

Apuntes Unidad 1

Conceptos básicos de vectores

Curso: Geometría 3D

Unidad 1 : Representación vectorial de situaciones y fenómenos

Tema: Vectores en el plano.

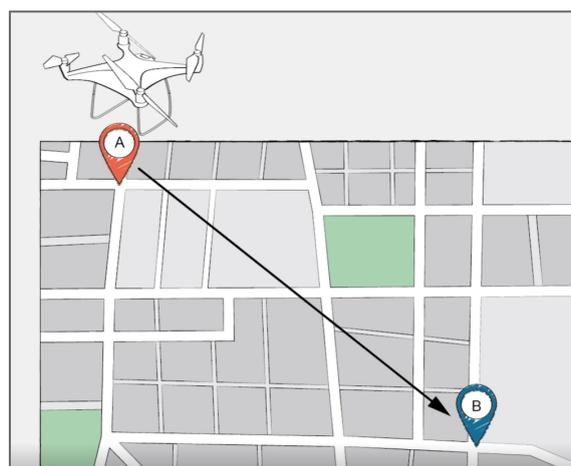
Contenido: Conceptos básicos de vectores.

DESCRIBIENDO DESPLAZAMIENTOS EN EL PLANO

Los vectores son objetos matemáticos que nos permiten describir desplazamientos. Por ejemplo, para expresar correctamente un desplazamiento de una persona por una calle es necesario describir **la dirección** (la calle por la que se desplaza), **el sentido** (hacia donde se desplaza en esa calle) y **su magnitud** (cuántas cuadras debe caminar en la dirección y sentido dados). Todas estas características del desplazamiento se pueden representar usando una flecha, como se muestra a continuación:



Similarmente, para representar el desplazamiento de un dron que viaja desde un punto A hasta el punto B, también se utiliza una flecha:



Notemos que en ambos casos, existe **una única flecha** que representa el desplazamiento entre los dos puntos considerados.

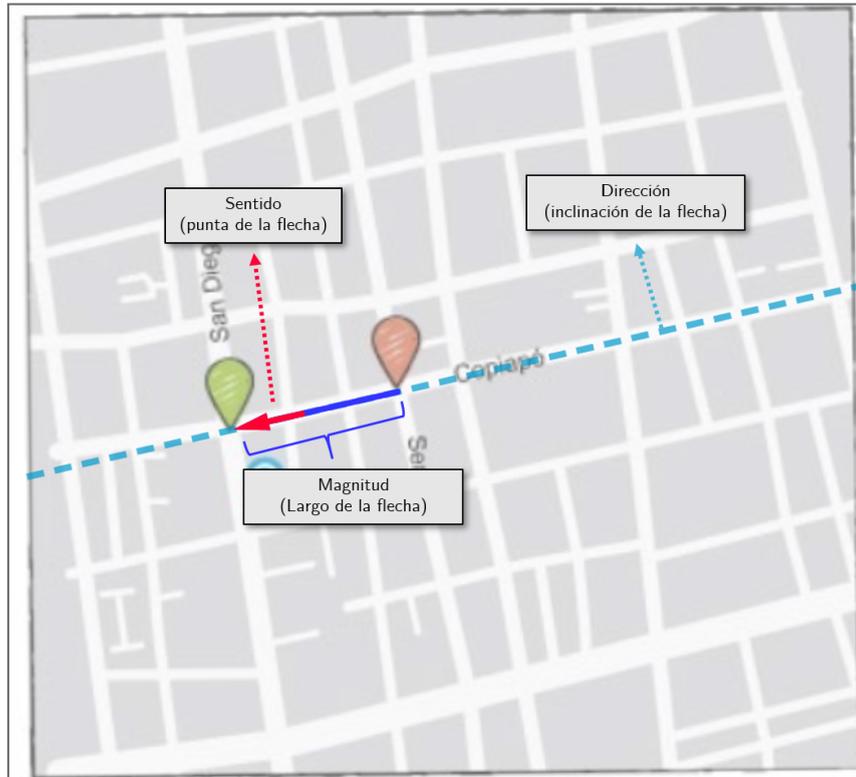
Curso: Geometría 3D

Unidad 1 : Representación vectorial de situaciones y fenómenos

Tema: Vectores en el plano.

Contenido: Conceptos básicos de vectores.

Los vectores son objetos matemáticos que se usan para representar desplazamientos, por lo que se necesita una magnitud, dirección y sentido para definirlos. Por esta razón, ocuparemos flechas para representarlos, puesto que estas incluyen toda esa información:



LOS VECTORES DESCRIBEN TRASLACIONES DE PUNTOS

Un vector \vec{u} describe la traslación desde el punto A al punto B si tiene:

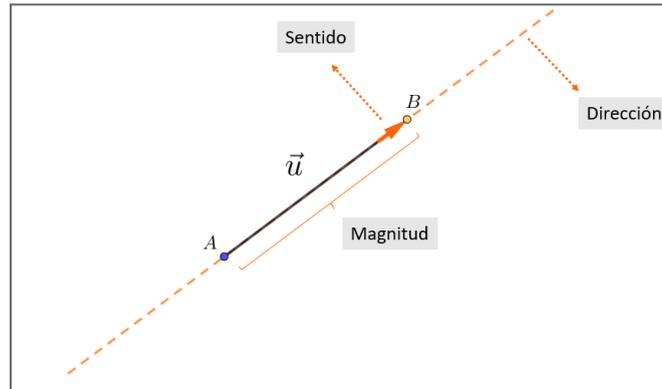
- una magnitud igual a la distancia entre A y B,
- una dirección dada por la recta que pasa por A y B,
- un sentido de A hacia B.

Curso: Geometría 3D

Unidad 1 : Representación vectorial de situaciones y fenómenos

Tema: Vectores en el plano.

Contenido: Conceptos básicos de vectores.



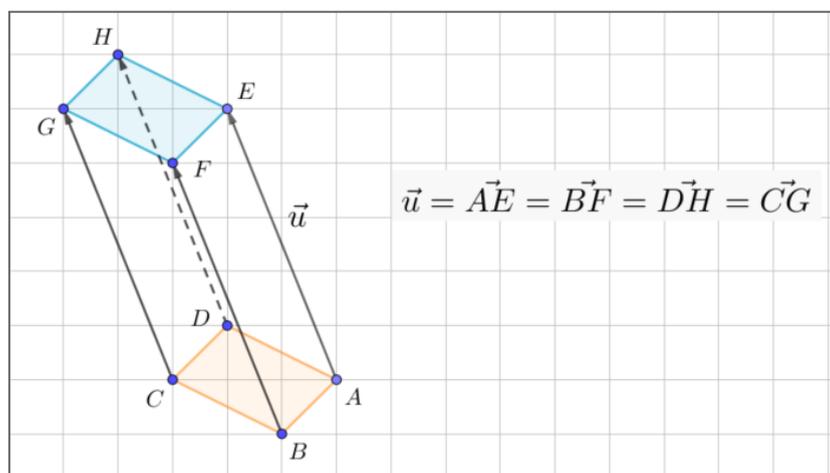
Dos vectores son iguales si estos representan **la misma traslación**, es decir, si ambos tienen igual dirección, magnitud y sentido.

DEFINICIÓN DE UN VECTOR

Un vector es un objeto matemático que permite describir una traslación en el plano. Un vector se caracteriza por su magnitud, dirección y sentido.

Si el vector \vec{u} traslada el punto A al punto E , decimos que $\vec{u} = \vec{AE}$ y se simboliza gráficamente como una flecha que va desde A a E . Un vector permite trasladar cualquier punto del plano, por lo que decimos que él no tiene una posición definida y que por tanto no depende del punto donde se aplica.

Por ejemplo, en este caso en donde un paralelogramo $ABCD$ se ha trasladado de acuerdo al vector \vec{u} , este puede escribirse de diferentes maneras:



Curso: Geometría 3D

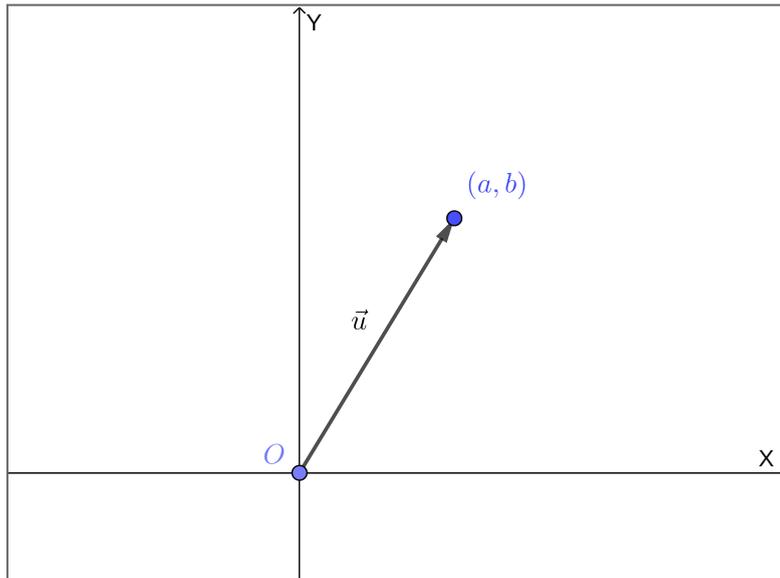
Unidad 1 : Representación vectorial de situaciones y fenómenos

Tema: Vectores en el plano.

Contenido: Conceptos básicos de vectores.

REPRESENTACIÓN CARTESIANA DE UN VECTOR

Al usar un sistema de coordenadas cartesianas, un vector \vec{u} puede describirse por las coordenadas que tiene el punto final cuando el origen O se traslada a partir del vector \vec{u} . Denotaremos, $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ al vector que corresponde a la traslación del punto inicial $(0, 0)$ al punto final (a, b) .



Las coordenadas de un vector \vec{u} definen su magnitud, dirección y sentido de la siguiente manera:

- La magnitud de $\vec{u} = \langle a, b \rangle$, que denotaremos por $|\vec{u}|$ es $\sqrt{a^2 + b^2}$.
- La dirección viene dada por la recta que pasa por el origen y por (a, b) .
- El sentido viene dado por la semirecta que apunta de O hacia (a, b) .

Como sabemos, dos vectores \vec{u} y \vec{v} son iguales si y sólo si representan la misma traslación. Si el vector \vec{u} traslada el origen a un punto $P(a, b)$ y un vector \vec{v} igual al vector \vec{u} traslada el origen O a un punto $Q(c, d)$, entonces $a = c$ y $b = d$.

Curso: Geometría 3D

Unidad 1 : Representación vectorial de situaciones y fenómenos

Tema: Vectores en el plano.

Contenido: Conceptos básicos de vectores.

NOTACIÓN DE UN VECTOR

Como hemos visto,

$$\vec{u} = \langle a, b \rangle$$

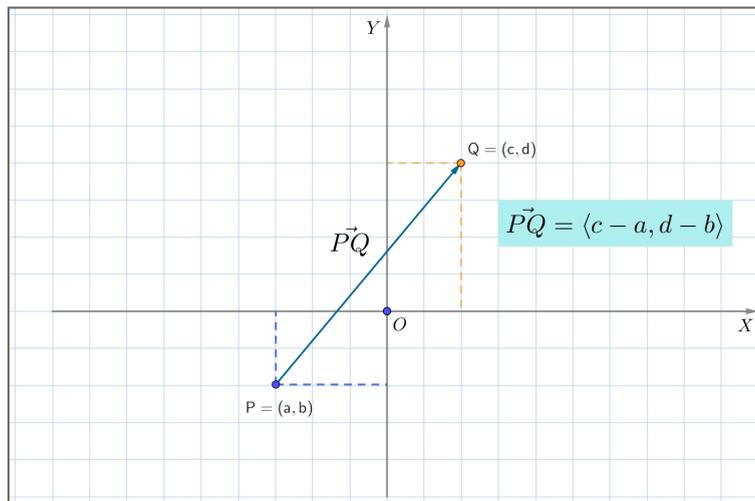
denota el vector que traslada el origen al punto final (a, b) . Sin embargo, es común encontrar en la literatura y en programas computacionales como GeoGebra la siguiente notación:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

para denotar al vector \vec{u} . A lo largo del curso usaremos ambas notaciones.

VECTOR A PARTIR DE LAS COORDENADAS SUS PUNTOS INICIAL Y FINAL

Si $P = (a, b)$, y $Q = (c, d)$, el vector \vec{PQ} es el vector $\langle c - a, d - b \rangle$.



Lo anterior se puede interpretar geométicamente como:

- El vector \vec{PQ} es aquel que traslada el origen a las coordenadas $(c - a)$ y $(d - b)$.
- El vector \vec{PQ} corresponde a trasladar cualquier punto $(c - a)$ unidades en el eje X y $(d - b)$ unidades en el eje Y.

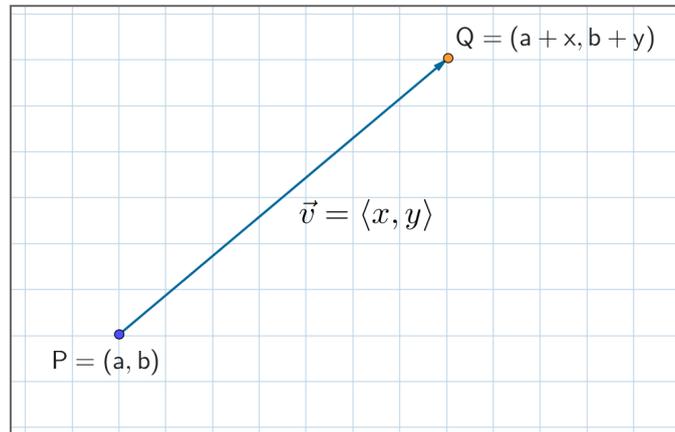
Curso: Geometría 3D

Unidad 1 : Representación vectorial de situaciones y fenómenos

Tema: Vectores en el plano.

Contenido: Conceptos básicos de vectores.

Notemos que si tenemos un vector $\vec{v} = \langle x, y \rangle$ y un punto $P = (a, b)$, el resultado de la traslación de P por \vec{v} es el punto Q de coordenadas $\langle x + a, y + b \rangle$, como se observa en la siguiente imagen:



SÍNTESIS

- Un vector queda definido al indicar su magnitud, dirección y sentido y se representa gráficamente mediante una flecha.
- Las traslaciones de puntos en el plano se describen usando vectores.
- Al trasladar una figura a partir de un vector su forma, tamaño y orientación no cambian.
- Un vector que traslada un punto inicial A a un punto final B se denota \vec{AB}
- Si el vector \vec{AB} traslada el punto C al punto D, entonces el vector \vec{CD} es igual a \vec{AB} .
- Hay infinitas flechas que representan a un mismo vector. Basta que tengan la misma dirección, magnitud y sentido.

Curso: Geometría 3D

Unidad 1 : Representación vectorial de situaciones y fenómenos

Tema: Vectores en el plano.

Contenido: Conceptos básicos de vectores.

- Para determinar las coordenadas de un vector \vec{u} , se ubica el vector en el origen y se escriben las coordenadas del punto final (a, b) de la forma $\vec{u} = \langle a, b \rangle$.
 - Por ejemplo, decir que $\vec{u} = \langle 2, -2 \rangle$, quiere decir que al trasladar el origen por el vector \vec{u} , obtenemos el punto $(2, -2)$. Esta forma de representar un vector nos permite hacer cálculos usando el álgebra.
- Dos vectores son iguales cuando sus coordenadas son iguales.
- La magnitud de un vector $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ se calcula como $\sqrt{a^2 + b^2}$ y la denotamos como $|\vec{u}|$.
- Deducimos que si $P(a, b)$ y $Q(c, d)$, entonces el vector que representa la traslación de P a Q es $\vec{PQ} = \langle c - a, d - b \rangle$.
- Si un punto $P(a, b)$ se traslada mediante el vector $\vec{u} = \langle x, y \rangle$ se obtiene el punto Q de coordenadas $(x + a, y + b)$.