Aula360
Aprendizaje para el siglo XXI

Apuntes Unidad 1

Ecuación vectorial de la recta

FCFM
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

CMM
Centro de Modelamiento Matemático

Curso: Geometría 3D.
Unidad 1 : Representación vectorial de situaciones y fenómenos.
Tema: Ecuación vectorial de la recta.
Contenido: Ecuación vectorial de la recta.

ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA

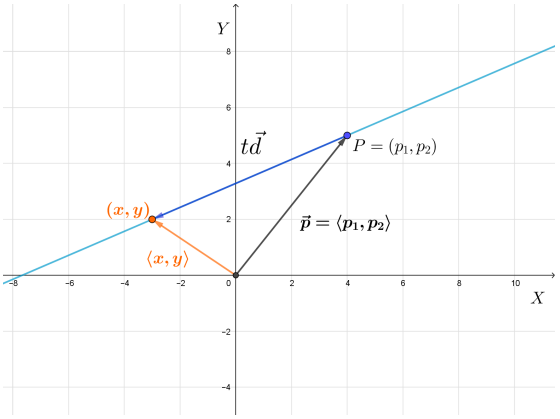
Dado un vector $\vec{p} = \langle p_1, p_2 \rangle$ y un vector no nulo $\vec{d} = \langle d_1, d_2 \rangle$, el conjunto de puntos (x, y) tales que

$$\langle x, y \rangle = \vec{p} + t\vec{d} \text{ con } t \in \mathbb{R} \text{ define una recta } L.$$

A la expresión

$$L = \{(x, y) : \langle x, y \rangle = \vec{p} + t\vec{d},\ t \in \mathbb{R}\}$$

Le llamamos la ecuación vectorial de la recta L y nos referimos al vector $\vec{p}$ como vector posición de la recta y al vector $\vec{d}$ como vector director de la recta.



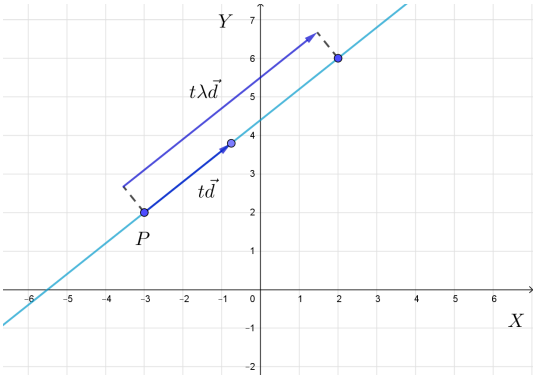
La ecuación vectorial de la $L : \langle x, y \rangle = \vec{p} + t\vec{d}$ nos indica que el punto $P = (p_1, p_2)$es un punto de la recta, y que todos los otros puntos de la recta se obtienen trasladando el punto P mediante los diferentes vectores $t\vec{d}$, paralelos a $\vec{d}$, que se obtienen al variar el valor del parámetro *t* . Es por ello que también nos referiremos a la recta L como "la recta que pasa por P y que tiene a $\vec{d}$ como “vector director".

Es importante notar que el vector posición $\vec{p} = \langle p_1, p_2 \rangle$ y el punto $P = (p_1, p_2)$ en la recta no son el mismo objeto. El punto pertenece a la recta, mientras que el vector posición es la flecha que conecta el origen con ese punto. Lo mismo ocurre con los puntos (x, y) de la recta y el vector$\langle x, y \rangle$ que corresponde al vector que conecta los puntos (x, y) con el origen.

Curso: Geometría 3D.
Unidad 1 : Representación vectorial de situaciones y fenómenos.
Tema: Ecuación vectorial de la recta.
Contenido: Ecuación vectorial de la recta.

REPRESENTAR UNA MISMA RECTA DE FORMAS DISTINTAS

Si $\langle x, y\rangle = \vec{p} + t\vec{d}$ es una ecuación vectorial de la recta L, entonces $\langle x, y\rangle = \vec{P} + t\lambda\vec{d}$ también es una ecuación vectorial de L. En la siguiente imagen se muestra un ejemplo de lo anterior, para el caso en que $\lambda > 1$.



Es decir, en la ecuación vectorial de la recta L podemos considerar cualquier vector paralelo a $\vec{d}$ como vector director, y usarlo para describir su ecuación vectorial.

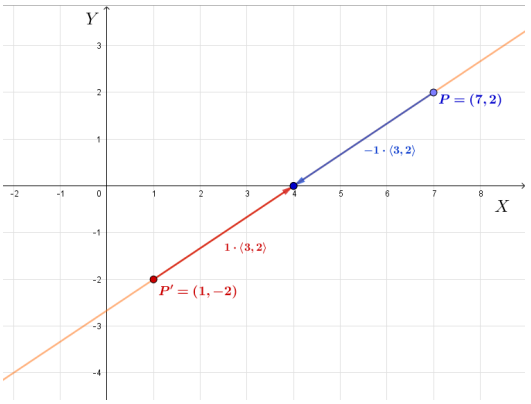
FORMAS DE ESCRIBIR LA ECUACIÓN VECTORIAL

Para definir la ecuación vectorial de un recta $L : \langle x, y\rangle = \langle p_1, p_2\rangle + t\langle d_1, d_2\rangle$ necesitamos un vector posición $\vec{p} = \langle p_1, p_2\rangle$ y un vector director $\vec{d} = \langle d_1, d_2\rangle$. Sin embargo, como hemos podido evidenciar, la elección de $\vec{p}$ y $\vec{d}$ no es única: vectores distintos pueden definir una misma recta. Resumimos a continuación lo que hemos aprendido hasta ahora.

Sea la recta $L : \langle x, y\rangle = \vec{P} + t\vec{d}$. Si P' es cualquier otro un punto de la recta L, entonces la expresión $\langle x, y\rangle = \vec{P'} + k\vec{d}$ también es una ecuación vectorial de la recta L. Es decir, en la ecuación vectorial de la recta podemos considerar cualquier punto de la recta y colocarlo como vector posición.

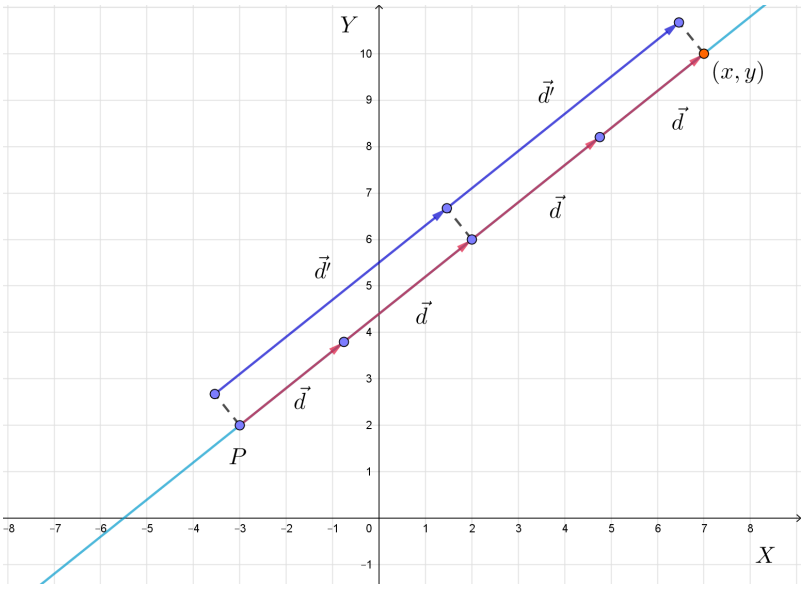
Notemos que al usar el vector posición $\vec{P'}$ hemos cambiado el parámetro t por el parámetro k, puesto que para "llegar" al mismo punto (x, y) de la recta, hay que trasladar los puntos P y $\vec{P'}$ de acuerdo a vectores diferentes. En la siguiente imagen se muestra un ejemplo de lo anterior, en una recta de vector director $\vec{d} = \langle 3, 2\rangle$.

Curso: Geometría 3D.
Unidad 1 : Representación vectorial de situaciones y fenómenos.
Tema: Ecuación vectorial de la recta.
Contenido: Ecuación vectorial de la recta.



Por otro lado, si $\vec{d'}$ es un vector paralelo a $\vec{d}$, entonces la expresión $\langle x, y \rangle = \vec{P} + r\vec{d'}$ también es una ecuación vectorial de la recta L. Es decir, en la ecuación vectorial de la recta podemos colocar cualquier vector paralelo a $\vec{d}$ como vector director.

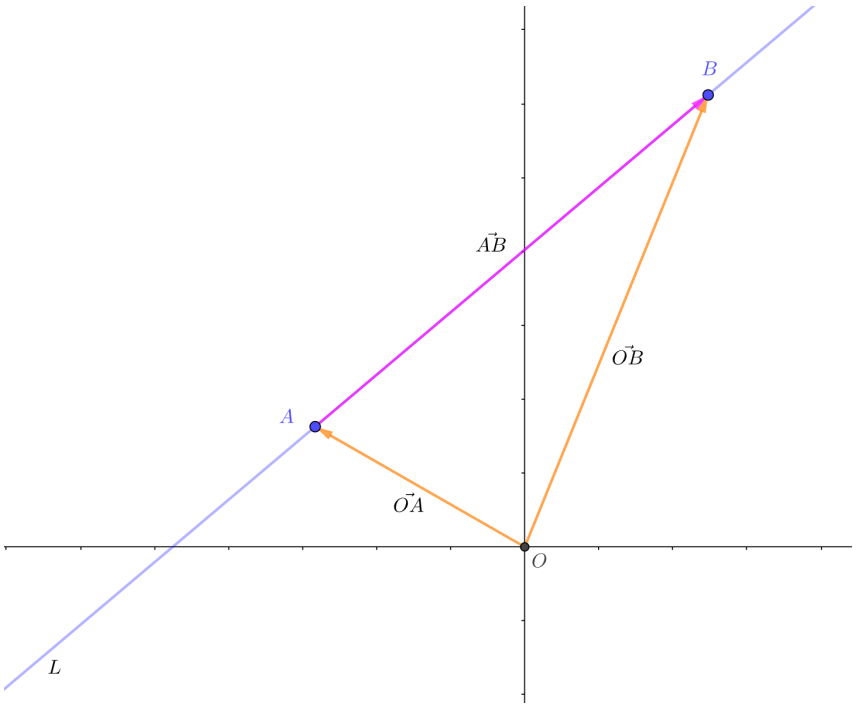
Notemos que al igual en el caso anterior, hemos cambiado el parámetro *t* por un parámetro *r* para evidenciar el hecho de que para llegar al mismo punto (x, y) trasladando el punto P de acuerdo a $\vec{d}$ y $\vec{d'}$, los valores de *r* y *t* son distintos. Lo anterior se muestra de forma esquemática en la siguiente imagen.



Curso: Geometría 3D.
Unidad 1 : Representación vectorial de situaciones y fenómenos.
Tema: Ecuación vectorial de la recta.
Contenido: Ecuación vectorial de la recta.

ECUACIÓN VECTORIAL A PARTIR DE DOS PUNTOS

Sean A y B dos puntos distintos en el plano, y sea L la única recta que pasa por A y B.



Entonces,

- los puntos A y B pertenecen a la recta.
- el vector $\vec{AB}$ es paralelo a L.

En consecuencia podemos representar a L con la ecuación vectorial

$$L : \langle x, y \rangle = \vec{A} + t\vec{AB}$$

Observemos que en la ecuación vectorial anterior, podemos:

- reemplazar el vector posición $\vec{A}$ por $\vec{B}$ y
- reemplazar el vector director $\vec{AB}$ por el vector $\vec{BA}$

y estaremos representando la misma recta L.

Curso: Geometría 3D.
Unidad 1 : Representación vectorial de situaciones y fenómenos.
Tema: Ecuación vectorial de la recta.
Contenido: Ecuación vectorial de la recta.

ECUACIÓN CARTESIANA DE LA RECTA

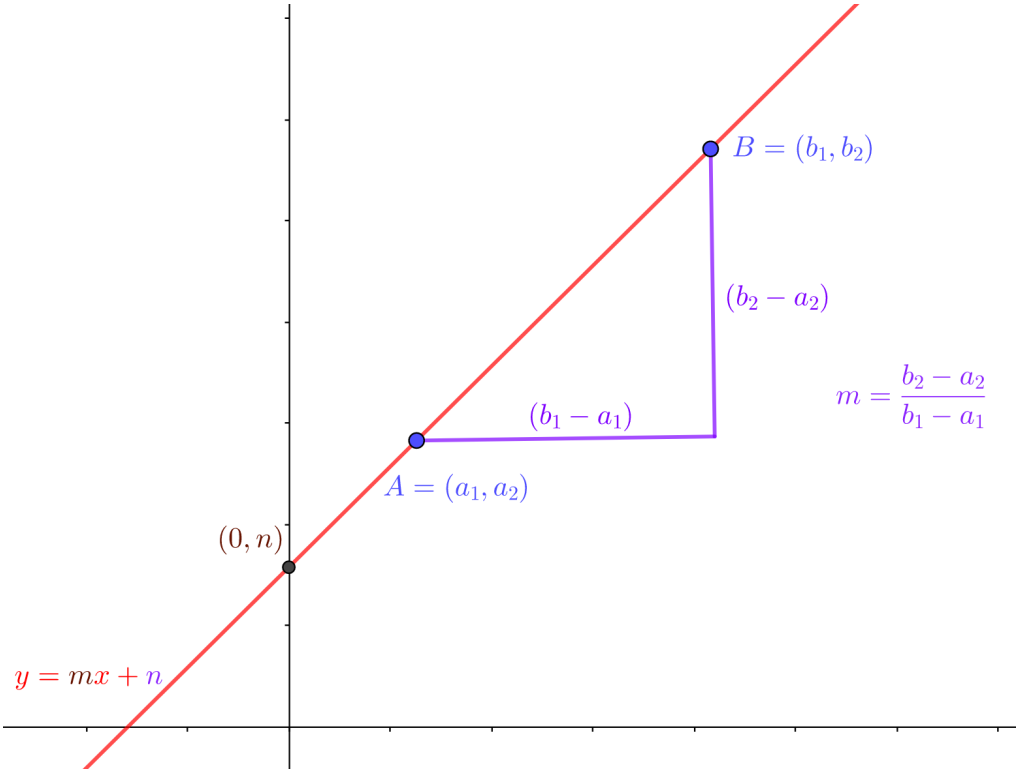
Los puntos (x, y) que pertenecen a una recta L pueden ser descritos por una ecuación vectorial si se conoce un vector posición $\vec{p} = \langle p_1, p_2 \rangle$ y un vector director $\vec{d} = \langle d_1, d_2 \rangle$ de la recta, esta se representa mediante la expresión:

$$L = (x, y) : \langle x, y \rangle = \vec{p} + t\vec{d} \text{ para t } \in R$$

También si se conoce la pendiente de la recta, denotada por m, y el punto donde la recta corta el eje y, conocido como intercepto o coeficiente de posición y denotado por n, entonces es posible representar la recta a través de su ecuación cartesiana cuya expresión es:

$$L = (x, y) : y = mx + n$$

Esta expresión es única, es decir, dada una recta L su pendiente y coeficiente de posición son únicos.



Por otra parte, si se conoce la pendiente de la recta m y un punto (p_1, p_2) que pasa por ella, la ecuación cartesiana de esta única recta se escribe como:

Curso: Geometría 3D.
Unidad 1 : Representación vectorial de situaciones y fenómenos.
Tema: Ecuación vectorial de la recta.
Contenido: Ecuación vectorial de la recta.

$$L = (x, y) : y = m(x - p_1) + p_2$$

RELACIÓN DE ECUACIÓN VECTORIAL Y CARTESIANA DE LA RECTA

Dada una ecuación vectorial de la recta

$$L : \langle x, y\rangle = \langle a, b\rangle + k\langle s, t\rangle$$

cuando s es distinto de cero su expresión cartesiana usando su pendiente y un punto de ella está dada por:

$$L = (x, y) : y = \frac{t}{s}(x - a) + b$$

A partir de la expresión anterior, reordenando términos se obtiene la ecuación cartesiana

$$y = \frac{t}{s}x + b - \frac{ta}{s}$$

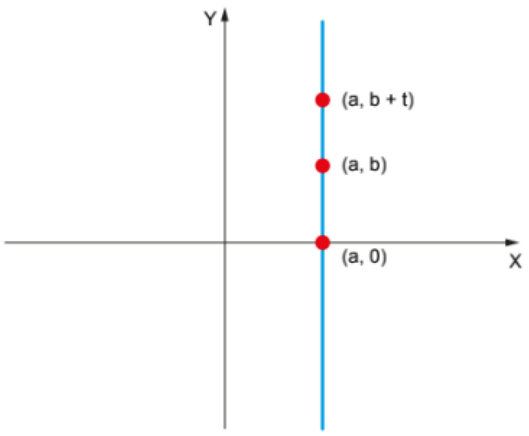
Donde la pendiente está dada por

$$m = \frac{t}{s}$$

y el coeficiente de posición por

$$n = b - \frac{ta}{s}$$

En el caso en que $s = 0$, al evaluar $k = 0$y $k = 1$ obtenemos que la recta tiene dos puntos distintos con la misma coordenada $x = a$. Por lo tanto, la recta es vertical y su ecuación vertical está dada por $x = a$como se muestra en la siguiente figura:



VENTAJAS Y LIMITACIONES

En matemáticas es usual encontrar distintas formas de representar un mismo objeto. Por ejemplo, es posible definir una recta en el plano mediante su ecuación vectorial o bien, mediante su ecuación cartesiana. Cada una de estas formas de representación tiene sus ventajas y limitaciones:

- La ecuación $y = mx + n$ tiene la ventaja de que permite fácilmente identificar la pendiente y el coeficiente de posición, a diferencia de la ecuación vectorial, en la cual estos valores no se pueden obtener de forma inmediata.
- Existen infinitas maneras de describir una recta en su forma vectorial, puesto que hay infinitos vectores directores y puntos que pasan por la recta. En cambio, hay una única manera de escribir una recta en su forma cartesiana, puesto que la pendiente y el coeficiente de posición son únicos.

SÍNTESIS

- La ecuación vectorial de una recta L está dada por $L : \langle x, y\rangle = \langle a, b\rangle + t\langle c, d\rangle$.
  - El vector $\langle a, b\rangle$ se llama vector posición de la recta.
  - El vector $\langle c, d\rangle$ se llama vector director de la recta.

- Todo punto de la recta L se puede obtener trasladando el punto P a partir de un vector paralelo a $\langle c, d\rangle$

- Para determinar si un punto (x, y) está en la recta, debemos encontrar t tal que $L : \langle x, y\rangle = \langle a, b\rangle + t\langle c, d\rangle$.
  - Si no existe tal valor de t, el punto no pertenece a la recta.

- En la ecuación vectorial $L : \langle x, y\rangle = \langle a, b\rangle + t\langle c, d\rangle$, podemos cambiar $\langle c, d\rangle$ por cualquier vector paralelo a él y la recta es la misma.

- Dada una recta $L : \langle x, y\rangle = \vec{P} + t\vec{d}$, y un punto $\vec{P'}$ en L, la ecuación vectorial $\langle x, y\rangle = \vec{P'} + k\vec{d}$ representa la misma recta L.
  - Es decir, en la ecuación vectorial de L, podemos usar cualquier punto de la recta para indicar el vector posición.

- Si un punto Q no está en la recta L, la recta $L' : \langle x, y\rangle = \vec{Q} + s\vec{d}$ es una recta paralela a L. Las rectas L y L' no se intersectan.

Curso: Geometría 3D.
Unidad 1 : Representación vectorial de situaciones y fenómenos.
Tema: Ecuación vectorial de la recta.
Contenido: Ecuación vectorial de la recta.

- Dados dos puntos distintos A y B, una de las maneras de escribir la ecuación vectorial de la recta que pasa por ellos es $L : \vec{A} + t\vec{AB}$.

- Si conocemos la ecuación vectorial de una recta, podemos encontrar su ecuación cartesiana, y viceversa.

- En la ecuación cartesiana de la recta, la pendiente nos da información de cuán inclinada con respecto al eje X es esta. Por ejemplo, si las pendientes son positivas, a mayor pendiente, mayor es la inclinación de la recta.

- Dada una recta cuyo vector director es $\langle d_1, d_2 \rangle \ \text{ con } \ d_1 \neq 0$, la pendiente de esa recta tiene el valor
$$m = \frac{d_2}{d_1}$$

- Si una recta es vertical, su ecuación cartesiana está dada por la expresión $x = a$, en donde a es el valor en el que la recta corta al eje horizontal.

- Hay una única manera de escribir la ecuación cartesiana de una recta.

- Hay varias maneras de escribir la ecuación vectorial de una recta.