SUMA Y SIGUE

Material Pedagógico Complementario

Fichas Taller 3: Razones trigonométricas

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE
CMMEdu Laboratorio de Educación Centro de Modelamiento Matemático
Ministerio de Educación Gobierno de Chile
Plan de Reactivación Educativa Seamos Comunidad
unesco Cátedra

Introducción

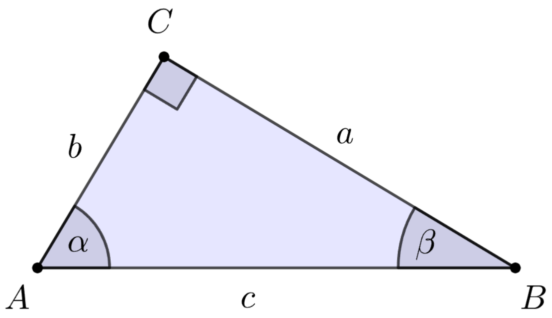
En este taller se exploraron varios aspectos sobre el estudio de las razones trigonométricas en triángulos rectángulos: Se identificaron elementos relevantes de un triángulo rectángulo, para luego, a partir de criterios de semejanza establecer las razones trigonométricas. Luego se expresaron numéricamente las razones trigonométricas de ángulos notables, se estableció la relación entre ángulos complementarios y, también a partir del análisis de triángulos inscritos en una circunferencia unitaria, fue posible establecer relaciones para razones trigonométricas para ángulos mayores a 90°. También se mostró que es posible encontrar relaciones entre los lados de triángulos y el seno y el coseno de sus ángulos interiores, incluso si el triángulo no es rectángulo.

Las fichas que conforman este apartado contemplan los siguientes contenidos disciplinares:

- Elementos de un triángulo rectángulo
- Razones trigonométricas
- Propiedad de ángulos complementarios
- Razones trigonométricas de ángulos notables
- Razones trigonométricas de los ángulos 0° y 90°
- Teorema de seno
- Teorema del coseno

1. Elementos de un triángulo rectángulo

Consideremos el triángulo $\triangle ABC$ rectángulo en C:



Los lados a y b de este triángulo corresponden a los catetos y forman el ángulo recto en C. El lado c corresponde a la hipotenusa y es el lado opuesto al ángulo recto.

Además, el lado a corresponde al cateto opuesto al ángulo α, mientras que el lado b es su cateto adyacente.

De manera análoga, en el caso del ángulo agudo β, su cateto opuesto es b y su cateto adyacente es a.

Comentarios

- Esta es una representación bastante estándar de un triángulo rectángulo, sin embargo, la notación puede variar, así como también la orientación de la figura.
- Para evitar posibles errores por parte de los estudiantes se recomienda enfatizar en la idea que los catetos son aquellos que forman el ángulo de $90°$, más allá del nombre que tengan los lados en la figura.
- Asimismo, se recomienda enfatizar en la idea de que los catetos opuestos y adyacentes son referente a un ángulo, por lo tanto, un cateto puede considerarse opuesto o adyacente dependiendo del ángulo que se esté analizando.

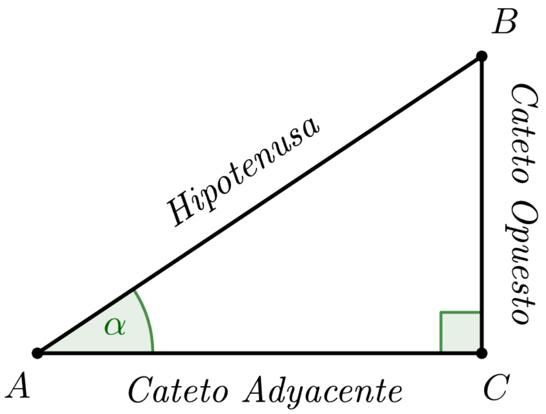
Ubicación

Taller: Trigonometría
Actividad: Razones trigonométricas

2. Razones trigonométricas

Razones Trigonométricas

Para un triángulo rectángulo $\triangle ABC$, con α uno de sus ángulos agudos, se define:



- **Seno del ángulo** α**:** la razón entre la medida del cateto opuesto y la hipotenusa. Se denota como:

$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

- **Coseno del ángulo** α**:** la razón entre la medida del cateto adyacente y la hipotenusa. Se denota como:

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

- **Tangente del ángulo** α**:** la razón entre las medida del cateto opuesto y del cateto adyacente. Se denota como:

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

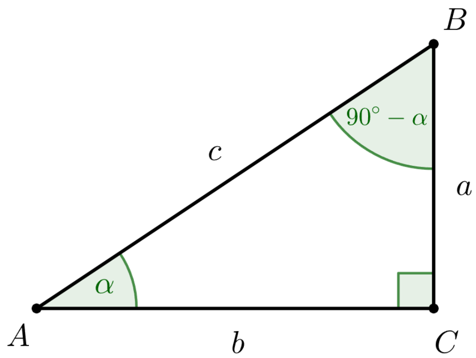
Comentarios

- Es posible establecer cada razón trigonométrica para cada uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo. Para cada ángulo es necesario identificar su cateto opuesto y adyacente.

- Todos los triángulos rectángulos que tienen un ángulo α son semejantes (por criterio ángulo-ángulo). Esto implica que los lados correspondientes de estos triángulos son proporcionales, y como consecuencia, los valores de las razones trigonométricas respecto de ese ángulo son las mismas en todos esos triángulos. Así, el valor de las razones trigonométricas dependen del ángulo y no de las medidas de los lados del triángulo rectángulo.
Ubicación Taller: Trigonometría Actividad: Razones trigonométricas

3. Propiedad de ángulos complementarios

En un triángulo rectángulo, el seno, coseno y tangente de un ángulo α tienen relaciones específicas con los valores trigonométricos de su ángulo complementario $90° - \alpha$.



Seno y coseno:

$$\text{sen}\alpha = \cos\left(90° - \alpha\right) = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}}$$
$$\cos\alpha = \text{sen}(90° - \alpha) = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}}$$

Tangente:

$$\tan\alpha = \frac{1}{\tan\left(90° - \alpha\right)} = \frac{a}{b}$$

Comentarios

- Es posible establecer estas relaciones ya que los catetos “cambian de rol” según el ángulo que se esté considerando. De este modo, el cateto opuesto a α es el cateto adyacente al ángulo $90° - \alpha$ y viceversa.

Ubicación

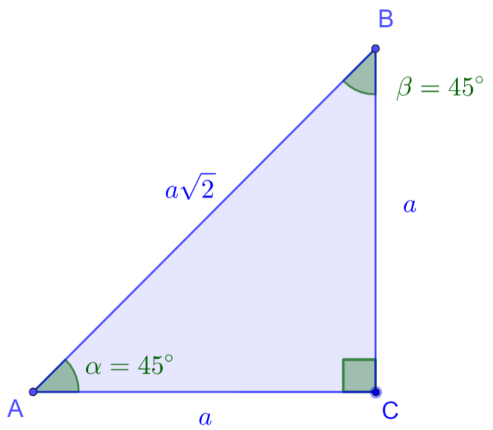
Taller: Trigonometría
Actividad: Razones trigonométricas

4. Razones trigonométricas de ángulos notables

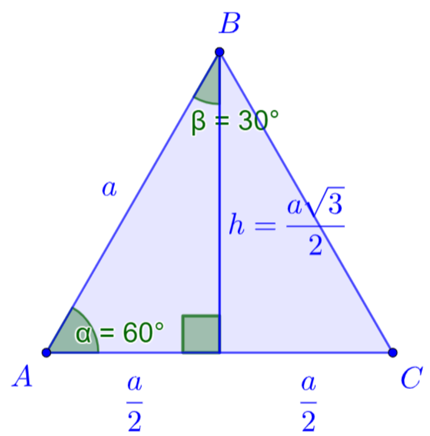
A partir del análisis de un triángulo equilátero y de un triángulo isósceles rectángulo se pudieron calcular los valores de las razones trigonométricas para los siguientes ángulos notables:

	$\alpha = 30°$	$\alpha = 45°$	$\alpha = 60°$
$\operatorname{sen}(\alpha)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan(\alpha)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Triángulo rectángulo isósceles



Triángulo equilátero



Comentarios

- Si bien se ha encontrado el valor de las diferentes razones trigonométricas para ángulos notables, es posible encontrar el valor para todos los ángulos interiores de un triángulo, los cuales en su gran mayoría corresponden a valores irracionales.

Ubicación

Taller: Trigonometría
Actividad: Razones trigonométricas

5. Razones trigonométricas de los ángulos $0°$ y $90°$

Hasta ahora hemos analizado la razones trigonométricas en triángulos rectángulos, por lo que los valores de α quedan delimitados geométricamente a valores entre $0°$ y $90°$.

Al analizar cómo varían las longitudes que representan las razones trigonométricas asociadas al triángulo rectángulo de hipotenusa 1, es posible ver que:

- Cuando α se acerca a $0°$, $\cos(\alpha)$ se acerca a 1, $\operatorname{sen}(\alpha)$ se acerca a 0 y $\tan(\alpha)$ se acerca a 0.
- Cuando α se acerca a $90°$, $\cos(\alpha)$ se acerca a 0, $\operatorname{sen}(\alpha)$ se acerca a 1 y $\tan(\alpha)$ crece indefinidamente.

De este modo, podemos definir las razones trigonométricas para los ángulos de $0°$ y $90°$ como los valores límites a los que tienden.

	$\alpha = 0°$	$\alpha = 90°$
$\operatorname{sen}(\alpha)$	0	1
$\cos(\alpha)$	1	0
$\tan(\alpha)$	0	Indefinido

Comentarios

- El análisis de lo que ocurre en un triángulo rectángulo de hipotenusa 1 puede realizarse también el el plano cartesiano, dibujando una circunferencia unitaria y el triángulo rectángulo en el primer cuadrante, con uno de sus vértices en el origen, otro sobre el eje X y el tercero sobre la circunferencia misma.

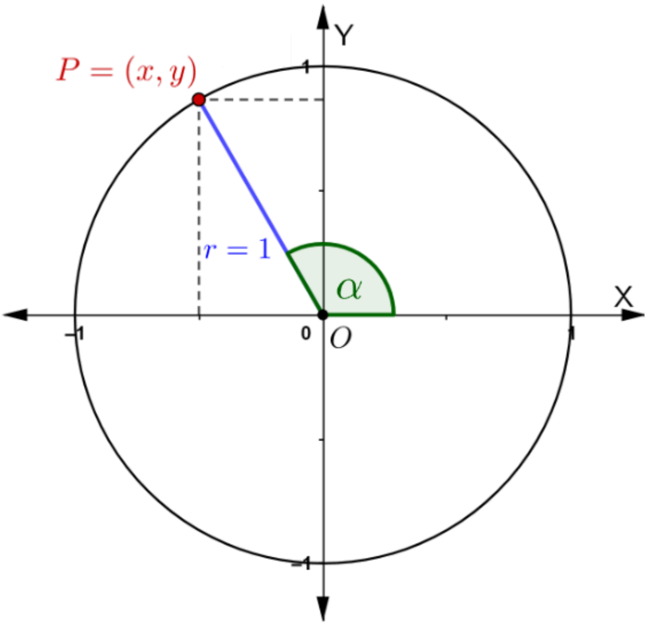
Ubicación

Taller: Trigonometría
Actividad: Razones trigonométricas

6. Razones trigonométricas para ángulos mayores a $90°$

Estudiamos que para triángulos rectángulos de hipotenusa igual a 1, es posible delimitar los valores de seno y coseno entre 0 y 1, para valores de α entre $0°$ y $90°$.

Ahora bien, si usamos una circunferencia unitaria veremos que es posible extender los conceptos de seno, coseno y tangente a ángulos de cualquier medida. Para ello se debe asociar cada ángulo a un valor real determinado por las coordenadas (x, y) del punto P sobre la circunferencia unitaria correspondiente a ese ángulo, tal como se representa en la figura:



Notemos que las razones trigonométricas ahora quedan definidas de la siguiente forma:

Seno de α: $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\mathrm{y}}{1} = \mathrm{y}$

Coseno de α: $\cos(\alpha) = \frac{\mathrm{x}}{1}$

Tangente de α: $\tan(\alpha) = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$

Comentarios

- El signo de estas razones trigonométricas queda determinado por el cuadrante en el que se encuentra el punto P, ya que dependen del signo que toman sus coordenadas en dicho cuadrante.

- Como el radio de la circunferencia unitaria es 1, las coordenadas del punto P en valor absoluto deben ser menores o iguales a 1. Así, los valores de seno y coseno quedan acotados entre -1 y 1.

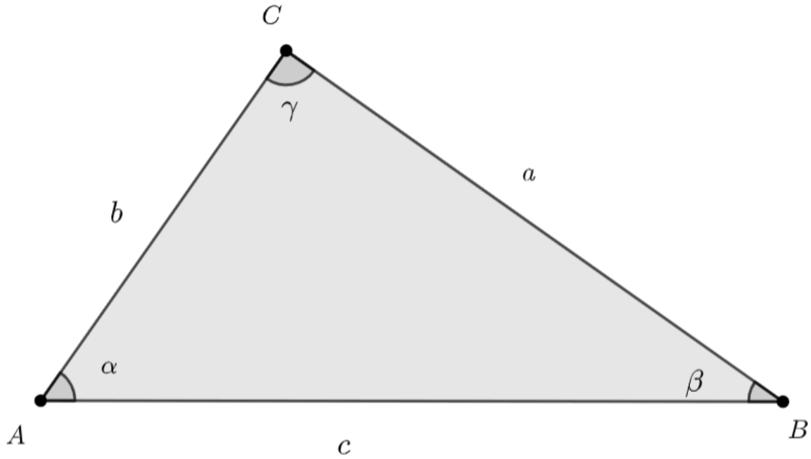
- Asimismo se puede mostrar que los valores de la tangente pueden crecer indefinidamente de forma positiva (o negativa), esto ocurre porque el coseno puede ser 0.

Ubicación

Taller: Trigonometría
Actividad: Razones trigonométricas

7. Teorema del seno

Consideremos el triángulo $\triangle ABC$ cualquiera de lados a, b y c, con sus respectivos ángulos interiores α, β y γ, tal como se muestra en la figura.



En él se cumplirán siempre las siguientes relaciones de igualdad:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{b} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{c}$$

Qué también se puede expresar en su forma recíproca.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\gamma)}$$

Comentarios

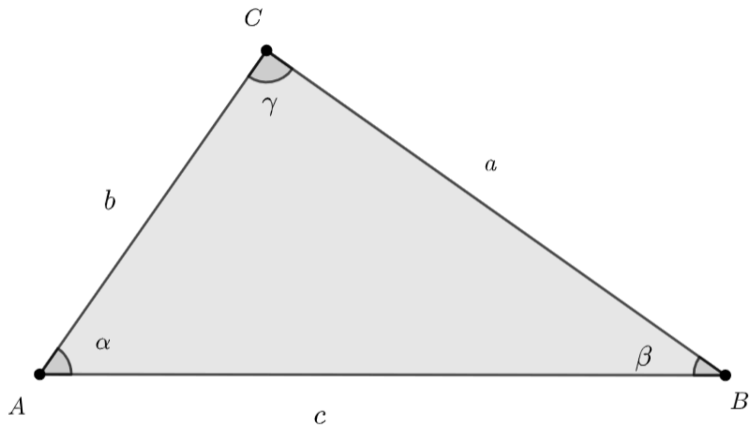
- Nuevamente hemos usado representación bastante estándar de un triángulo rectángulo, sin embargo, la notación puede variar de un ejercicio a otro, así como también la orientación de la figura.
- Para evitar posibles errores por parte de los estudiantes se recomienda enfatizar en la idea de que en el teorema del seno se relacionan el seno de cada ángulo con su lado opuesto, más allá de las letras o nombres que se asignen los lados en la figura.
- En general, a la hora de aplicar el teorema del seno para resolver ejercicios, basta con tomar una sola igualdad; no siempre es necesario establecer las tres igualdades.

Ubicación

Taller: Trigonometría
Actividad: Razones trigonométricas

8. Teorema del coseno

Consideremos el triángulo $\triangle ABC$ cualquiera de lados a, b y c, con sus respectivos ángulos interiores α, β y γ, tal como se muestra en la figura.



En él se cumplirán siempre las siguientes relaciones de igualdad:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Comentarios

- El Teorema del coseno es considerado una generalización del teorema de Pitágoras, ya que cuando $\cos(90°) = 0$, la igualdad del teorema del coseno corresponde a la del teorema de Pitágoras.
- Si bien es posible resolver un triángulo cualquiera usando el teorema del seno o el teorema del coseno, se recomienda usar el teorema del coseno cuando se conozcan dos lados y un ángulo del triángulo. Si se conocen los ángulos interiores de un triángulo y un solo lado, entonces es más práctico usar el teorema del seno.

Ubicación

Taller: Trigonometría
Actividad: Razones trigonométricas