Aula360
Aprendizaje para el siglo XXI

Apuntes Unidad 1

Suma y Resta de vectores

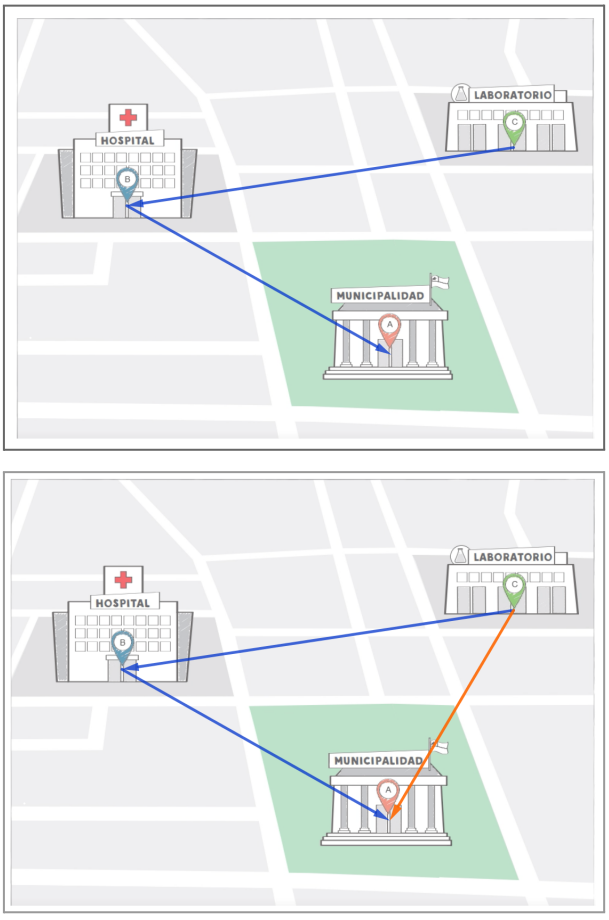
fcfm
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

CMM
Centro de Modelamiento Matemático

Curso: Geometría 3D
Unidad 1 : Representación vectorial de situaciones y fenómenos
Tema: Vectores en el plano.
Contenido: Suma y Resta de vectores.

SUMA DE VECTORES COMO IGUALDAD DE DESPLAZAMIENTOS

Supongamos que un dron, para ir desde el laboratorio (C) a la municipalidad (A), pasando por el hospital (B) (como se muestra en la imagen), debe realizar dos desplazamientos sucesivos: ir desde el laboratorio hacia el hospital y luego ir desde el hospital hacia la municipalidad. Realizar estos dos desplazamientos, uno luego del otro, resulta simplemente en el desplazamiento: ir desde el laboratorio hacia a la municipalidad directamente.



Si se toma el punto A como referencia del municipalidad, el punto B como referencia del hospital, y el punto C como referencia del laboratorio, escribimos

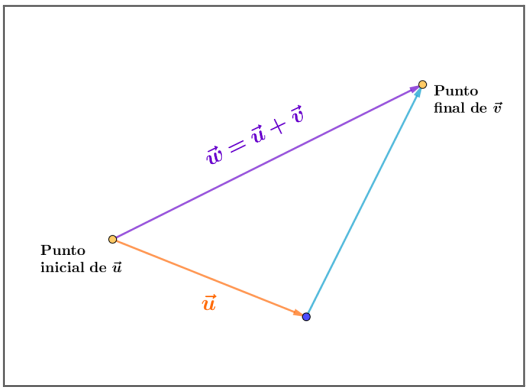
$$\vec{CB} = \vec{BA} + \vec{CA}$$

para expresar que realizar sucesivamente los desplazamientos $\vec{CB}$ y $\vec{BA}$ es igual a realizar el desplazamiento $\vec{CA}$.

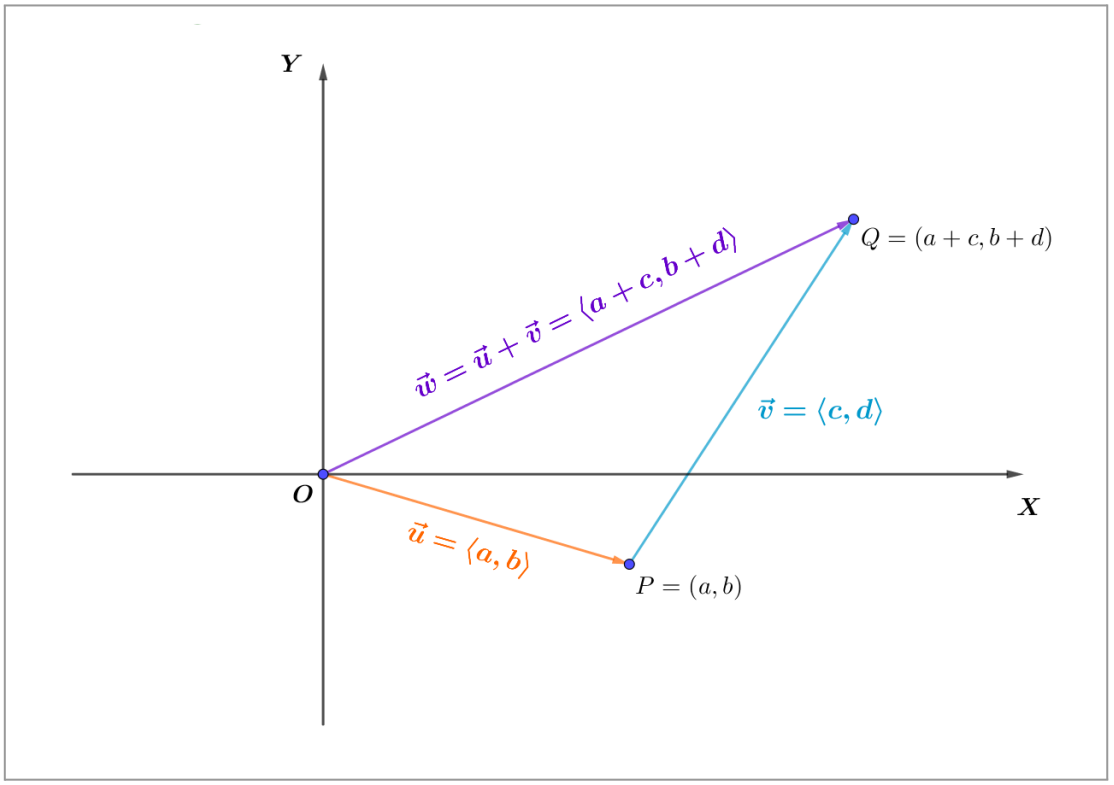
Curso: Geometría 3D
Unidad 1 : Representación vectorial de situaciones y fenómenos
Tema: Vectores en el plano.
Contenido: Suma y Resta de vectores.

SUMA DE VECTORES

La suma de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el vector $\vec{w}$, que corresponde a realizar una traslación según $\vec{u}$, seguida de una traslación según el vector $\vec{v}$. Este vector se escribe $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.



Algebraicamente la suma de vectores corresponde a sumar coordenada a coordenada.



Curso: Geometría 3D
Unidad 1 : Representación vectorial de situaciones y fenómenos
Tema: Vectores en el plano.
Contenido: Suma y Resta de vectores.

ASOCIATIVIDAD Y CONMUTATIVIDAD DE LA SUMA DE VECTORES

Debido a que la suma de vectores consiste en sumar coordenada a coordenada, podemos deducir las siguientes propiedades:

- Conmutatividad. Para todo par de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se cumple que $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- Asociatividad. Para todos los vectores $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$, se cumple que $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$

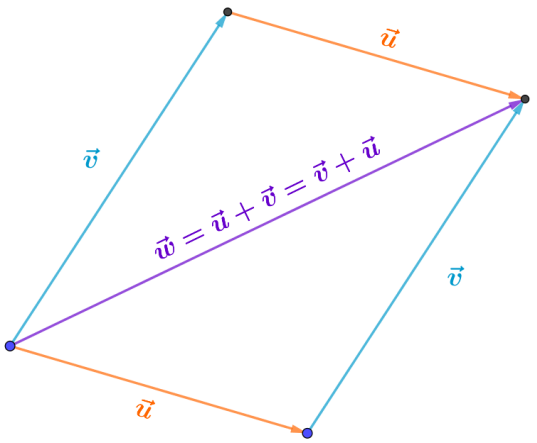
Notemos que como la suma se definió para sumar dos vectores a la vez, si uno quisiera sumar tres, por ejemplo $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$, es necesario agrupar de manera tal que siempre se estén sumando dos vectores. Para esto hay dos maneras:

- $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$
- $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

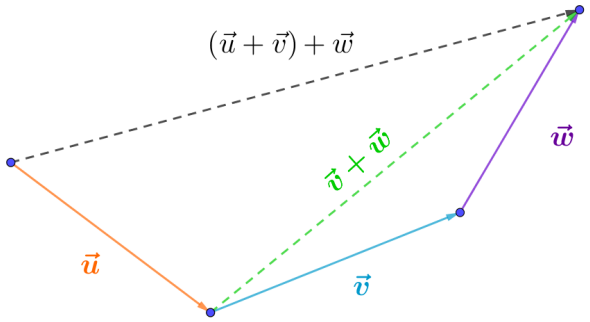
Gracias a la asociatividad estas dos expresiones son iguales, por lo que usualmente no se escriben los paréntesis, puesto que son irrelevantes. Es decir $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ se escribe simplemente como $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.

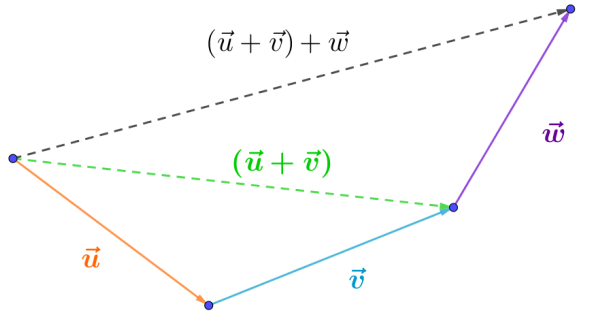
Estas propiedades pueden visualizarse fácilmente de forma gráfica:

- La conmutatividad se puede observar al trazar el paralelogramo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:



- La asociatividad se puede observar al representar gráficamente la suma de tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en distinto orden:





VECTOR CERO

Definimos el vector cero, que denotaremos por $\vec{0}$, como el vector corresponde a una traslación nula, es decir, a aquella que deja fijo cualquier punto del plano.

Este vector es un neutro para la suma de vectores, es decir,

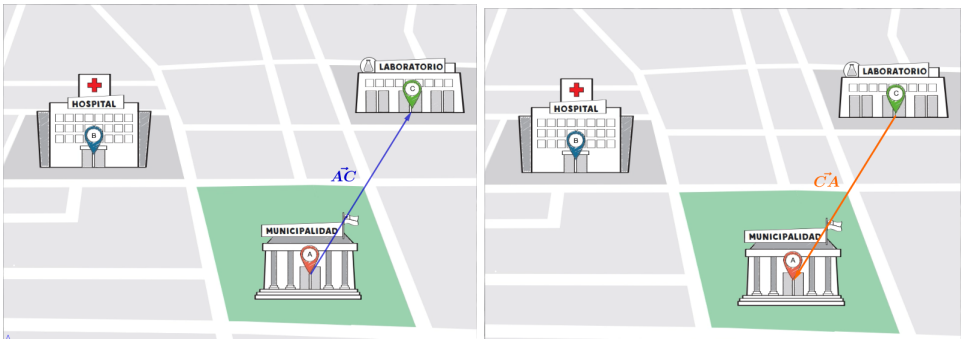
$$\vec{v}+\vec{0}=\vec{v} \text{ para todo vector } \vec{v}.$$

Este neutro aditivo se conoce como vector cero o vector nulo, y se cumple que $\vec{0}=\langle 0,0\rangle$. Como el vector cero no mueve puntos, no le podemos asociar una dirección o sentido determinados. Este es el único vector que no tiene estos atributos.

Curso: Geometría 3D
Unidad 1 : Representación vectorial de situaciones y fenómenos
Tema: Vectores en el plano.
Contenido: Suma y Resta de vectores.

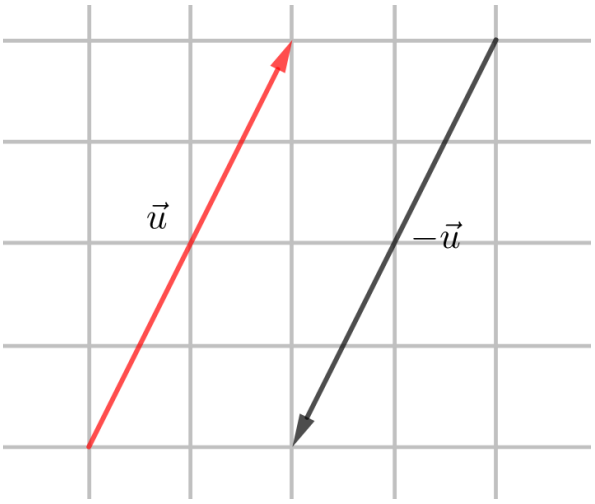
INVERSO ADITIVO DE UN VECTOR

En las siguientes imágenes, se puede observar que dado el vector $\vec{AC}$ es posible definir el vector $\vec{CA}$ que tiene igual dirección y magnitud pero distinto sentido que el vector $\vec{AC}$.



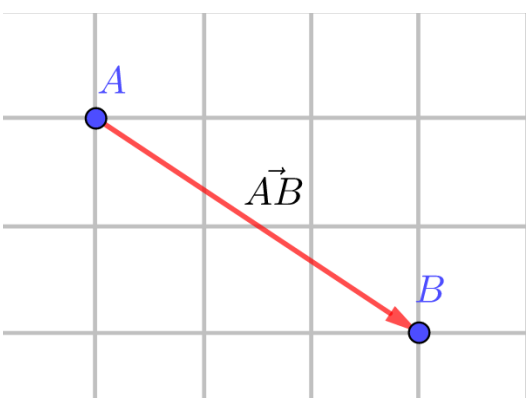
De esta forma, el vector $\vec{AC} + \vec{CA}$ que representa el desplazamiento de A hasta C y luego de C hasta A corresponde a un desplazamiento nulo. Así, decimos que el vector $\vec{CA}$ es el *inverso aditivo* del vector $\vec{AC}$.

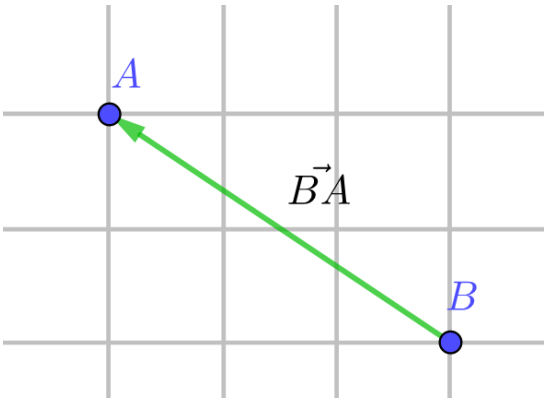
Dado un vector $\vec{u}$, su inverso aditivo es el vector $\vec{v}$ tal que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$. Geométricamente, $\vec{v}$ es el único vector que conserva la magnitud y la dirección de $\vec{u}$, pero que apunta en sentido contrario. La igualdad $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ motiva a escribir $\vec{v} = -\vec{u}$



Curso: Geometría 3D
Unidad 1 : Representación vectorial de situaciones y fenómenos
Tema: Vectores en el plano.
Contenido: Suma y Resta de vectores.

Notemos que si $\vec{v}$ es el inverso de $\vec{u} = \vec{AB}$, entonces $\vec{v} = \vec{BA}$.





En términos algebraicos, si $\vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$, entonces el vector -$\vec{u}$ será un vector tal que $\vec{u}$ + -$\vec{u}$ = 0. Por lo tanto, se tendrá que

$$-\vec{u} = \langle -u_1, -u_2 \rangle$$

Coloquialmente hablando, si $\vec{u}$ es "ir", $-\vec{u}$ representa “volver”.

RESTA DE VECTORES

La resta de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se define como $\vec{u} + -\vec{v}$, es decir, la suma de $\vec{u}$ con el inverso aditivo de $\vec{v}$. El vector resta $\vec{u} - \vec{v}$ corresponde al único vector $\vec{x}$ tal que $\vec{v} + \vec{x} = \vec{u}$.

Algebraicamente, si

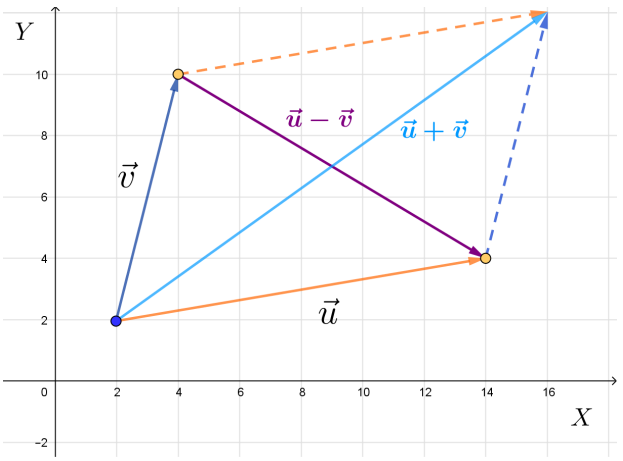
$$\vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle \ y \ \vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$$

se tiene que:

$$\vec{u} - \vec{v} = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2 \rangle$$

Es decir, la resta de vectores corresponde a restar coordenada a coordenada. El vector resta $\vec{u} - \vec{v}$ se puede representar como una de las diagonales del paralelogramo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Curso: Geometría 3D
Unidad 1 : Representación vectorial de situaciones y fenómenos
Tema: Vectores en el plano.
Contenido: Suma y Resta de vectores.



RESUMEN DE LAS PROPIEDADES DE LA SUMA DE VECTORES

A continuación, se resumen las propiedades de la suma de vectores:

Conmutatividad	$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ para cualquier par de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$..
Asociatividad	$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ para cualquier tripleta de vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.
Elemento neutro	Existe un único vector $\vec{v}$ tal que $\vec{u}$ + $\vec{v}$= $\vec{v}$ para todo vector $\vec{u}$. A este vector lo denotaremos por $\vec{0}$.
Existencia de inverso	Para todo vector $\vec{u}$, existe un único vector $\vec{v}$ tal que $\vec{u}+(\vec{v})=0$. El vector $\vec{v}$ lo escribimos como $-\vec{u}$.

Curso: Geometría 3D
Unidad 1 : Representación vectorial de situaciones y fenómenos
Tema: Vectores en el plano.
Contenido: Suma y Resta de vectores.

SÍNTESIS

- La suma de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el vector $\vec{w}$, que corresponde a realizar una traslación según $\vec{u}$, seguida de una traslación según el vector $\vec{v}$
- Geométricamente, el vector suma se construye ubicando el punto inicial de un vector en el punto final del otro.
- Algebraicamente, la suma de vectores corresponde a sumar coordenada a coordenada.
- La suma de vectores es conmutativa, es decir, el orden en el que sumamos los vectores no altera el resultado.
- La suma de vectores es asociativa, es decir, los paréntesis son irrelevantes.
- El vector $\vec{0} = \langle 0, 0 \rangle$ es el neutro para la suma, es decir el vector $\vec{0}$ conserva las coordenadas de cualquier vector $\vec{u}$ con el cual se sume.
- El inverso de un vector $\vec{u}$ es el vector $\vec{v}$ tal que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$.
- El inverso de $\vec{u}$ se escribe $-\vec{u}$.
- Geométricamente, $-\vec{u}$ es el vector que tiene la misma magnitud y dirección que $\vec{u}$, y que apunta en sentido contrario.
- Algebraicamente, si $\vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$, se tiene que $-\vec{u} = \langle -u_1, -u_2 \rangle$
- La resta de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el vector $\vec{u} + (-\vec{v})$ y se anota $\vec{u} - \vec{v}$.
- Algebraicamente, si $\vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle \; y \; \vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ se tiene que $\vec{u} - \vec{v} = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2 \rangle$