SUMA Y SIGUE

Material Pedagógico Complementario

Fichas Taller 2: Semejanza

fcfm
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

CMMEdu
Laboratorio de Educación
Centro de Modelamiento Matemático

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

PLAN DE REACTIVACIÓN EDUCATIVA
Seamos Comunidad

unesco
Cátedra

Introducción

En este taller se exploró el concepto de semejanza y sus aplicaciones. En primer lugar, se examinaron críticamente las nociones intuitivas de semejanza, a fin de establecer una definición formal basada en transformaciones geométricas. Luego, se analizaron las propiedades geométricas que se conservan en figuras semejantes y la relación entre semejanza y congruencia. Además, se demostró que la semejanza cumple con las propiedades de una relación de equivalencia. Posteriormente, se profundizó en la congruencia de figuras geométricas para deducir un criterio de semejanza para polígonos convexos y tres criterios específicos para triángulos. Finalmente, se aplicaron estas propiedades y criterios de semejanza en triángulos para deducir teoremas fundamentales en la geometría escolar.

Las fichas que conforman este apartado contemplan los siguientes contenidos disciplinares:

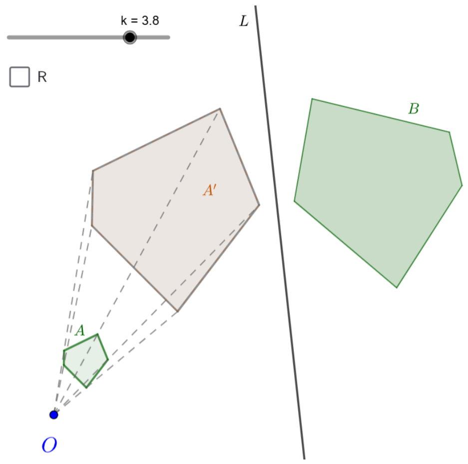
- Definición de semejanza
- Relaciones entre semejanza y congruencia
- Propiedades de la semejanza
- Criterio de semejanza de polígonos convexos
- Criterios de semejanza de triángulos
- Relaciones de semejanza en el triángulo rectángulo
- Teoremas en el triángulo rectángulo

1. Definición de semejanza

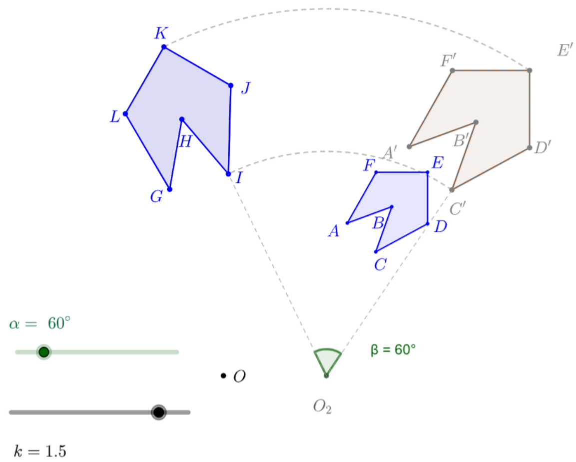
Dos figuras U y V son semejantes si y solo sí existe una **composición de transformaciones geométricas de homotecias e isometrías** que llevan una figura a la otra. Si U es semejante con V, se denota $U \sim V$.

En los siguientes ejemplos se muestra la composición de transformaciones geométricas que llevan una figura a la otra, lo que permite determinar su semejanza.

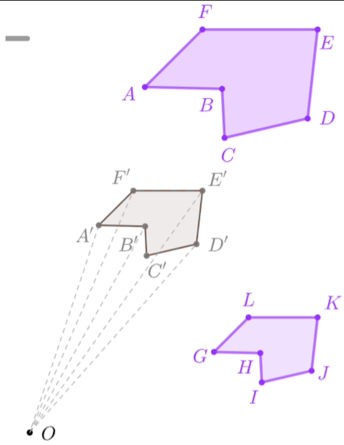
1. Dos figuras semejantes relacionadas mediante una homotecia y una reflexión.



2. Dos figuras semejantes relacionadas mediante una homotecia y una rotación.



3. Dos figuras semejantes relacionadas mediante una homotecia y una traslación.



Comentarios

- El orden en que se realiza la composición de transformaciones geométricas de homotecia e isometría no afecta la semejanza de las figuras. No obstante, las transformaciones geométricas y sus elementos cambian en un orden y en el otro.
- Si en la composición de transformaciones geométricas que llevan una figura a la otra se identifica una secuencia de más de una homotecia e isometría, se puede comprender como una única semejanza.

Ubicación

Taller: Semejanza
Actividad: Semejanza

2. Relaciones entre semejanza y congruencia

A partir de la definición formal de semejanza, es posible determinar que dos figuras semejantes siempre conservan las siguientes características geométricas entre sus imágenes y preimágenes:

- La distancia entre dos puntos de la imagen es proporcional a la distancia entre los puntos de sus preimágenes.
- Dado un punto que está entre otros dos, su imagen está entre las imágenes de dichos puntos.
- Las imágenes de puntos colineales también son colineales.
- La medida de los ángulos de la imagen es congruente con la medida de los ángulos de la preimagen.

Por otro lado, es posible establecer que si dos figuras son congruentes entonces son siempre semejantes. Pero si dos figuras son semejantes, no necesariamente son congruentes.

Comentarios

- En base a las características que se conservan en una semejanza, es posible analizar la semejanza de figuras con lados curvos, figuras con "agujeros", o incluso figuras no cerradas formadas por ángulos u objetos desconectados.
- Dos figuras semejantes son congruentes sí y sólo si se utiliza la homotecia como identidad $(k = 1)$ en la composición de la semejanza.

Ubicación

Taller: Semejanza
Actividad: Semejanza

3. Propiedades de la semejanza

Consideremos las figuras U, V y W, entonces la semejanza cumple las siguientes propiedades:

1. **Reflexiva**: $U \sim U$.
   Toda figura es semejante consigo misma.

2. **Simétrica**: Si $U \sim V$, entonces $V \sim U$.
   Si dos figuras son semejantes, entonces la semejanza es recíproca.

3. **Transitiva**: Si $U \sim V$ y $V \sim W$, entonces $U \sim W$.
   Si una figura es semejante con otra, que a su vez es semejante a una tercera figura, entonces la primera figura es semejante con la tercera.

Comentarios

- Estas propiedades se pueden demostrar identificando las transformaciones geométricas que justifican la semejanza en cada caso: identidad, inversa y compuesta respectivamente.

- Una relación que cumple estas tres propiedades se conoce como relación de equivalencia. Entonces, la semejanza es una relación de equivalencia. Otras relaciones de equivalencia son la igualdad y la congruencia

Ubicación

Taller: Semejanza
Actividad: Semejanza

4. Criterio de semejanza de polígonos convexos

El **criterio de semejanza de polígonos convexos** permite verificar que dos polígonos convexos si cumplen con dos condiciones: sus ángulos correspondientes son proporcionales y sus lados respectivos son proporcionales.

En base a lo anterior, es posible establecer las siguientes relaciones de semejanza:

- Dos cuadrados son siempre semejantes
- Dos rectángulos no son siempre semejantes
- Dos rombos no son siempre semejantes
- Dos polígonos regulares con el mismo número de lados son siempre semejantes.

Comentarios

- Si bien la definición de semejanza como composición de transformaciones geométricas de homotecia e isometría es precisa y se puede aplicar a todo tipo de figuras, en la práctica no siempre es posible o inmediato identificar los elementos de las transformaciones geométricas que se componen.

Ubicación

Taller: Semejanza
Actividad: Semejanza

5. Criterios de congruencia de triángulos

En base al criterio de semejanza de polígonos convexos, es posible establecer tres condiciones llamadas **criterios de semejanza de triángulos** que permiten determinar la semejanza de dos triángulos.

- **Criterio LLL (Lado-Lado-Lado):**
  Si los tres lados de un triángulo son proporcionales a los lados correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.

- **Criterio LAL (Lado-Ángulo-Lado):**
  Si dos lados de un triángulo son proporcionales a los lados correspondientes de otro triángulo y el ángulo que forman es congruente en ambos, entonces los triángulos son semejantes.

- **Criterio AA (Ángulo-Ángulo):**
  Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a los ángulos correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.

Comentarios

- En este taller, los tres criterios de semejanza de triángulos se demostraron de manera análoga, siguiendo los siguientes pasos:

  Paso 1: Probar que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ con homotecia.

  Paso 2: Determinar que $\triangle A'B'C' \cong \triangle DEF$ con criterios de congruencia de triángulos.

  Paso 3: Concluir que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ con propiedades de la semejanza y las relaciones entre congruencia y semejanza.

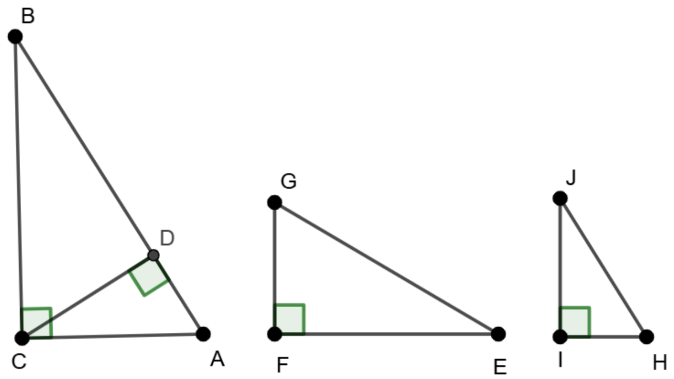
Ubicación

Taller: Semejanza
Actividad: Semejanza

6. Relaciones de semejanza en el triángulo rectángulo

Al trazar la altura desde el vértice correspondiente al ángulo recto de un triángulo rectángulo, se forman dos triángulos rectángulos que son semejantes al triángulo original y también semejantes entre sí.

Sea el triángulo ABC rectángulo en C y $\overline{CD}$ es la altura del vértice C. Entonces $\triangle ABC \sim \triangle CBD \sim \triangle ACD$.



Comentarios

- La demostración de estas relaciones de semejanza en el triángulo rectángulo se obtiene como aplicación del Criterio AA de semejanza de triángulos y la propiedad transitiva de la semejanza.

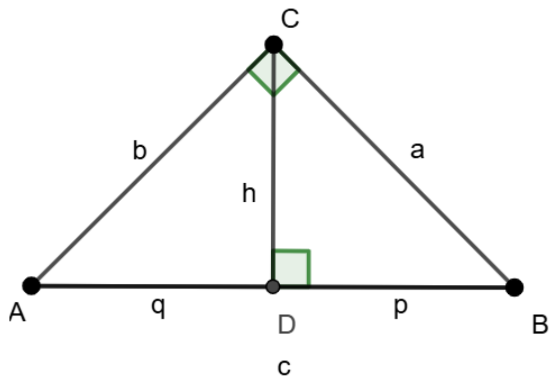
Ubicación

Taller: Semejanza
Actividad: Aplicaciones de la semejanza

7. Teoremas en el triángulo rectángulo

En base a las relaciones de semejanza en el triángulo rectángulo, es posible determinar la proporcionalidad entre los lados de los triángulos que se forman al trazar la altura del vértice que corresponde al ángulo recto en un triángulo rectángulo, que se resumen en los siguientes teoremas geométricos.

Sea el triángulo ABC rectángulo en C, con $\overline{CD}$ la altura del vértice C y las medidas de sus lados como se muestra en la imagen:



Teorema de Euclides
La altura h y los catetos a y b satisfacen las siguientes relaciones:

- $h^2 = q\dot{p}$
- $a^2 = p\dot{c}$
- $b^2 = q\dot{c}$

Teorema de Pitágoras
El cuadrado de la hipotenusa c es igual a la suma de los cuadrados de los catetos a y b.

- $c^2 = a^2 + b^2$

Recíproco del Teorema de Pitágoras
Si las medidas de un triángulo son a, b y c y satisfacen la relación $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.

Comentarios

- En el estudio de la geometría escolar, estos teoremas generalmente se prueban a partir de otras nociones matemáticas, pero en este taller los dedujimos como una aplicación directa de la semejanza de triángulos.

- Al utilizar los resultados de semejanza y congruencia de triángulos, resumidos en el Teorema de Euclides, se facilita la deducción tanto del Teorema de Pitágoras como de su Recíproco.

Ubicación

Taller: Semejanza
Actividad: Aplicaciones de la semejanza