Aula360
Aprendizaje para el siglo XXI

Apuntes Unidad 2

Vectores en 3D

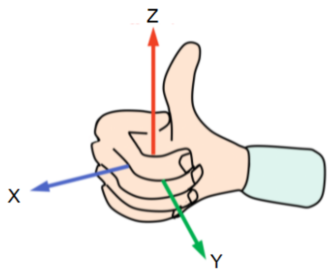
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

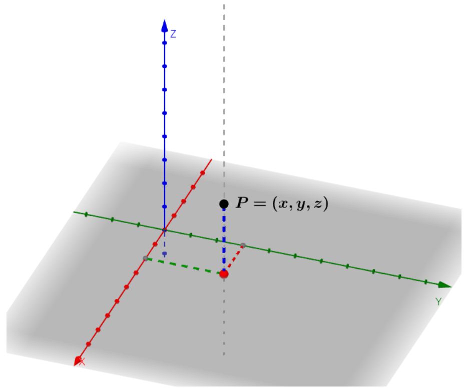
CMM
Centro de Modelamiento Matemático

SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS TRIDIMENSIONAL 3D

El sistema de coordenadas cartesianas tridimensional $3D$ está formado por tres rectas o ejes coordenados X, Y y Z, que se cortan en un punto, denominado origen O. Los ejes son perpendiculares entre sí. La elección sobre la disposición gráfica de los ejes considera la regla de la mano derecha.

Un punto P en el espacio se representa por las coordenadas (x, y, z)





Para expresar puntos en el espacio utilizaremos cualquiera de las siguientes notaciones: $A = (a, b, c)$ o $A = (a, b, c)$.

VECTORES EN EL SISTEMA DE COORDENADAS 3D

Los vectores en el sistema de coordenadas $3D$ quedan descritos, al igual que en $2D$, por sus características: magnitud, sentido y dirección. Además, al igual que en $2D$, se considera que la primera componente sea$x$, la segunda y, agregando z como una tercera componente.

Los vectores los representaremos como:

$$\vec{v} = \langle x, y, z \rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

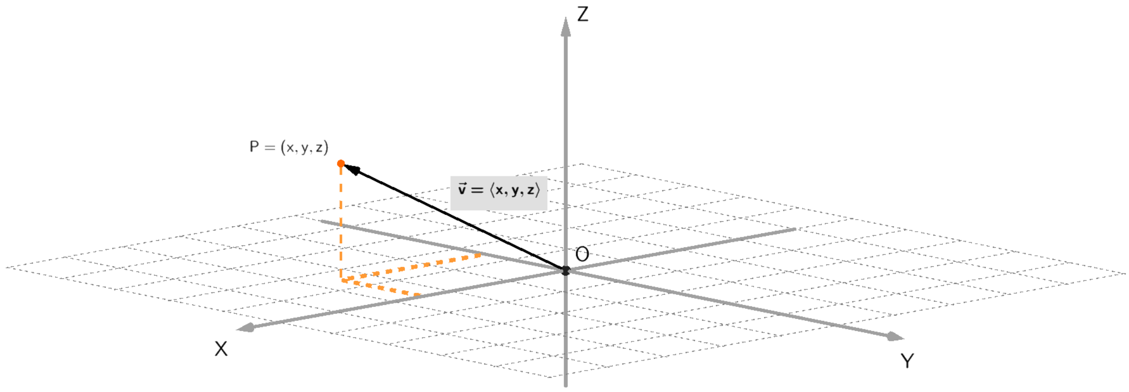
Al igual que en $2D$ estas corresponden a las coordenadas de un punto (x, y, z) cuando el punto inicial del vector está en el origen.

Curso: Geometría 3D
Unidad 2: Rectas y planos en el espacio
Tema: Vectores en 3D
Contenido: Vectores en 3D

VECTORES REPRESENTANDO TRASLACIONES

Al igual que en $2D$, cuando tenemos un vector cuyo punto inicial no es el origen del sistema de coordenadas, lo podemos **trasladar** para que su punto inicial sea $O = (0, 0, 0)$.

Los vectores en $3D$ representan **traslaciones** y quedan descritos por su magnitud, sentido y dirección. Podemos representar los vectores, utilizando el sistema de coordenadas $3D$ de la siguiente manera:

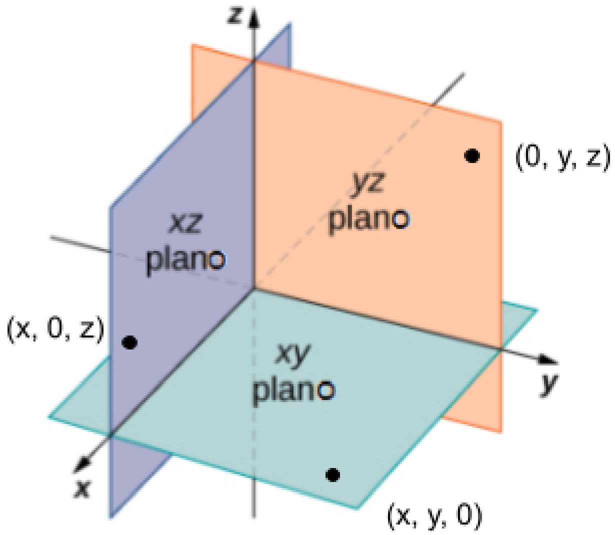


El vector que representa la traslación del punto $A = (x_1, y_1, z_1)$ al punto $B = (x_2, y_2, z_2)$ queda determinado por:

$$\vec{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

PLANOS XY, YZ y XZ

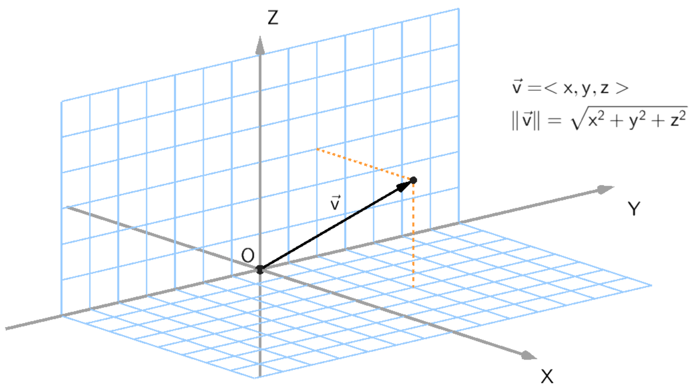
Todos los puntos con coordenada $z = 0$ conforman el plano coordenado XY. Similarmente, los puntos que tienen coordenada $x = 0$ conforman el plano coordenado YZ, y todos los puntos que tienen coordenada $y = 0$ conforman el plano coordenado XZ.



MAGNITUD DE UN VECTOR EN 3D

La magnitud del vector $\vec{v} = \langle x, y, z \rangle$ en tres dimensiones está dada por la expresión

$$|\vec{v}| = |\langle x, y, z \rangle| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN 3D

Conociendo la magnitud de un vector en tres dimensiones es posible entregar la distancia entre dos puntos P y Q, que corresponde al largo del único vector que traslada el P a Q, es decir, $d(P,Q) = |\vec{PQ}|$. Para ser más precisos, si $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ se tiene que $\vec{PQ} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$ y, por lo tanto,

$$d(P,Q) = |\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Esta expresión también corresponde al largo del segmento de recta que une P y Q.

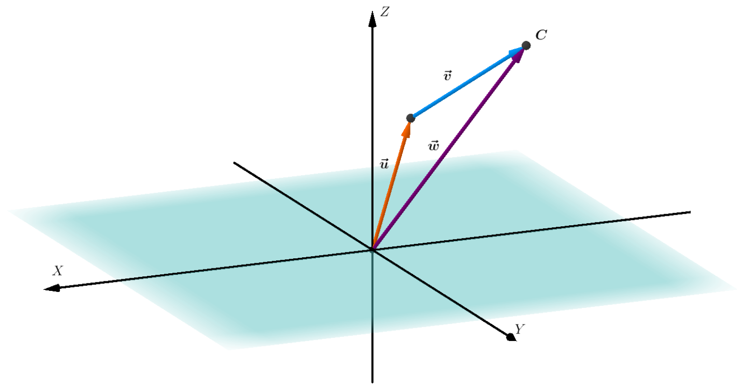
EL DESPLAZAMIENTO COMO SUMA DE DESPLAZAMIENTOS SUCESIVOS

El desplazamiento de un objeto, como un dron en el espacio, se puede expresar como la suma de dos desplazamientos sucesivos. o mismo ocurre cuando describimos el desplazamiento del dron en dos dimensiones:

Tanto en el plano (2 dimensiones) como en el espacio (3 dimensiones) **un desplazamiento se puede escribir como la suma de otros dos desplazamientos sucesivos**. Esto se explica, porque en ambos casos, el vector desplazamiento conecta los puntos iniciales y finales de una trayectoria, los cuales pueden estar en el plano o en el espacio.

SUMA, RESTA E INVERSO DE VECTORES EN 3D

De la misma manera a lo que ocurría en el plano, la suma de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en el espacio, es el vector $\vec{w}$ que corresponde a realizar una traslación según el vector $\vec{u}$ seguida de una traslación según el vector $\vec{v}$.



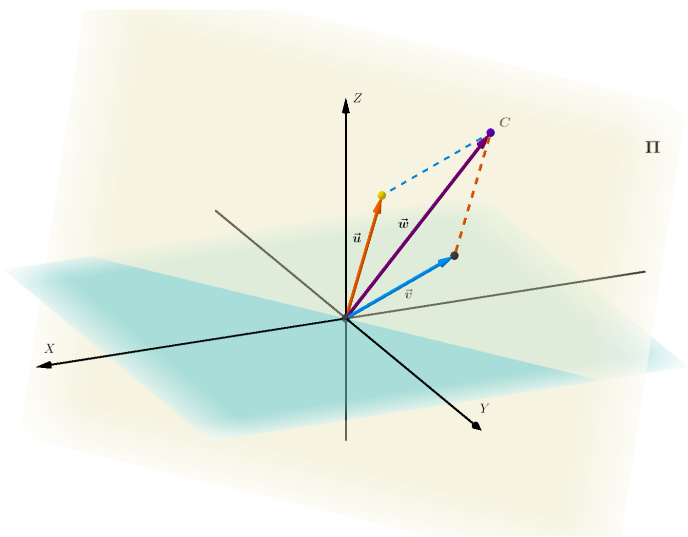
Curso: Geometría 3D
Unidad 2: Rectas y planos en el espacio
Tema: Vectores en 3D
Contenido: Vectores en 3D

Si $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ resulta que, $\vec{u} + \vec{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3 \rangle$. Es decir, al igual que en el plano, la suma de vectores en el espacio corresponde a sumar coordenada a coordenada.

De forma similar, el inverso de un vector y la resta de vectores se pueden obtener en términos de las coordenadas 3D,

- $-\vec{v} = \langle -v_1, -v_2, -v_3 \rangle$
- $\vec{u} - \vec{v} = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3 \rangle$

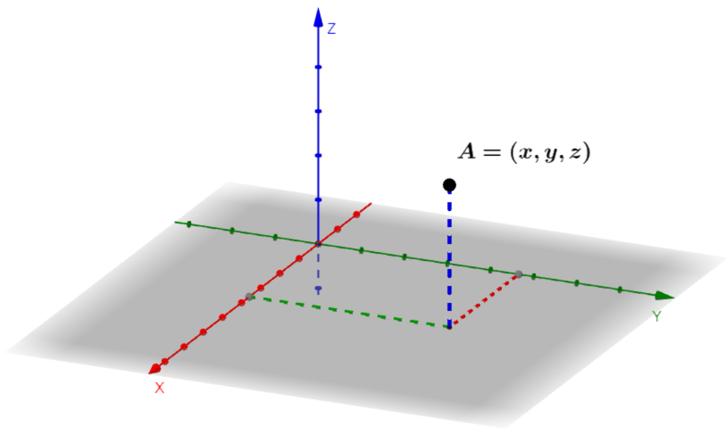
Al igual que como vimos en dos dimensiones, la suma de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en el espacio corresponde a la **diagonal del paralelogramo** definido por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Dicho paralelogramo está incluido en el único plano definido por el origen y los puntos finales de los vectores.



Así, el vector $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, es un vector que pertenece a dicho plano. En el caso que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos, el plano anterior no es único.

SÍNTESIS

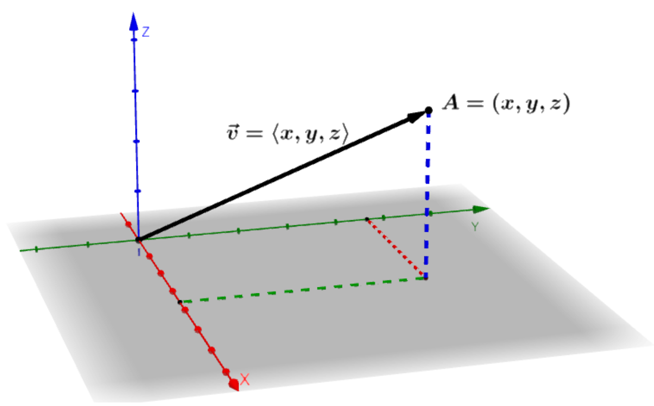
- El sistema de coordenadas $3D$ está formado por tres rectas o ejes coordenados X, Y y Z que se cortan en un punto, denominado origen O. Los ejes son perpendiculares entre sí.
- Para expresar puntos en este sistema de coordenadas utilizaremos las siguientes notaciones: $A = (x, y, z)$ o $A = (x, y, z)$ y su representación gráfica es:



- Para representar vectores en el sistema de coordenadas $3D$ utilizaremos las siguientes notaciones:

$$\vec{v} = \langle x, y, z \rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

y su representación gráfica es:



- También, aprendimos que el vector que representa la traslación del punto $A = (a, b, c)$ al punto $B = (d, e, f)$ queda determinado por:

$$\vec{AB} = \langle d - a, e - b, f - c \rangle$$

  Asimismo, si el punto de inicio A no es el origen, podemos trasladar el vector para que su punto inicial sea $O = (0, 0, 0)$

- La magnitud del vector $\vec{v} = \langle x, y, z \rangle$ en tres dimensiones está dada por la expresión

$$|\vec{v}| = |\langle x, y, z \rangle| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- Tanto en el plano (2 dimensiones) como en el espacio (3 dimensiones) un desplazamiento se puede escribir como **la suma** de otros dos desplazamientos sucesivos.

- La suma de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en el espacio, es el vector $\vec{w}$ que corresponde a realizar una **traslación** según el vector $\vec{u}$ seguida de una traslación según el vector $\vec{v}$.

- El inverso de un vector y la resta de vectores se pueden obtener en términos de las coordenadas 3D,
  - $-\vec{v} = \langle -v_1, -v_2, -v_3 \rangle$
  - $\vec{u} - \vec{v} = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3 \rangle$

- La suma de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en el espacio corresponde a la diagonal del paralelogramo definido por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Dicho paralelogramo **está** incluido en el único plano definido por el origen y los puntos finales de los vectores.