SUMA Y SIGUE

MATEMÁTICA EN LÍNEA

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

fcfm
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

CMM
Centro de Modelamiento Matemático

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

MATERIAL PEDAGÓGICO
COMPLEMENTARIO

FICHAS TALLER 5:
COMPARACIÓN Y DENSIDAD DE LAS FRACCIONES

INTRODUCCIÓN

En este taller se abordaron distintas estrategias para comparar fracciones. Algunos modelos de representación de fracciones permiten hacer comparaciones que no requieren cálculos. Se estudiaron estrategias que se pueden aplicar a ciertos tipos particulares de fracciones, y también reglas de carácter general, todas ellas justificadas por medio de interpretaciones de la fracción y modelos de representación. También se extendió la definición del orden de los naturales a las fracciones y se trabajó con la propiedad de densidad de las fracciones.

Los temas abordados en las fichas son los siguientes:

- Comparar fracciones a través de sus representaciones
- Extensión del orden de los naturales a las fracciones
- Procedimientos particulares para comparar dos fracciones
- Regla general para comparar dos fracciones
- Aplicando transitividad para comparar fracciones
- Densidad de las fracciones
- Fracciones unitarias

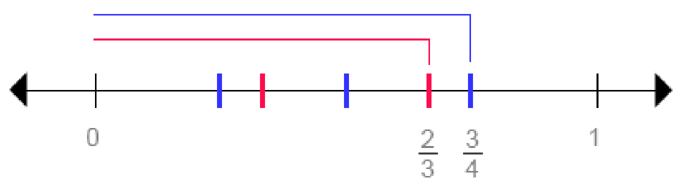
TALLER 5: COMPARACIÓN Y DENSIDAD DE LAS FRACCIONES

1. Comparar fracciones a través de sus representaciones

Algunos modelos de representación de fracciones permiten comparar fracciones sin recurrir a cálculos. Su uso contribuye a justificar muchas de las estrategias para comparar fracciones que comúnmente se utilizan.

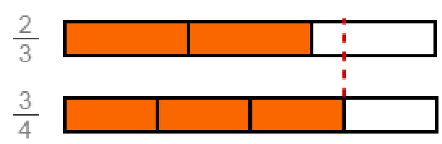
Podemos, por ejemplo, comparar dos fracciones ubicándolas en la recta numérica, de manera que su referente común sea la unidad definida en la recta. Así, una fracción es **menor** que otra fracción si se encuentra más a la izquierda en la recta numérica. Esto ocurre porque el segmento desde el 0 a la primera fracción tiene menor longitud que el segmento desde el 0 a la segunda fracción:

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$$



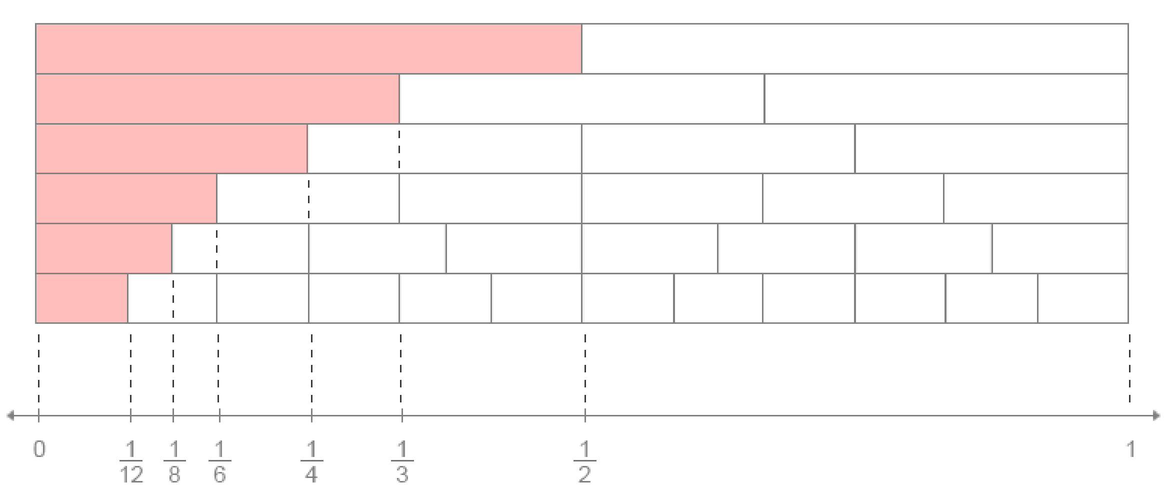
También es posible usar diagramas de barras para comparar fracciones. En este caso, las barras deben tener la misma longitud y se compara solo las partes:

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$$



Comentarios

El modelo lineal de representación de fracciones permite mostrar que al aumentar el denominador de una fracción, manteniendo fijo el numerador, la fracción que se obtiene está más a la izquierda en la recta numérica y, por lo tanto, es menor que la primera fracción.

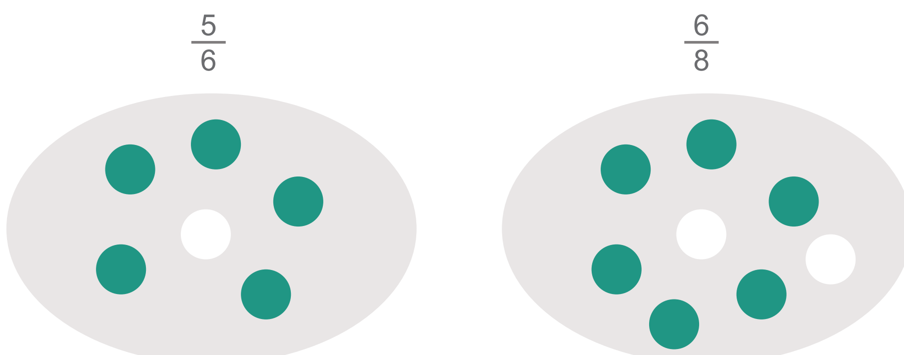


$$0 < \frac{1}{12} < \frac{1}{8} < \frac{1}{6} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$$

Lo anterior permite justificar que al comparar fracciones de igual numerador basta comparar sus denominadores; la fracción con mayor denominador es la menor fracción.

Aunque los modelos de representaciones de fracciones son útiles para apoyar la comprensión de las relaciones matemáticas, es importante reconocer sus limitaciones. En el caso de la comparación de fracciones, el modelo de conjunto, en algunas ocasiones, puede inducir a interpretaciones erróneas.

Por ejemplo, al mirar dos conjuntos, que representan a las fracciones $\frac{5}{6}$ y $\frac{6}{8}$, algunos estudiantes podrían inferir erróneamente que $\frac{5}{6} < \frac{6}{8}$, señalando que en el primer conjunto se pintaron menos elementos que en el segundo:



Ubicación: Módulo 2

Taller: Comparación y densidad de las fracciones
Actividad 1: La muralla fraccionada
Actividad 2: Comparando distintos diseños

2. Extensión del orden de los naturales a las fracciones

Aunque las representación son útiles para comparar fracciones, la definición de orden en las fracciones no puede estar sujeta a una representación. Tratar de definir, por ejemplo, que una fracción es menor que otra si se encuentra más a la izquierda en la recta numérica, pierde sentido si cambia la manera en que típicamente se dibuja la recta.

Para definir matemáticamente el orden en las fracciones se opera extendiendo la definición de orden en los naturales a las fracciones.

En los números naturales se dice que $a < b$ si existe un número natural c tal que $a + c = b$. Por ejemplo, por definición $2 < 5$, ya que existe 3 tal que $2 + 3 = 5$.

La extensión de la definición de orden a las fracciones implica que una fracción es menor que otra si existe una tercera fracción que sumada con la primera sea igual a la segunda.

Por ejemplo, $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ porque existe la fracción $\frac{1}{4}$ tal que $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Comentarios

Es importante entender que, en matemática, las definiciones formales se caracterizan por su abstracción. Aunque pueda ser recomendable que un profesor las maneje, lo que importa a nivel escolar es desarrollar la comprensión de las ideas que subyacen a dichas definiciones, para lo cual el trabajo con representaciones gráficas y concretas es fundamental.

Ubicación: Módulo 2

Taller: Comparación y densidad de las fracciones
Actividad 1: La muralla fraccionada
Actividad 2: Comparando distintos diseños

TALLER 5: COMPARACIÓN Y DENSIDAD DE LAS FRACCIONES

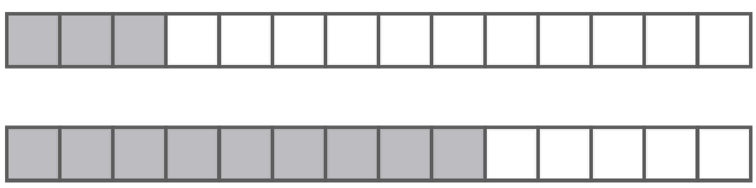
3. Procedimientos particulares para comparar fracciones

Para comparar fracciones se pueden aplicar diferentes procedimientos, que dependen de las características de las fracciones involucradas. La justificación de estos procedimientos se apoya en determinadas interpretaciones de las fracciones y en los modelos de representación.

1. **Fracciones de igual denominador**: basta comparar sus numeradores. La fracción menor es la que tiene el menor numerador. Por ejemplo:

$$\frac{3}{14} < \frac{9}{14}$$

En efecto, usando la interpretación parte-todo, comparar estas dos fracciones es equivalente a tener un todo que se ha dividido en 14 partes iguales y comparar las 3 partes que representan la primera fracción con las 9 que representan la segunda.



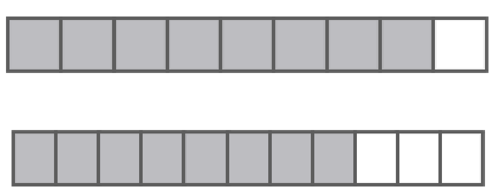
$\frac{3}{14}$

$\frac{9}{14}$

2. **Fracciones de igual numerador**: basta comparar sus denominadores. La fracción menor es la que tiene el mayor denominador. Por ejemplo:

$$\frac{8}{9} > \frac{8}{11}$$

Interpretando de nuevo las fracciones como parte de un todo, si se toma la misma cantidad de partes, estas son más grandes cuando el denominador es menor.



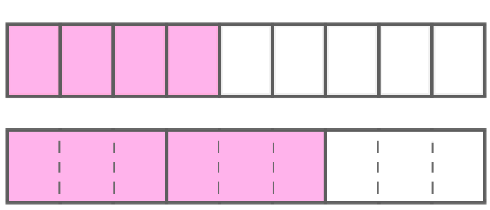
$\frac{8}{9}$

$\frac{8}{11}$

3. **Fracciones en que un denominador es múltiplo del otro**: basta amplificar una de las fracciones para igualar los denominadores. Luego, será menor la fracción que tenga menor numerador. Por ejemplo:

$$\frac{4}{9} < \frac{2}{3}$$

En efecto, al amplificar por 3 la segunda fracción se tiene que las fracciones a comparar son $\frac{4}{9}$ y $\frac{6}{9}$, fracciones de igual denominador, por lo que $\frac{4}{9} < \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.



$\frac{4}{9}$

$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$

Comentarios

Siempre es posible amplificar o simplificar las fracciones para obtener fracciones iguales que tengan el mismo numerador o el mismo denominador, y así aplicar alguno de los procedimientos descritos anteriormente.

Para comparar fracciones impropias, puede ser útil transformarlas a números mixtos y considerar lo siguiente:

- Si la parte entera de la primera fracción es menor que la otra parte entera, mixtos y considerar mixto es menor que el otro.
- Si las partes enteras son iguales, entonces es menor el número mixto que tiene la menor parte fraccionaria.

Ubicación: Módulo 2

Taller: Comparación y densidad de las fracciones
Actividad 1: La muralla fraccionada
Actividad 2: Comparando distintos diseños

TALLER 5: COMPARACIÓN Y DENSIDAD DE LAS FRACCIONES

4. Regla general para comparar fracciones

Consideremos dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ con distintos numeradores y distintos denominadores, para las cuales los procedimientos anteriores no se pueden aplicar directamente.

Si se amplifica cada una de estas fracciones por el denominador de la otra se tiene que

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ es lo mismo que } \frac{a \cdot d}{b \cdot d} < \frac{b \cdot c}{b \cdot d}$$

Como los denominadores de las fracciones amplificadas son iguales, basta comparar sus numeradores, de lo que se concluye que:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \textit{ si y solo si } a \cdot d < b \cdot c$$

Por ejemplo, al aplicar esta regla se puede establecer que $\frac{6}{8} < \frac{5}{6}$, ya que $6 \cdot 6 < 5 \cdot 8$.

Comentarios

Lo relevante de esta regla es entender que es consecuencia directa de una forma particular de amplificar las fracciones para igualar sus denominadores.

Ubicación: Módulo 2

Taller: Comparación y densidad de las fracciones
Actividad 2: Comparando distintos diseños
Actividad 3: Ordenando fracciones

TALLER 5: COMPARACIÓN Y DENSIDAD DE LAS FRACCIONES

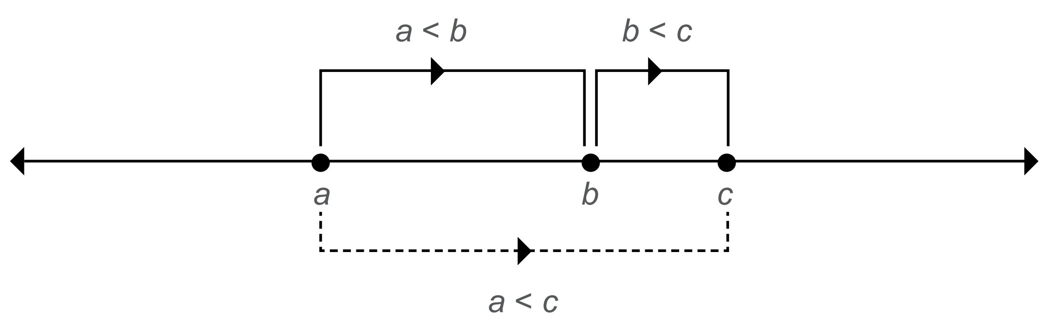
5. Aplicar transitividad para comparar fracciones

Para comparar dos fracciones a veces resulta conveniente utilizar una tercera fracción que esté entre ellas, y que pueda ser fácilmente comparada con cada una de las fracciones y aplicando la propiedad transitiva del orden de los números, establecer una comparación indirecta entre ellas.

La propiedad **transitiva** del orden de los números indica que, para todos los números a, b, c, se tiene que:

si $a < b$ y $b < c$, entonces se cumple que $a < c$

Esta propiedad se ilustra claramente al representar los números a, b y c como puntos en la recta numérica:



Ejemplo:

Para comparar $\frac{7}{5}$ con $\frac{8}{3}$, podemos aprovechar los procedimientos para comparar fracciones de igual denominador y de igual numerador, seleccionando convenientemente la fracción $\frac{8}{5}$, de forma que:

$$\frac{7}{5} < \frac{8}{5} < \frac{8}{3}$$

La transitividad permite afirmar que $\frac{7}{5} < \frac{8}{3}$.

Comentarios

La propiedad de densidad de las fracciones asegura la posibilidad de comparar fracciones usando una tercera fracción entre ellas para aplicar la transitividad.

Dados dos números a y b, se tiene que $a < b$, $a = b$, o bien $a > b$. Esto se debe a que en la recta numérica dos números se ubican en el mismo punto, o bien alguno queda a la izquierda del otro. Si se quiere ordenar una lista de fracciones es importante:

- Examinarlas para decidir con cuáles conviene comenzar la comparación y elegir la estrategia más apropiada.
- Considerar que no siempre es la mejor estrategia buscar el denominador común entre todas ellas. Más aún, el uso de estrategias que combinan propiedades refuerza la comprensión del significado propio de las fracciones.

Ubicación: Módulo 2

Taller: Comparación y densidad de las fracciones
Actividad 3: Ordenando fracciones

6. Densidad de las fracciones

La propiedad de **densidad del conjunto de las fracciones** asegura que entre cualquier par de fracciones siempre se puede encontrar una tercera.

Esta propiedad se basa en la idea de que dadas dos fracciones en la recta numérica, siempre se puede dividir el segmento comprendido entre ellas en partes iguales determinando otras fracciones.

Una manera de encontrar una fracción entre dos dadas consiste en amplificar ambas fracciones **lo suficiente** para obtener fracciones de igual denominador, tales que sea posible escoger una fracción con el mismo denominador y cuyo numerador esté entre los numeradores de las fracciones amplificadas.

Por ejemplo:

Para intercalar una fracción entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ basta amplificar la primera por 4 y la segunda por 6 para obtener $\frac{4}{12}$ y $\frac{6}{12}$. De esa manera, reconocemos que es posible intercalar la fracción $\frac{5}{12}$ entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Comentarios

La propiedad de densidad es más general. De hecho, se tiene que entre dos puntos distintos de la recta númerica, sean o no fracciones, existen infinitas fracciones.

Para entender que no todos los puntos de la recta son fracciones es necesario recordar que toda fracción surge de un segmento que divide a la unidad en partes iguales, sin embargo, no todo segmento entre 0 y un punto dado en la recta se obtiene de una división de la unidad en partes iguales. La demostración de aquello está fuera del alcance de este curso.

De lo anterior se desprende un hecho interesante, que contradice la intuición. Dado que las fracciones son densas en la recta numérica, siempre es posible encontrar una fracción tan cerca como se quiera de otra. Sin embargo, dado que no todos los puntos son fracciones, estas no completan la recta numérica, es decir, el conjunto de las fracciones deja vacíos o huecos en ella.

Ubicación: Módulo 2

Taller: Comparación y densidad de las fracciones
Actividad 4: Fracciones entrometidas

7. Fracciones unitarias

Las fracciones de la forma $\frac{1}{n}$ se conocen como **fracciones unitarias** y tienen un rol relevante en la idea de fracción como parte de un todo.

Si la unidad de referencia o todo se divide en n partes iguales, la fracción $\frac{1}{n}$ representa cada una de esas partes. Extendiendo a las fracciones el significado de la suma como agregar o juntar cantidades, es posible interpretar la fracción $\frac{m}{n}$ como:

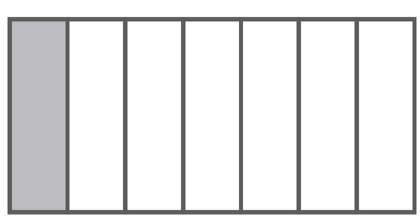
$$\underbrace{\frac{m}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{\text{m veces}}$$

que de acuerdo con el significado de la multiplicación como sumas iteradas es lo mismo que:

$$\frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n}$$

Por ejemplo:

Si dividimos un rectángulo en 7 partes iguales y sombreamos una de ellas, decimos que hemos sombreado $\frac{1}{7}$ del rectángulo.

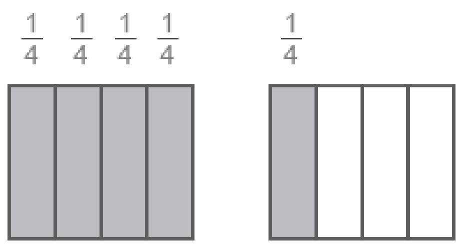


$\frac{1}{7}$

Si luego sombreamos otro $\frac{1}{7}$ del rectángulo tendremos $\frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$ del rectángulo sombreado, que es lo mismo que decir que se tiene 2 veces $\frac{1}{7}$ del rectángulo sombreado, esto es $2 \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$.

Comentarios

Las fracciones unitarias permiten generar fracciones propias e impropias a través del proceso de contar un determinado número de fracciones unitarias. Esto contribuye a superar la restricción a fracciones menores a la unidad que se suele hacer al interpretar la fracción como parte de un todo. Por ejemplo, la fracción $\frac{5}{4}$ se considera como 5 veces $\frac{1}{4}$:



Ubicación: Módulo 2

Taller: Comparación y densidad de las fracciones
Actividad 1: La muralla fraccionada