una manera de encontrar la distancia entre un punto P y una recta L, conocida su ecuación vectorial, consiste en,

    - Expresar el vector posición $\vec{Q}$ usando la ecuación vectorial de L, esto es, expresar $\vec{Q}$ en función de algún parámetro s.

    - Expresar el vector $\vec{PQ}$ en función de s y aplicar el criterio de perpendicularidad con un vector director de la recta L. Esto entregará una ecuación para el parámetro s.

    - Conociendo s se obtienen las coordenadas del punto Q y con ello la distancia de Pa Qque corresponde a la distancia del punto P a la recta l.

- La distancia entre dos rectas paralelas en el espacio, se puede calcular como la distancia entre un punto de una de ellas y la otra. Esta distancia **es independiente** del punto que se tome en la primera recta.