SUMA Y SIGUE

Material Pedagógico Complementario

Fichas Taller 4: Circunferencia y Círculo

Introducción

En este taller se exploraron los conceptos, propiedades y fórmulas fundamentales de circunferencias y círculos mediante un enfoque deductivo, empleando demostraciones geométricas para asegurar la precisión matemática en cada resultado. La primera parte se centró en el estudio de las propiedades y relaciones métricas de la circunferencia, abarcando sus elementos y teoremas. En la segunda parte, se dedujeron el área y el perímetro de los círculos a partir su aproximación mediante el área y perímetro de polígonos inscritos y circunscritos, obteniendo también una estimación del valor de π. Finalmente, estos resultados se generalizaron para obtener las fórmulas del área y perímetro de sectores y segmentos circulares.

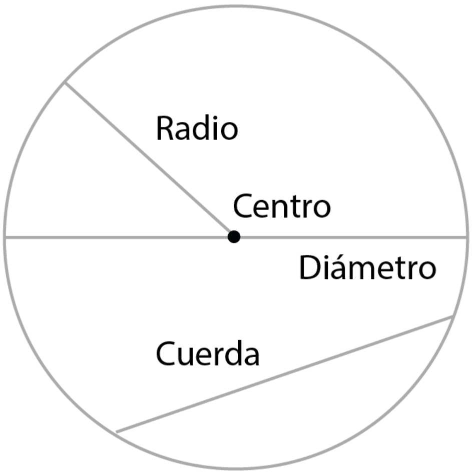
Las fichas que conforman este apartado contemplan los siguientes contenidos disciplinares:

- Definición de circunferencia y sus elementos
- Propiedades básicas de las circunferencias
- Propiedades de las cuerdas de una circunferencia
- Arcos y sus propiedades básicas
- Ángulos inscritos
- Tangentes
- Ángulos formados por cuerdas, tangentes y secantes
- Potencia de un punto
- Perímetro de una circunferencia
- Área de un círculo
- Sectores y segmentos circulares

1. Definición de circunferencia y sus elementos.

Una **circunferencia** es una figura plana compuesta por todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de un punto específico, conocido como el **centro** de la circunferencia. Esta distancia común se denomina **radio** de la circunferencia. También se define el **radio** de una circunferencia como cualquier segmento que conecta el centro de la misma con uno de sus puntos.

Una **cuerda** de una circunferencia es un segmento que une dos puntos cualesquiera de la misma. Cuando una cuerda contiene al centro de la circunferencia, se denomina **diámetro**. Todos los diámetros de una circunferencia tienen la misma longitud, la cual es exactamente el doble del radio.



Ubicación

Taller: Circunferencia y Círculo
Actividad: Relaciones métricas en la circunferencia

2. Propiedades básicas de las circunferencias

A continuación se enuncian algunas propiedades básicas de la circunferencia.

Congruencia y semejanza:

- Si dos circunferencias tienen el mismo radio, entonces son **congruentes**.
- Dos circunferencias cualesquiera son siempre **semejantes**, porque siempre es posible llevar una a la otra, por ejemplo, mediante una traslación, seguida de una homotecia.

Circunferencias y rectas:

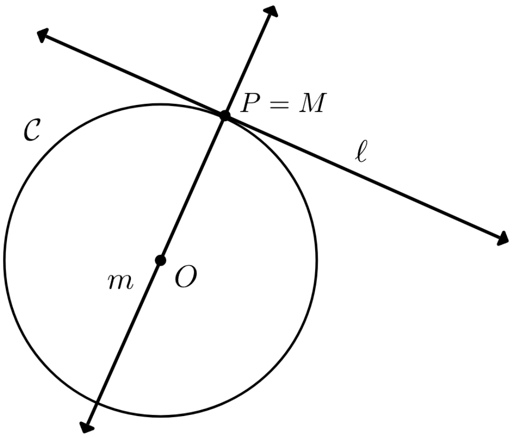
- Una circunferencia separa el plano en tres regiones, su **interior**, su **exterior** y la **circunferencia** misma. Los puntos del interior están a distancia al centro menor al radio y los del exterior están a distancia al centro mayor al radio.
- Una recta puede intersectar una circunferencia en, como máximo, dos puntos.
  - Si la intersección ocurre en un único punto, la recta es **tangente** a la circunferencia. En este caso, todos los puntos de la recta quedan en el exterior, excepto el **punto de tangencia**, que pertenece a la circunferencia.
  - Si la recta intersecta en dos puntos, se denomina **secante**. Los puntos de intersección se encuentran en la circunferencia, los puntos de la recta entre ellos se ubican en su interior, y el resto de los puntos de la recta permanecen en el exterior.

Dos circunferencias:

- Dos circunferencias distintas que se intersectan, pueden hacerlo en uno o dos puntos. Cuando dos circunferencias comparten exactamente un punto de intersección, se les denomina **circunferencias tangentes**.

Comentarios

- Para demostrar estas propiedades de las circunferencias, se utilizaron propiedades geométricas conocidas, como las de la distancia entre un punto y una recta, el teorema de Pitágoras, la desigualdad triangular, entre otras. Por ejemplo, para demostrar que, si una recta ℓ intersecta una circunferencia $\mathcal{C}$ en un único punto P, todos los demás puntos de ℓ quedan fuera de la circunferencia, se utilizaron propiedades de la distancia entre un punto y una recta.



Dado que P pertenece tanto a ℓ como a $\mathcal{C}$ y $\overline{OP}$ es perpendicular a ℓ, este segmento representa la distancia entre el centro O y la recta, con $OP = k$, donde k es el radio de $\mathcal{C}$. Como para cualquier otro punto $V \in \ell$ se tiene $OV > k$, se concluye que V está fuera de la circunferencia, siendo P el único punto común entre ℓ y $\mathcal{C}$.

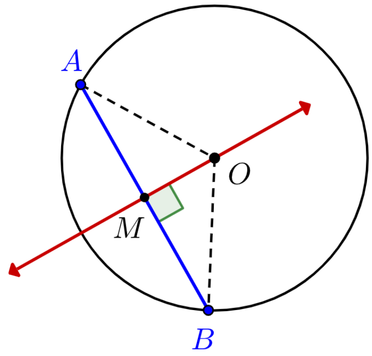
- Una de las propiedades utilizadas de especial relevancia es la siguiente: *"Dados tres puntos no colineales, existe una única circunferencia que pasa por ellos"*.

Ubicación

Taller: Circunferencia y Círculo
Actividad: Relaciones métricas en la circunferencia

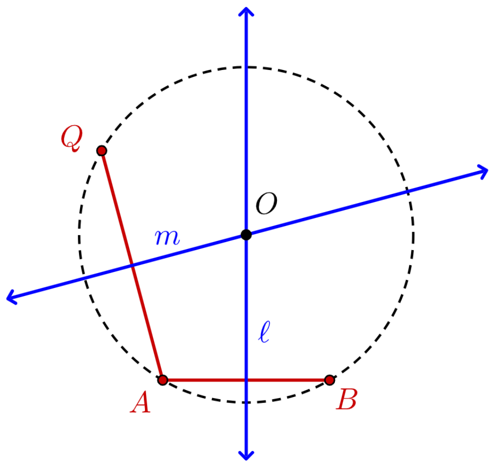
3. Propiedades de las cuerdas de una circunferencia

i. La simetral de una cuerda de una circunferencia contiene el centro de la circunferencia.
ii. Si una recta contiene el centro de una circunferencia y es perpendicular a una cuerda, la recta bisecta la cuerda.
iii. Si un segmento une el centro de una circunferencia con el punto medio de una cuerda que no es un diámetro, el segmento es perpendicular a la cuerda.



Comentarios

- Dados tres puntos en una circunferencia, la propiedad (i) permite determinar su centro mediante la intersección de las simetrales de dos cuerdas definidas por esos puntos.



Ubicación

Taller: Circunferencia y Círculo
Actividad: Relaciones métricas en la circunferencia

4. Arcos y sus propiedades básicas

Un **arco** de una circunferencia es el conjunto de puntos comprendidos entre dos puntos de la circunferencia, llamados extremos, determinados por la intersección con los lados de un ángulo central.

- Además de los puntos extremos, si el arco incluye a los puntos al interior del ángulo central, éste se denomina **arco menor**, mientras que si contiene a los puntos al exterior del ángulo, se denomina **arco mayor**.

- Cuando los extremos de un arco son los extremos de un diámetro, el arco es llamado **semicircunferencia**.

- Un **arco interceptado** es aquel cuyos extremos se encuentran en los lados de un ángulo, y todos sus puntos están ubicados en el interior del ángulo.

Un arco se puede medir de dos formas distintas: por su **longitud** o por el tamaño de su ángulo central, en cuyo caso hablaremos de su **medida angular**. Considerando esta última, se puede establecer la siguiente propiedad:

Adición de arcos:

- Si un punto B está sobre un arco $\overparen{AC}$, entonces la medida del arco $\overparen{AC}$ es igual a la suma de las medidas de los arcos $\overparen{AB}$ y $\overparen{BC}$, es decir:

$$m(\overparen{AC}) = m(\overparen{AB}) + m(\overparen{BC})$$

Congruencia y semejanza:

Por último, al igual que con las circunferencias, se pueden establecer condiciones de congruencia y semejanza para arcos, las que se enuncian a continuación:

- Dos arcos son congruentes si tienen la misma medida angular y pertenecen a circunferencias de el mismo radio.

- Dos arcos son semejantes si tienen la misma medida angular.

- En circunferencias congruentes, los extremos de cuerdas congruentes determinan siempre arcos congruentes.

- Arcos congruentes siempre determinan cuerdas congruentes.

Comentarios

- Se aceptó sin demostrar que un arco de circunferencia contiene **infinitos puntos**. Aunque la demostración es sencilla, su extensión llevó a no incluirla en esta ocasión.

- Se dice que un ángulo es ***subtendido*** por un arco, una cuerda, o cualquier otra sección de una curva cuando sus dos lados pasan por los extremos de dicho arco, cuerda o sección. Inversamente, se dice que el arco, cuerda o sección de la curva comprendida entre los lados del ángulo ***subtiende*** a ese ángulo.

Ubicación

Taller: Circunferencia y Círculo
Actividad: Relaciones métricas en la circunferencia

5. Ángulos inscritos

Un ángulo está **inscrito** en una circunferencia si y sólo si:

- Su vértice está sobre la circunferencia, y
- Cada lado intersecta a la circunferencia en otro punto además del vértice.

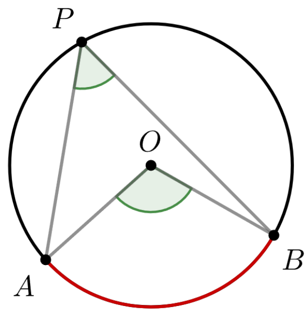
Cuando cada lado de un ángulo (no necesariamente inscrito) contiene al menos *un extremo* de un arco, y todos los puntos del arco están al *interior* del ángulo, se dice que el arco es un **arco interceptado** por dicho ángulo. (Ejemplos en “Comentarios”).

Propiedades relativas a ángulos inscritos.

- La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad de la medida de su arco interceptado.

  En la imagen,

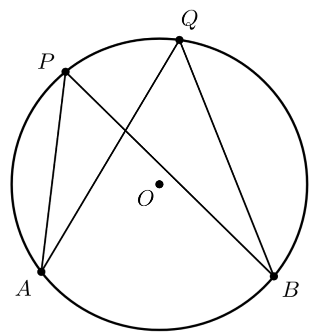
  $$m\angle APB = \frac{1}{2} m\angle AOB$$



- Ángulos inscritos que interceptan arcos de igual medida, son congruentes.

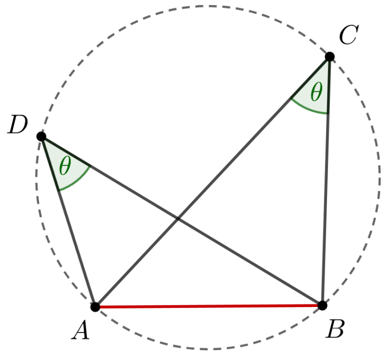
  En la imagen,

  $$m\angle APB = m\angle AQB$$



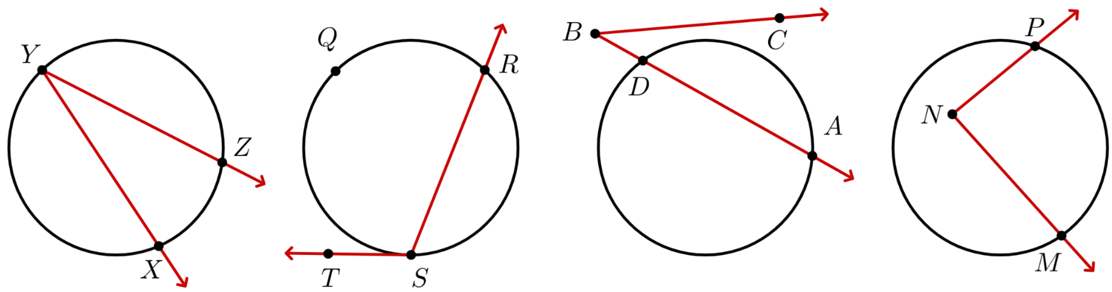
Por último, también es de utilidad el recíproco de la última propiedad:

- Si un segmento subtiende ángulos congruentes desde dos puntos situados en el mismo semiplano respecto al segmento, entonces dichos puntos y los extremos del intervalo pertenecen a una misma circunferencia.

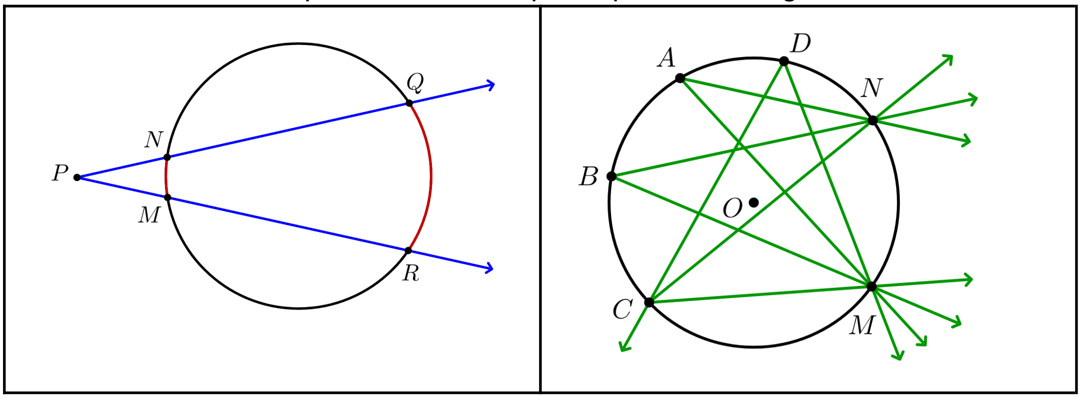


Comentarios

- En la siguiente imagen se muestran algunos ejemplos de arcos interceptados. Notar que sólo $\angle XYZ$ es un ángulo inscrito e intercepta el arco $\overset{\frown}{XZ}$. Por otro lado, $\angle RST$ y $\angle MNP$ no son inscritos, pero interceptan los arcos $\overset{\frown}{SQR}$ y $\overset{\frown}{MP}$, respectivamente. Por último, $\angle ABC$ no intercepta ningún arco.



- Además de los ejemplos anteriores, como se muestra en las siguientes imágenes, también puede ocurrir que:
  - Un mismo ángulo puede interceptar dos arcos.
  - Un mismo arco puede ser interceptado por varios ángulos distintos.



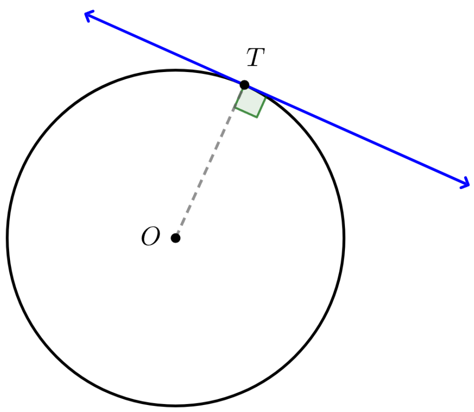
.

Ubicación

Taller: Circunferencia y Círculo
Actividad: Relaciones métricas en la circunferencia

6. Tangentes

Recordemos que una **tangente** es una recta que intersecta una circunferencia en un *único punto*, llamado **punto de tangencia**, y todos los demás puntos de la recta se encuentran en el *exterior* de la circunferencia. Asimismo, por cada punto de la circunferencia pasa una *única* tangente, la cual es *perpendicular* al radio en su extremo exterior.

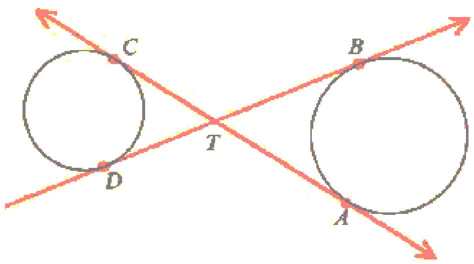


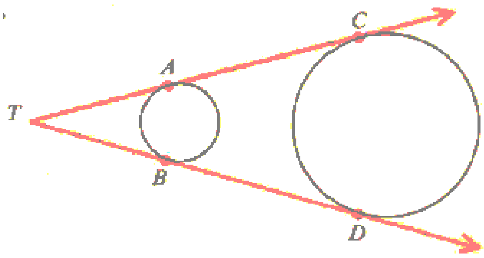
Además, se cumple lo siguiente:

- Segmentos tangentes a una circunferencia desde un punto exterior, son **congruentes**.
- Una recta que es tangente a dos o más circunferencias, es una **tangente común** a las circunferencias.

Con lo anterior, se puede establecer una relación entre los segmentos formados por dos tangentes comunes que se intersectan en un punto. Sean $\overleftrightarrow{TA}$ y $\overleftrightarrow{TB}$ las tangentes comunes a dos circunferencias, entonces:

$$(TA)\cdot(TC)=(TB)\cdot(TD)$$





Comentarios

- Para demostrar estas propiedades de las tangentes se utilizaron propiedades geométricas conocidas, como las de la distancia entre un punto y una recta, el teorema de Pitágoras, la desigualdad triangular, entre otras.

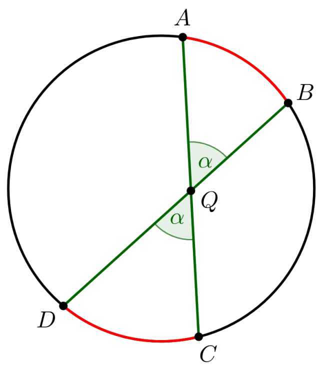
Ubicación

Taller: Circunferencia y Círculo
Actividad: Relaciones métricas en la circunferencia

7. Ángulos formados por cuerdas, tangentes y secantes

A continuación se enuncian propiedades respecto a los ángulos formados por la intersección de cuerdas, tangentes y secantes.

Intersección de dos cuerdas:

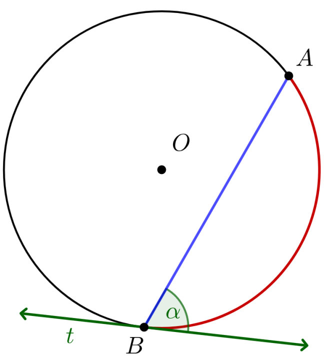


- La medida de un ángulo determinado por dos cuerdas que se intersectan es la mitad de la suma de las medidas de los arcos interceptados.

  En la imagen,

$$m\angle\alpha = \frac{1}{2}(m\,\overset{\frown}{AB} + m\,\overset{\frown}{CD}).$$

Intersección de una tangente y una cuerda:



- La medida de un ángulo determinado por una tangente y una cuerda es la mitad de la medida del arco interceptado.

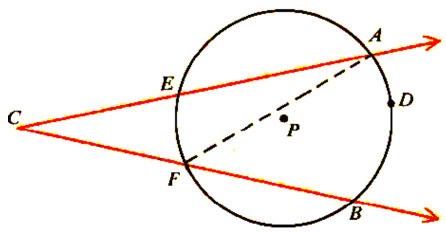
  En la imagen,

$$m\angle\alpha = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}.$$

Intersección entre tangentes y/o secantes:

- La medida de un ángulo formado por dos secantes o tangentes que se intersectan fuera de la circunferencia es la mitad de la diferencia de los arcos interceptados.

  Existen tres casos posibles: Que se intersecten dos secantes, una tangente y una secante, o dos tangentes. La imagen muestra el primer caso. Sin embargo, en cualquiera de las situaciones, la relación es la misma:



$$m\angle BCA = \frac{1}{2}(m\,\overset{\frown}{ADB} - m\,\overset{\frown}{EF})$$

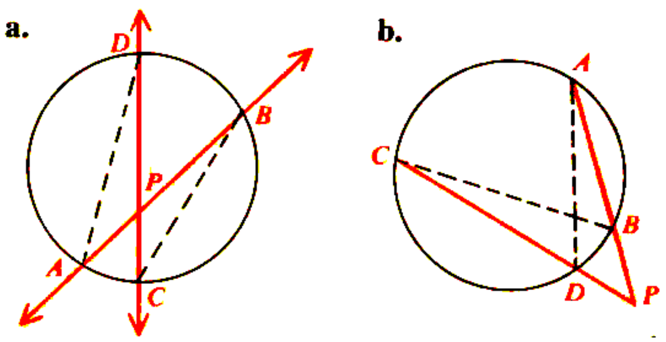
Comentarios ● Para demostrar estas propiedades se utilizaron principalmente las propiedades de circunferencias enunciadas previamente, junto a propiedades geométricas conocidas de ángulos exteriores de triángulos, criterios de congruencia de triángulos, entre otras.
Ubicación Taller: Circunferencia y Círculo Actividad: Relaciones métricas en la circunferencia

8. Potencia de un punto

La siguiente propiedad establece una relación entre las longitudes de los segmentos formados por la intersección de **dos secantes** en una circunferencia.

- Sea una secante que intersecta una circunferencia en A y B, y una segunda secante que la intersecta en C y D. Si las secantes se intersectan en P, entonces,

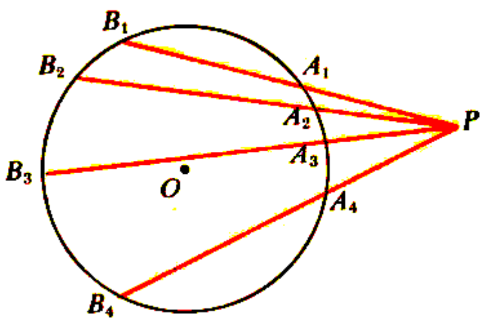
  $$(AP) \cdot (BP) = (CP) \cdot (DP)$$



Como se ve en la figura, hay dos casos posibles. El punto P puede quedar dentro o fuera de la circunferencia, sin embargo, la relación es la misma.

Generalizando lo anterior, tenemos que:

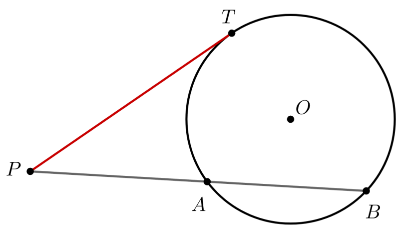
- Dada una circunferencia y un punto P, para cualquier secante que pase por P e intersecte la circunferencia en los puntos A y B, el producto $(PA) \cdot (PB)$ es siempre el mismo, independiente de la secante elegida, y es llamado la **potencia de un punto** respecto a dicha circunferencia. Esto también se cumple tanto si P está en el interior como en el exterior de la circunferencia.



Finalmente, esta propiedad se puede extender a tangentes, donde se puede considerar que los puntos A y B coinciden, y en ese caso, tenemos:

- El cuadrado de la longitud de un segmento tangente a la circunferencia de centro O desde P es la potencia del punto P para la circunferencia de centro O."

  En el ejemplo de la imagen, $\overline{PT}^2$ es la potencia del punto P para la circunferencia de centro O.



Comentarios

- Si P está en la circunferencia, la potencia de P respecto a la circunferencia es cero.

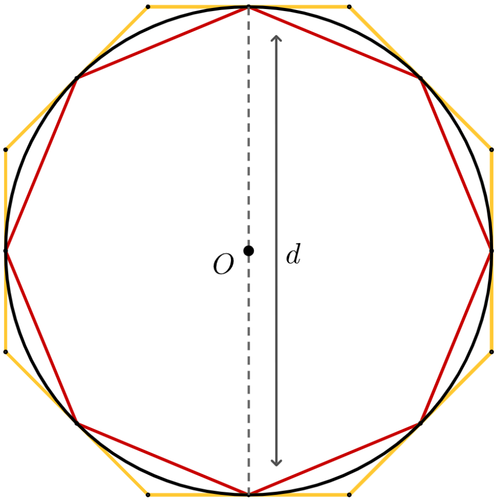
- Para demostrar estas propiedades se utilizaron principalmente las propiedades de circunferencias enunciadas previamente, junto a propiedades geométricas conocidas de ángulos exteriores de triángulos, semejanza de triángulos, entre otras.

Ubicación

Taller: Circunferencia y Círculo
Actividad: Relaciones métricas en la circunferencia

9. Perímetro de una circunferencia

El perímetro de una circunferencia se puede aproximar mediante los **perímetros de polígonos regulares inscritos y circunscritos**. A medida que aumenta el número de lados de estos polígonos, sus perímetros se acercan cada vez más al perímetro de la circunferencia.



Considerando dicha aproximación, se pueden establecer las siguientes observaciones:

- El perímetro de una circunferencia queda acotado inferiormente por los polígonos inscritos de n lados y superiormente por los polígonos circunscritos de n lados, y su valor corresponde al **límite de ambos perímetros** cuando n tiende a infinito.

- Se puede demostrar que la razón entre el perímetro C y el diámetro d de cualquier circunferencia es constante. Esta constante corresponde al número π.

$$\frac{C}{d} = \pi$$

  Esta relación permite establecer fórmulas para el perímetro C de cualquier circunferencia en términos de su diámetro d o de su radio r.

$$C = \pi \cdot d$$

$$C = 2\pi \cdot r$$

- Una forma de aproximar π es mediante cotas inferiores y superiores obtenidas de los perímetros de polígonos regulares inscritos y circunscritos en una circunferencia cuando $n \to \infty$. Usando razones trigonométricas para estos perímetros, se puede llegar a la siguiente expresión para acotar π:

$$n \cdot \sin \frac{180°}{n} < \pi < n \cdot \tan(\frac{180°}{n})$$

- A continuación, se presentan las primeras 10 cifras decimales de π:

$$\pi \approx 3{,}1415926535\ldots$$

Comentarios

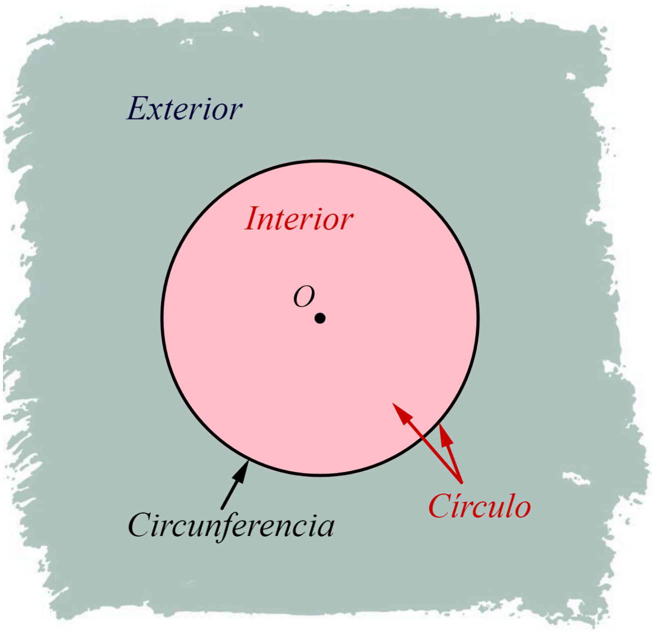
- El hecho de que el cociente entre el perímetro C y el diámetro d de una circunferencia sea constante implica que estas cantidades son directamente proporcionales, donde la constante de proporcionalidad es π.
- El procedimiento para aproximar el valor de π estableciendo cotas inferiores y superiores basadas en perímetro de polígonos regulares inscritos y circunscritos a una circunferencia se conoce como el método de Arquímides.
- Es importante mencionar que es posible demostrar, mediante herramientas que escapan al alcance de este curso, que π es un número irracional, es decir, no se puede escribir como fracción. Eso implica además, que su expansión decimal es infinita no periódica.

Ubicación

Taller: Circunferencia y Círculo
Actividad: Área y perímetro de sectores y segmentos circulares

10. Área de un círculo

Un **círculo** es una *región cerrada* formada por una *circunferencia* y todos los puntos en su *interior*.



- El área A de un polígono regular de n lados inscrito en un círculo se aproxima cada vez mejor al área del círculo al aumentar n. Así, el área A del círculo es el límite de las áreas A_n de estos polígonos cuando $n \to \infty$.

- Se puede establecer que el área A_n de un polígono de n lados inscrito en un círculo es $A_n = \frac{p_n \cdot a_n}{2}$, donde p_n es el perímetro del polígono inscrito y a_n la medida del apotema. Así, cuando $n \to \infty$,

$$A_n = \frac{1}{2} a_n p_n \to \frac{1}{2} rC$$

- Como $C = 2\pi r$, el **área de un círculo** de radio r es :

$$A = 2\pi r^2.$$

Comentarios

- De forma análoga, también es posible realizar esta aproximación del área de un círculo mediante el área de un polígono circunscrito de n lados cuando $n \to \infty$.

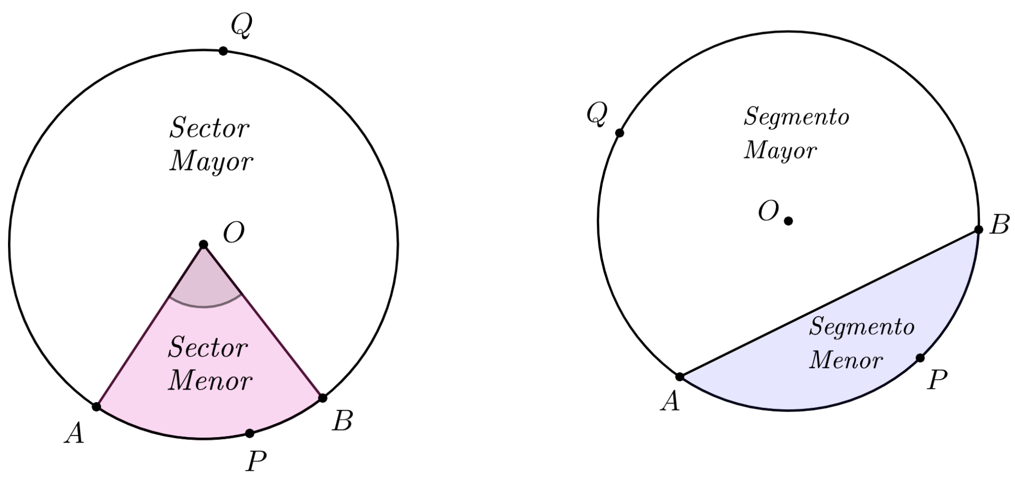
Ubicación

Taller: Circunferencia y Círculo
Actividad: Área y perímetro de sectores y segmentos circulares

11. Sectores y segmentos circulares

Un **sector circular** es una porción de un círculo delimitada por dos radios y el arco que conecta sus extremos. Si el sector está delimitado por un *arco menor*, se llama **sector menor**, y si lo delimita un *arco mayor*, se denomina **sector mayor**. Si el arco corresponde a una semicircunferencia, el sector es un semicírculo.

Por otra parte, un **segmento circular**, corresponde a la región delimitada por un arco y una cuerda. La región limitada por la cuerda y el arco mayor se denomina **segmento mayor**, y la región limitada por la cuerda y el arco menor se llama **segmento menor**.



Área y perímetro de sectores y segmentos circulares.

Para un **sector** de ángulo θ y radio r,

- Su **área** se calcula como:

$$\text{Área del sector} = \frac{\theta}{360°}\pi r^2$$

- Su **perímetro** se calcula como:

$$\text{Perímetro del sector} = 2r + \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$$

Para un **segmento** de un círculo con centro en O y radio r, delimitado por una cuerda $\overline{AB}$ que subtiende un ángulo θ,

- Si el segmento, es un segmento *menor*, su **área** se calcula como:

$$\text{Área del segmento menor} = \frac{\theta}{360°}\pi r^2 - \text{Área del } \Delta OAB$$

En caso contrario,

$$Área\ del\ segmento\ mayor \ = \ \pi r^2 \ - \ Área\ del\ segmento\ menor$$

- Su **perímetro** se calcula como:

$$Perímetro\ del\ segmento \ = \ m\overline{AB} + \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$$

Comentarios

- Cabe mencionar, que un un mismo círculo sectores que subtienden arcos de la misma medida, son congruentes. En efecto, una rotación envía uno en el otro. Por tanto estos sectores, tienen también la misma área.
- El ángulo subtendido por un sector menor, se llama **ángulo del sector**.
- Se habla simplemente de "segmento" y "sector", para referirse al "segmento menor" y al "sector menor", respectivamente, salvo que se indique lo contrario.
- El razonamiento utilizado para obtener las fórmulas de áreas y perímetros de sectores y segmentos circulares se basa principalmente en razonamiento proporcional, límites y propiedades de congruencia y semejanza.

Ubicación

Taller: Circunferencia y Círculo
Actividad: Área y perímetro de sectores y segmentos circulares