SUMA Y SIGUE

Material Pedagógico Complementario

Fichas Taller 1: Homotecia y Teorema de Tales

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE
CMMEdu Laboratorio de Educación Centro de Modelamiento Matemático
Ministerio de Educación Gobierno de Chile
Plan de Reactivación Educativa Seamos Comunidad
unesco Cátedra

Introducción

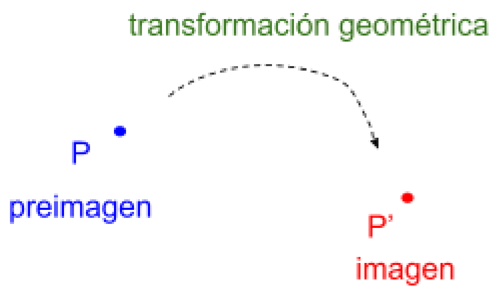
En este taller se buscó construir la noción de Homotecia como una transformación geométrica, y su aplicación correspondiente al Teorema de Tales, partiendo con la exploración de los aspectos fundamentales de las transformaciones isométricas, utilizando un enfoque que incorpora el uso de materiales concretos para desarrollar la intuición geométrica detrás de las definiciones y propiedades matemáticas.

Las fichas que conforman este apartado contemplan los siguientes contenidos disciplinares:

- Transformaciones geométricas en el plano
- Reflexión
- Vectores
- Traslación
- Rotación
- Transformaciones isométricas
- Propiedades de la traslación, rotación y reflexión
- Composición de transformaciones isométricas
- Identidad y transformación inversa
- Definición de congruencia de figuras
- Congruencia de figuras elementales
- Criterios de congruencia de triángulos
- Homotecia
- Propiedades fundamentales de la homotecia
- Propiedades de la homotecia
- Homotecia de figuras elementales
- Composición de homotecias
- Identidad y homotecia inversa
- Homotecia “negativa”
- Nomenclatura factor y razón de homotecia
- Proporciones ligadas a la homotecia
- Primer Teorema de Tales
- Recíproco del Primer Teorema de Tales
- Segundo Teorema de Tales

	1. Transformaciones geométricas en el plano

Una **transformación geométrica** en el plano es una regla que asigna a cada punto P otro punto P' en el mismo plano. El punto P se llama formalmente preimagen de P', mientras que el punto P' se llama imagen de P.



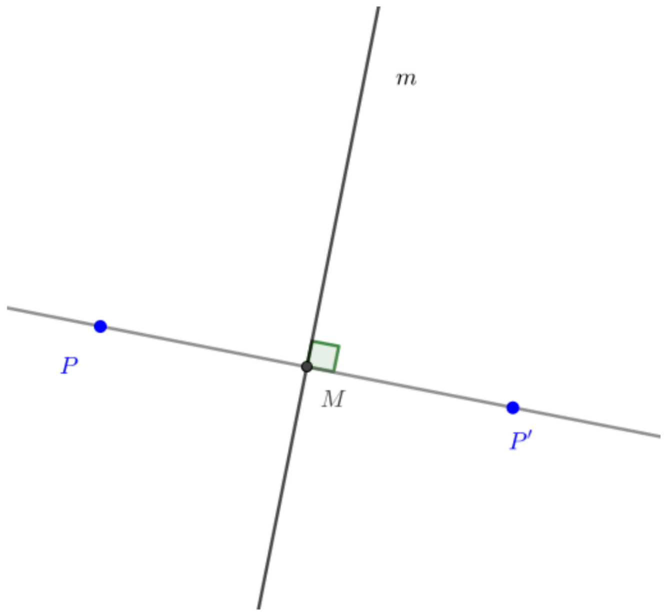
Ubicación

Taller: Homotecia y Teorema de Tales
Actividad: Transformaciones isométricas y congruencia

2. Reflexión

La reflexión de un punto P en el plano, con respecto a una recta m, es un punto P' en el mismo plano, tal que:

- Si P está en m, entonces $P' = P$.
- Si P no está en m, P' es el punto del semiplano opuesto al de P que se encuentra a igual distancia de la recta m que P, y que está sobre una recta que pasa por P y es perpendicular a m.



Este procedimiento permite obtener un **único** punto P', correspondiente a la reflexión de un punto P con respecto a una recta m.

Comentarios

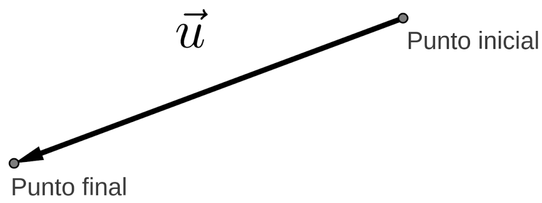
- La reflexión de una figura, es decir, de un conjunto de puntos, corresponde a la reflexión de cada uno de los puntos que la componen.

Ubicación

Taller: Homotecia y Teorema de Tales
Actividad: Transformaciones isométricas y congruencia

3. Vectores

Un vector corresponde a un objeto geométrico que **se puede representar** a través de un segmento en el que uno de sus extremos se denomina punto inicial y el otro, punto final. Se distingue gráficamente mediante una punta de flecha orientada hacia el punto final, y se puede denotar como $\vec{u}$.



Las características de un vector, se describen de la siguiente manera:

- **Dirección:** queda determinada por la recta que contiene al vector. Rectas paralelas tienen igual dirección.
- **Sentido:** una recta se puede recorrer solo en dos **sentidos**. El vector tiene el sentido que se determina al recorrer la recta desde el punto inicial hacia el final.
- **Magnitud**: corresponde a la longitud del segmento.

Comentarios

- Dos vectores son iguales si tienen la misma dirección, sentido y magnitud.

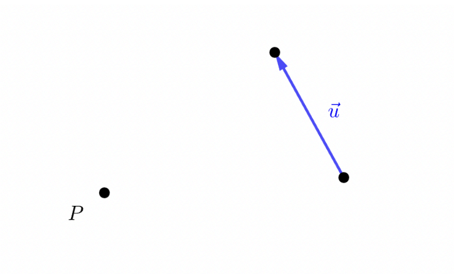
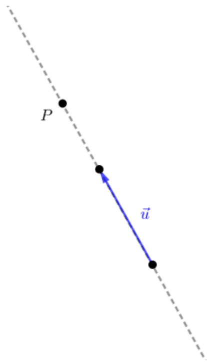
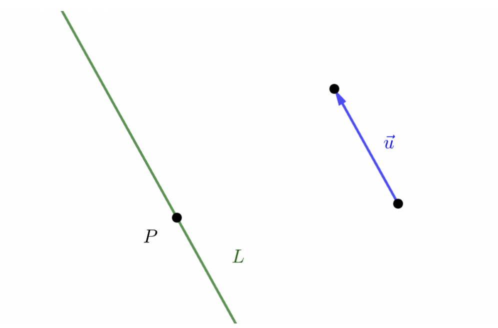
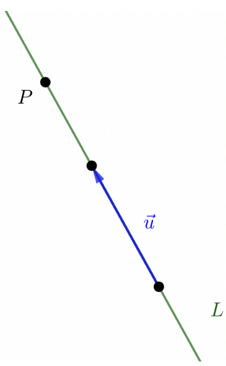
Ubicación

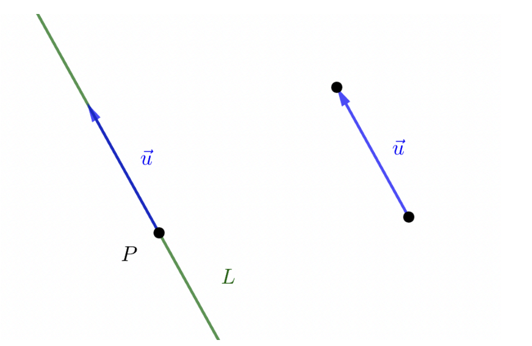
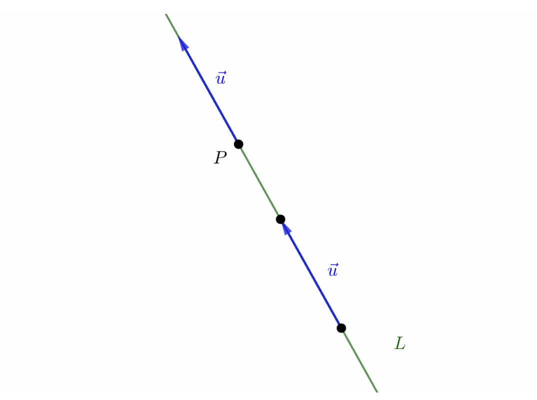
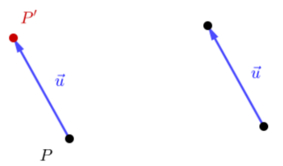
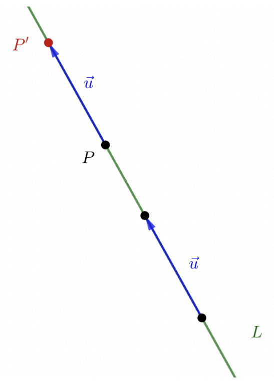
Taller: Homotecia y Teorema de Tales
Actividad: Transformaciones isométricas y congruencia

4. Traslación

Para definir la traslación de un punto P según un vector $\vec{u}$, se distinguen dos casos.

Primer caso

Primer caso	Segundo Caso
P se encuentra fuera de la recta que contiene a $\vec{u}$. 	P se encuentra sobre la recta que contiene a $\vec{u}$. 
1. Trazar la recta L que pasa por P y es paralela al vector $\vec{u}$. 	1. Trazar la recta L que pasa por P y contiene al $\vec{u}$. 
2. Sobre L trazar un vector igual a $\vec{u}$, cuyo punto inicial es P.	2. Sobre L trazar un vector igual a $\vec{u}$, cuyo punto inicial es P.

	
3. P' corresponde al punto final de dicho vector. 	3. P' corresponde al punto final de dicho vector. 

Comentarios

- La traslación de una figura, es decir, de un conjunto de puntos, corresponde a la reflexión de cada uno de los puntos que la componen.

Ubicación

Taller: Homotecia y Teorema de Tales
Actividad: Transformaciones isométricas y congruencia

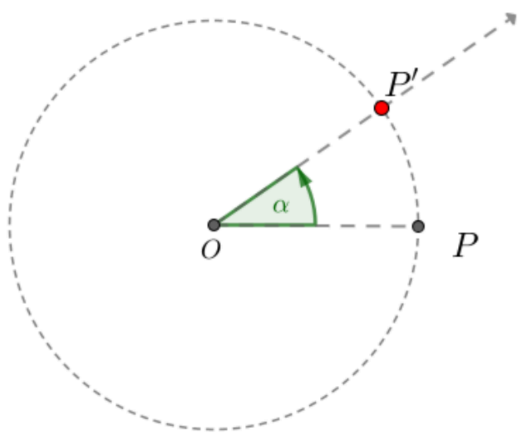
5. Rotación

Una rotación de ángulo α y centro O, asigna a cada punto P del plano, distinto de O, un punto P' del siguiente modo:

1° Con centro en O se construye una circunferencia que pasa por P.

2° Se traza una semirrecta con extremo en O, formando un ángulo α con el segmento $\overline{OP'}$, en sentido antihorario.

3° El punto P' es la intersección entre la semirrecta y la circunferencia.



La rotación del punto O es O.

Comentarios

- La convención del sentido de rotación es antihorario. En caso contrario se indica explícitamente que es en sentido horario.
- La rotación de una figura, es decir, de un conjunto de puntos, corresponde a la reflexión de cada uno de los puntos que la componen.

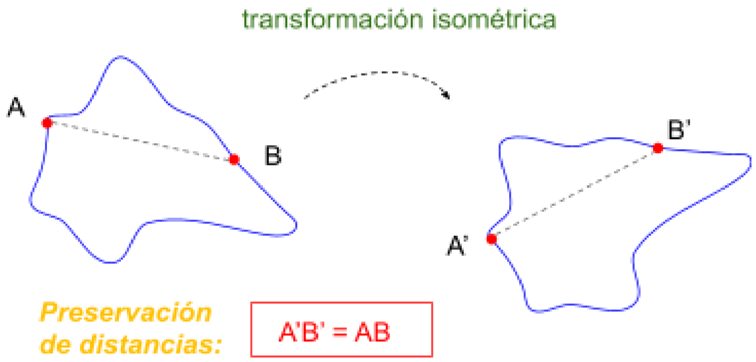
Ubicación

Taller: Homotecia y Teorema de Tales
Actividad: Transformaciones isométricas y congruencia

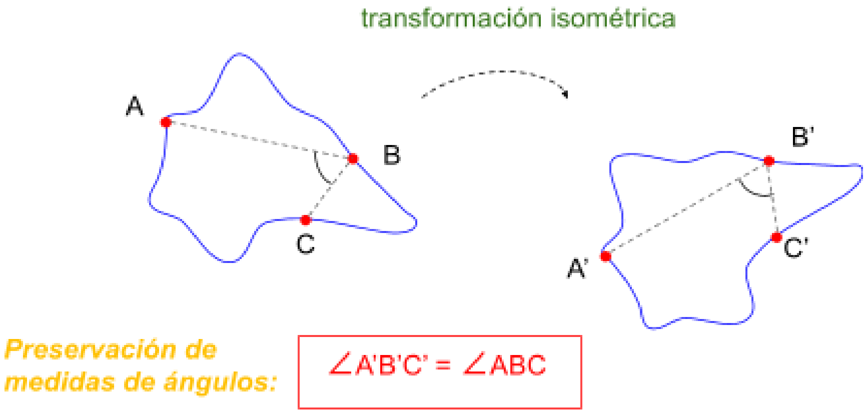
6. Transformaciones isométricas

Se denominan **transformaciones isométricas o isometrías** a las transformaciones geométricas que preservan distancias y medidas de ángulos.

Estas propiedades se refieren a la distancia entre dos puntos, y a la medida del ángulo entre tres puntos cualesquiera de la figura, sin que la figura posea necesariamente ni segmentos ni ángulos. La siguiente figura ilustra la transformación isométrica de una figura de color azul, y en particular de dos puntos A y B. La propiedad de preservación de distancia establece que $A'B' = AB$.



Además, si consideramos un tercer punto C, pese a que la figura es "curva", la propiedad de preservación de medidas de ángulos establece que $\angle A'B'C' = \angle ABC$.



Comentarios

- Las propiedades de preservación de distancias y medidas de ángulos se cumplen no solo para los puntos que forman una figura, sino que a todos los puntos del

plano. En efecto, dado que todas las transformaciones isométricas mueven todos los puntos del plano, cualquier conjunto de puntos que elijamos y sus respectivas imágenes cumplirán las propiedades de preservación de distancias y medidas de ángulos. ● Existen diversas transformaciones que pueden aplicarse sobre puntos o figuras en el plano. En todos los casos, podemos decir que la figura ha sido “transformada” o que se ha aplicado una “transformación”, sin embargo, si no mantienen distancias y medidas de los ángulos, no son transformaciones isométricas. ● La rotación, reflexión y traslación son transformaciones que son isométricas. En este caso, las propiedades de preservación de distancias y medidas de ángulos, se llaman **propiedades fundamentales** de la rotación, reflexión y traslación.
Ubicación Taller: Homotecia y Teorema de Tales Actividad: Transformaciones isométricas y congruencia

7. Propiedades de la traslación, rotación y reflexión

La traslación, rotación y reflexión cumplen las siguientes propiedades.

Propiedad	**Descripción**
Fundamental de preservación de distancias	La distancia entre la imagen de dos puntos, es igual a la distancia original.
Fundamental de preservación de medidas de ángulos	La imagen de un ángulo también es un ángulo, que además tiene la misma medida.
Colinealidad	La imagen de puntos colineales también son colineales.
Recta en recta	La imagen de una recta es una recta.
Segmento en segmento	La imagen de un segmento es un segmento.
Estar entre	Dado un punto que está ubicado entre los extremos de un segmento, su imagen está ubicada entre las imágenes de los extremos.

Comentarios

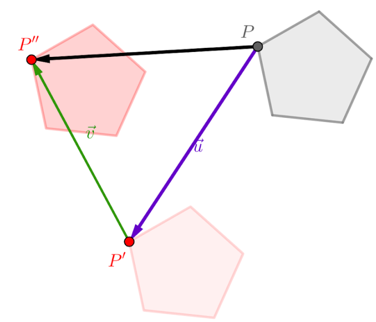
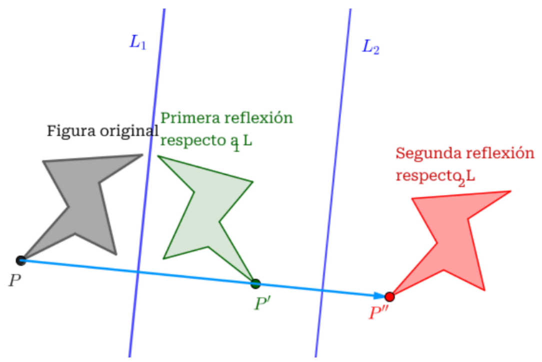
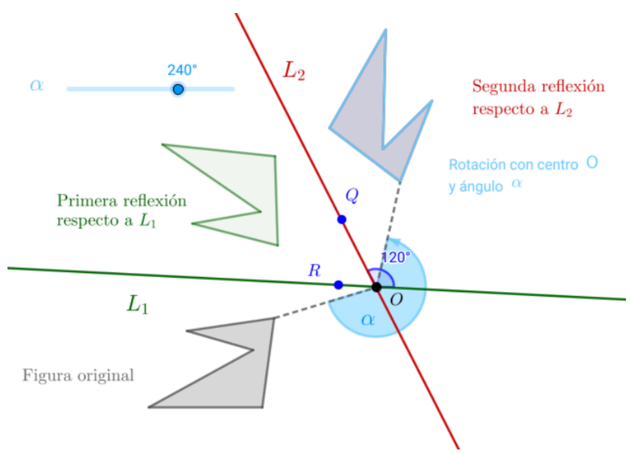
- Hay otras propiedades que también se cumplen, como que la imagen de un rayo es un rayo y que la imagen de una circunferencia es una circunferencia.

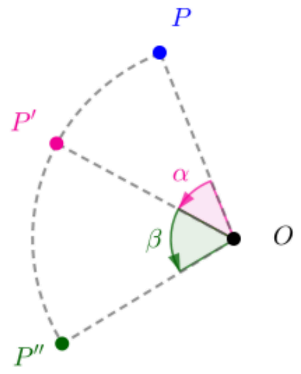
Ubicación

Taller: Homotecia y Teorema de Tales
Actividad: Transformaciones isométricas y congruencia

8. Composición de transformaciones isométricas

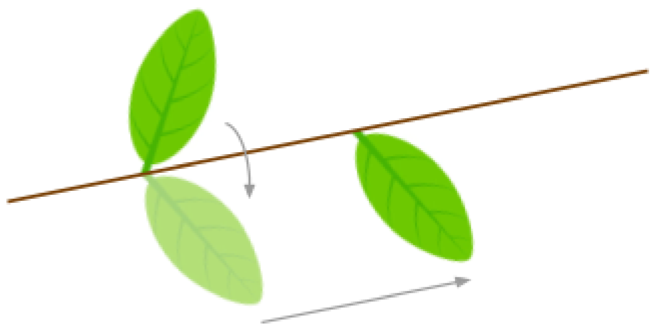
La **composición de transformaciones** consiste en aplicar dos o más transformaciones en el plano de manera consecutiva. La composición de dos isometrías del mismo tipo se pueden expresar como otra isometría. A continuación, se presentan algunos patrones que se pueden observar al componer transformaciones isométricas:

<table>
<tr><td>La composición de dos traslaciones de se puede expresar mediante una única traslación, según un nuevo vector.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>La composición de dos reflexiones cuyas rectas de reflexión son paralelas se puede expresar como una sola traslación.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>La composición de dos reflexiones cuyas rectas de reflexión son secantes se puede expresar como una única rotación de centro correspondiente a la intersección de las rectas, y ángulo correspondiente al doble del ángulo entre las rectas.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>La composición de dos rotaciones se</td><td></td></tr>
</table>

puede expresar como una **rotación** de mismo centro y ángulo de rotación correspondiente a la suma de los ángulos.	

Comentarios

- La composición de transformaciones isométricas también es isométrica.
- En la tabla de más arriba se abarcan solo algunas composiciones, pero es posible demostrar que en general, las composiciones de transformaciones isométricas equivalen a una **única** rotación, reflexión o traslación.
- Sin embargo, existe una composición de dos transformaciones isométricas que **no** se puede expresar como una **única** traslación, rotación o reflexión, consistente en una reflexión seguida de una traslación en la misma dirección de la recta de reflexión. Esta transformación se conoce como **reflexión deslizada**.



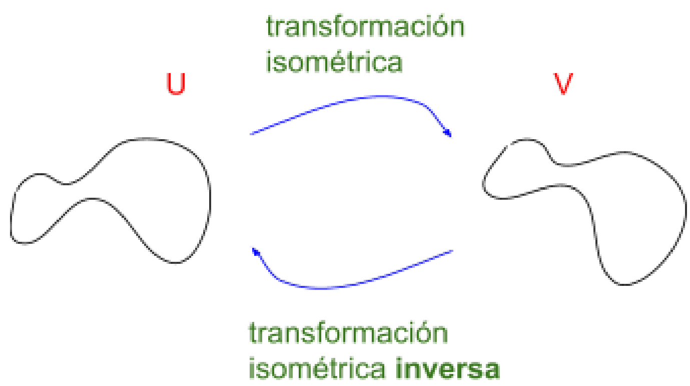
Ubicación

Taller: Homotecia y Teorema de Tales
Actividad: Transformaciones isométricas y congruencia

9. Identidad y transformación inversa

Las transformaciones isométricas que tienen como resultado la misma figura, es decir ningún punto de la figura se mueve, se conocen como **identidad**. Por ejemplo, rotar en 0° una figura corresponde a la identidad. Esto permite introducir la siguiente definición:

“Dada una transformación, llamaremos transformación isométrica **inversa,** a la que al componerse con la anterior resulta en la identidad”. Esto se ilustra en la siguiente imagen.



De esta manera,

- Una transformación inversa de una reflexión corresponde a una reflexión sobre la misma recta.
- Una transformación inversa de una traslación corresponde a una traslación de vector de misma magnitud, de misma dirección, y de sentido contrario.
- Una transformación inversa de una rotación corresponde a una rotación respecto al mismo centro, y ángulo de rotación de la misma magnitud y de sentido contrario.

Comentarios

- Si dos transformaciones son tales que la segunda es inversa de la primera, entonces la primera es inversa de la segunda. Es decir, son inversa una de otra.

Ubicación

Taller: Homotecia y Teorema de Tales
Actividad: Transformaciones isométricas y congruencia

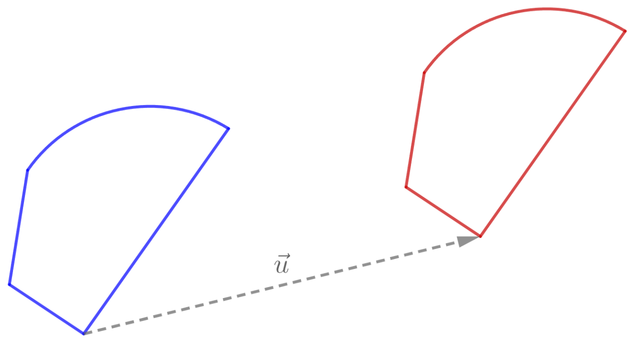
10. Definición de congruencia de figuras

Dos figuras U y V son **congruentes** si existe una transformación isométrica tal que la imagen de U es V. Usando símbolos, la expresión "U es congruente con V" se escribe $U \cong V$.

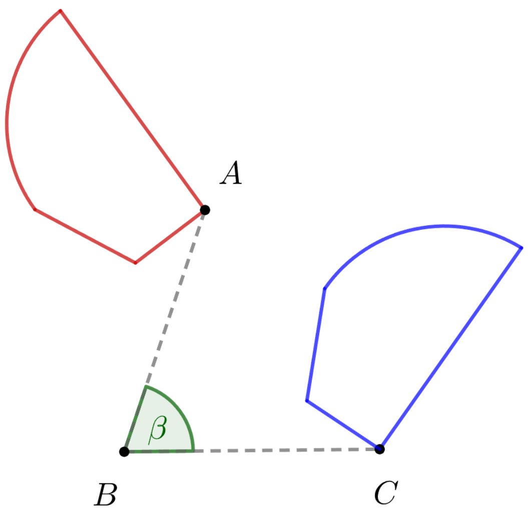
En particular, dos figuras son congruentes si existe una traslación, rotación, reflexión o composición de ellas, tal que la imagen de una es la otra.

En los siguientes ejemplos, las dos figuras son congruentes ya que existe una transformación isométrica que lleva una figura a la otra.

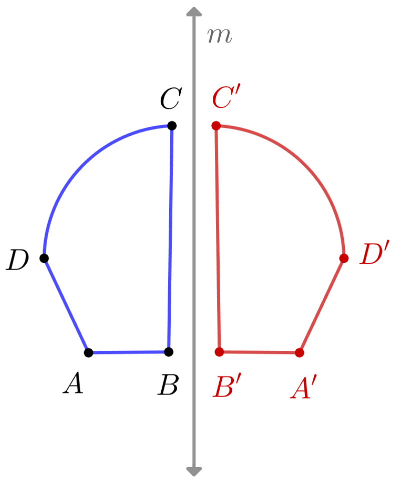
1. Dos figuras congruentes relacionadas mediante una traslación:



2. Dos figuras congruentes relacionadas mediante una rotación:



3. Dos figuras congruentes relacionadas mediante una reflexión:



Comentarios

- En algunas situaciones, es posible identificar una secuencia de transformaciones isométricas que permiten llevar una figura geométrica a otra, lo cual puede conceptualizarse como una única isometría.

Ubicación

Taller: Homotecia y Teorema de Tales
Actividad: Transformaciones isométricas y congruencia

11. Congruencia de figuras elementales

A continuación se presentan algunas figuras geométricas elementales y las condiciones que determinan su congruencia:

- Todos los puntos son congruentes entre sí.
- Todas las rectas son congruentes entre sí.
- Todos los rayos son congruentes entre sí.
- Todos los segmentos de igual medida son congruentes entre sí.
- Todos los ángulos de igual medida son congruentes entre sí.
- Todos las circunferencias de igual radio son congruentes entre sí.

La validez de estas afirmaciones se fundamenta en la capacidad de establecer que, en cada caso, es posible encontrar transformaciones isométricas que llevan una figura a otra del mismo tipo, lo que confirma la congruencia entre ellas.

Comentarios

- Por contraposición, dos segmentos o ángulos con medidas diferentes no pueden ser congruentes. Esto se debe a que no existe una transformación isométrica que pueda llevar uno al otro.

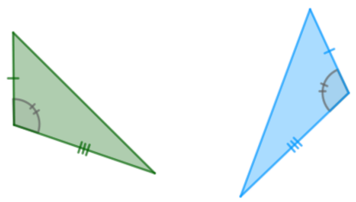
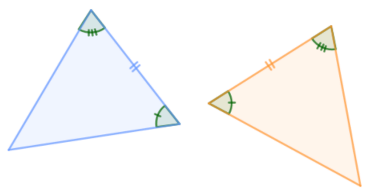
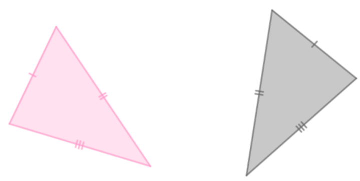
Ubicación

Taller: Homotecia y Teorema de Tales
Actividad: Transformaciones isométricas y congruencia

12. Criterios de congruencia de triángulos

Para demostrar la congruencia entre dos figuras cualesquiera se requiere, en general, recurrir a la definición, que implica mostrar que una figura es la imagen de otra mediante alguna transformación isométrica. En el caso específico de los triángulos, existe una forma de establecer su congruencia sin necesidad de aplicar directamente esta definición, que consiste en verificar la congruencia de todos los lados y ángulos correspondientes.

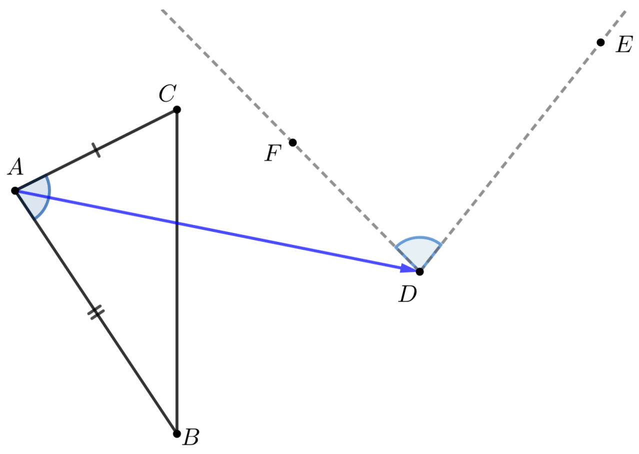
No obstante, tampoco es necesario examinar todos los tres pares de lados y tres pares de ángulos de los triángulos. Existen conjuntos de condiciones llamados **criterios de congruencia**, los cuales permiten determinar si dos triángulos son congruentes mediante la comparación de tres pares de lados o ángulos.

LAL	ALA	LLL
Dos triángulos son congruentes si dos lados y el ángulo comprendido entre ellos correspondientes tienen la misma medida.	Dos triángulos son congruentes si dos ángulos y el lado comprendido entre ellos correspondientes tienen la misma medida.	Dos triángulos son congruentes si sus tres lados correspondientes tienen la misma medida.
		

Comentarios

- En este taller los criterios de congruencia fueron demostrados mediante transformaciones isométricas. A modo de ejemplo, a continuación se resume la demostración del criterio LAL:

    1. Se identificaron dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ en donde $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $\angle A \cong \angle D$.
    2. Dado que los ángulos son congruentes, existe una isometría que lleva el ángulo en A al ángulo en D.
    3. Se demuestra que esta isometría lleva los otros dos vértices sobre los lados del ángulo en D, al considerar que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.
    4. Se concluye que si se cumple la condición LAL, los triángulos son congruentes.



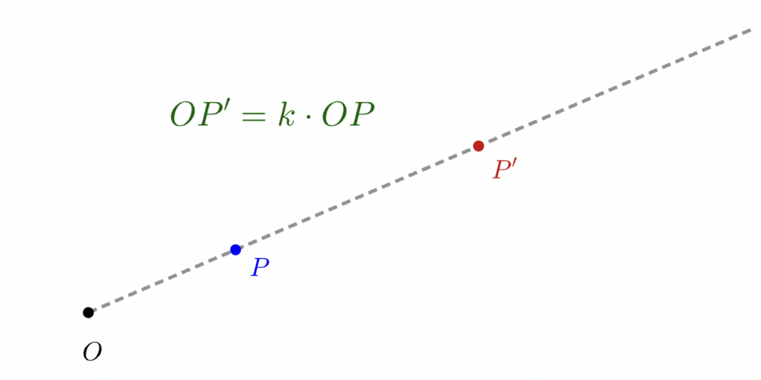
Ubicación

Taller: Homotecia y Teorema de Tales
Actividad: Homotecia

13. Homotecia

Una **homotecia** de **centro** O y **factor** $k > 0$ es una transformación en el plano en la que:

- La imagen de O es O.
- A cada punto P distinto de O, le asigna un único punto P' en la semirrecta $\overrightarrow{OP}$ tal que la distancia OP' es k veces la distancia OP, es decir, $OP' = k \cdot OP$.



Comentarios

- Notar que la definición anterior de homotecia es válida para $k > 0$, por lo que se conoce como homotecia "positiva".

- En la definición de homotecia se puede concluir directamente que:
  1. El único punto que no se mueve o es **"invariante"** en cualquier homotecia es el centro de homotecia.
  2. Un punto preimagen, su imagen, y el centro de homotecia son **colineales**.

- Distinguimos los siguientes casos.
  - Si $k > 1$ corresponde a una **ampliación** o también llamada dilatación, donde los puntos se encuentran más lejos del centro, y la figura es más grande.
  - Si $0 < k < 1$ corresponde a una **reducción** o también llamada contracción, donde los puntos se encuentran más cerca del centro, y la figura es más pequeña.
  - Si $k = 1$ corresponde a la **identidad**, donde todos los puntos se mantienen en el mismo lugar, y la figura mantiene su tamaño y ubicación.

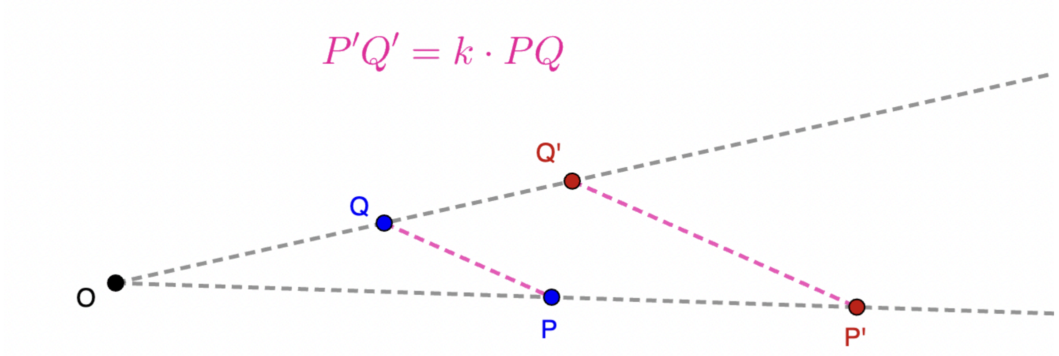
Ubicación

Taller: Homotecia y Teorema de Tales
Actividad: Homotecia

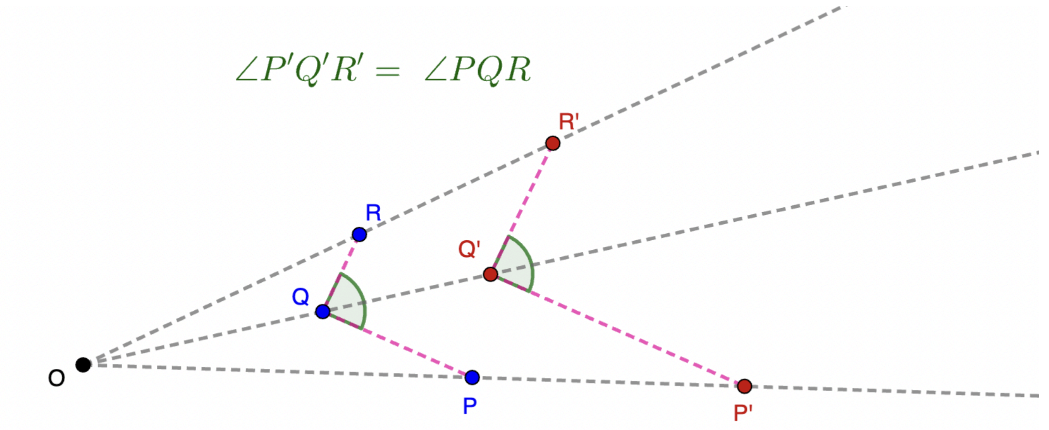
14. Propiedades fundamentales de la homotecia

Dada una homotecia de centro O y factor $k > 0$. Vamos a considerar las siguientes **propiedades fundamentales** de la homotecia sin demostración:

1. La **distancia** entre dos puntos imágenes es k veces la distancia entre sus preimágenes:
   "Sean P y Q dos puntos en el plano y P' Q' sus imágenes , entonces $P'Q' = k \cdot PQ$".



2. La homotecia preserva la **medida de los ángulos**:
   "Sea R otro punto en el plano y R' su imagen, entonces $\angle P'Q'R' \cong \angle PQR$".



Comentarios

- Las dos propiedades anteriores no se refieren a "segmentos" ni a "ángulos", sino que a la distancia entre puntos, y a las medidas de ángulos entre puntos. En particular, se refiere a la distancia entre P y Q, pero no a todos los puntos que están en el segmento $\overline{PQ}$. En relación al ángulo es similar, se refiere a la medida

	del ángulo formado entre los puntos P, Q y R y no a todos los puntos pertenecientes a los rayos que forman el ángulo.
Ubicación Taller: Homotecia y Teorema de Tales Actividad: Homotecia	

15. Propiedades de la homotecia

La siguiente tabla resume las propiedades de la homotecia de factor k positivo.

Propiedad	**Descripción**
Fundamental de distancias	La distancia entre la homotecia de dos puntos, es igual a la distancia original multiplicada por k.
Fundamental de ángulos	La medida del ángulo definido por la homotecia de tres puntos, es igual a la medida del ángulo entre los tres puntos originales.
Colinealidad	La homotecia de puntos colineales también son colineales.
Recta en recta	La homotecia de una recta es una recta.
Rayo en rayo	La homotecia de un rayo es un rayo.
Segmento en segmento	La homotecia de un segmento es un segmento.
Estar entre	Dado un punto que está entre otros dos, su homotecia está entre las imágenes de dichos puntos.
Paralelismo	La homotecia de una recta que no pasa por el centro de homotecia y tiene factor $k \neq 1$, es una recta paralela a la original.
Coincidencia	La homotecia de un recta que pasa por el centro de homotecia o que tiene factor $k = 1$, es una recta coincidente con la original.
Ángulo en ángulo	La homotecia de un ángulo es un ángulo.
Perpendicularidad	La homotecia de dos rectas perpendiculares corresponde a dos rectas perpendiculares.

Comentarios

- Las propiedades anteriores permiten demostrar que la homotecia de una circunferencia es una circunferencia, y de un polígono es otro polígono.

Ubicación

Taller: Homotecia y Teorema de Tales
Actividad: Homotecia

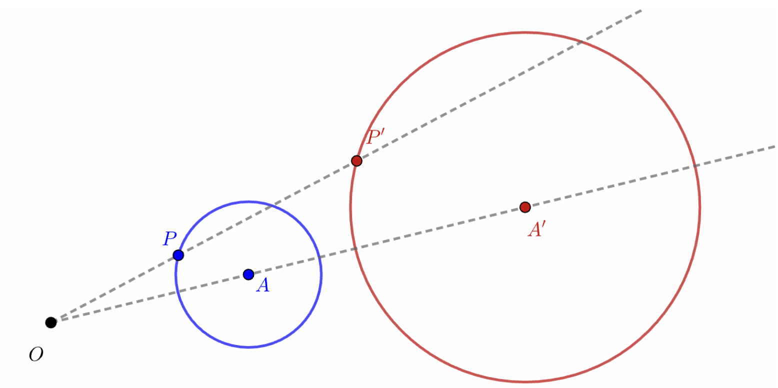
16. Homotecia de figuras elementales

La definición de homotecia es para puntos. Si se quisiera aplicar una homotecia a una figura geométrica cualquiera usando la definición, se tendría que aplicar la homotecia a los infinitos puntos que la componen.

Sin embargo, usando las propiedades de homotecia, en algunos casos es posible obtener la imagen de una figura a partir de un número finito de puntos. Por ejemplo, dado que la homotecia lleva segmentos en segmentos, rectas en rectas, rayos en rayos y ángulos en ángulos, y que por dos puntos pasa una única recta o rayo, se tiene que:

1. Para realizar la homotecia de un segmento, basta realizar la homotecia de sus extremos y luego trazar el segmento resultante.
2. De forma similar se puede proceder para obtener la homotecia de rectas y rayos.
3. De la misma manera, para realizar la homotecia de un ángulo, basta hacer la homotecia de su vértice y dos puntos sobre sus rayos, y luego trazar el ángulo.
4. Para realizar la homotecia de un polígono, basta hacer la homotecia de sus vértices y luego unirlos en el mismo orden.

Además, dado que la homotecia de una circunferencia es una circunferencia, entonces para realizar la homotecia de una circunferencia en el que se conoce su centro, basta con efectuar la homotecia de su centro A y de un punto P sobre ella, y enseguida trazar la circunferencia de radio $A'P'$.



Comentarios

- Si bien las homotecias de algunas figuras geométricas parecen obvias, esto se justifica con las propiedades de la homotecia.

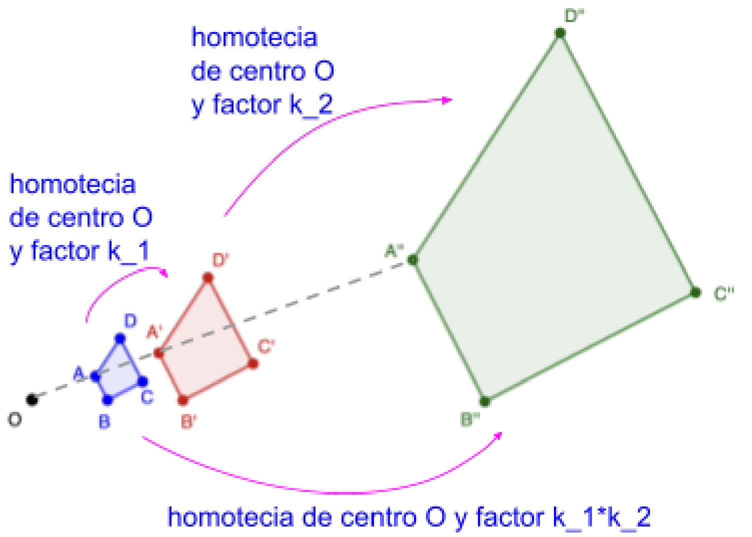
Ubicación

Taller: Homotecia y Teorema de Tales
Actividad: Homotecia

17. Composición de homotecias

La transformación correspondiente a dos o más homotecias consecutivas se denomina **composición** de homotecias.

En particular, la composición de dos homotecias respecto a un mismo centro O y factores k_1 y k_2, también corresponde a una homotecia de centro O y factor $k = k_1 \cdot k_2$.



Evidentemente la composición de n homotecias de centro O y factores $k_1, k_2, \cdots, k_n$, también es una homotecia de centro O y factor $k = k_1 \cdot k_2 \cdot \cdots \cdot k_n$.

Una propiedad que se desprende de esto, es que la composición de homotecias con el mismo centro es **conmutativa**. Es decir, da lo mismo el orden en que se apliquen las homotecias, el resultado es el mismo. En este taller no se abordó la composición de homotecias de distinto centro.

Ubicación

Taller: Homotecia y Teorema de Tales
Actividad: Homotecia

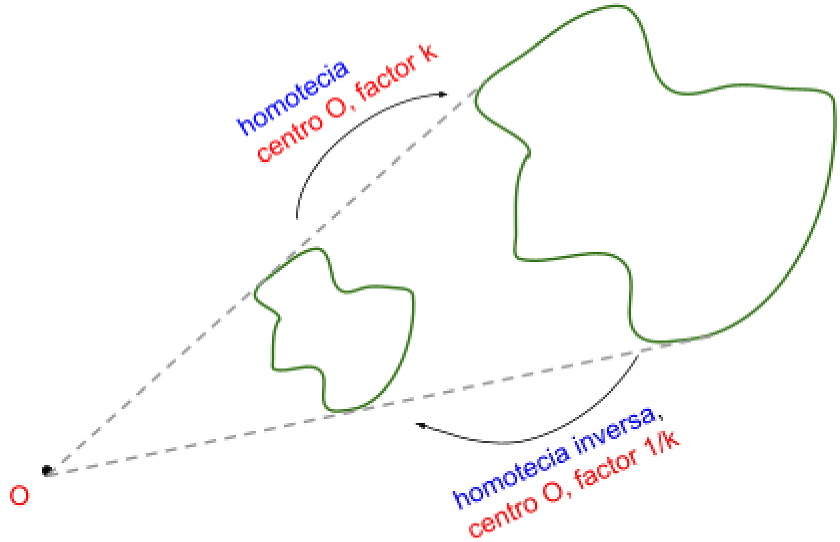
18. Identidad y homotecia inversa

La composición de dos homotecias con el mismo centro, una de factor k, seguida de la otra de factor $\frac{1}{k}$, corresponde a una homotecia del mismo centro y de factor $k \cdot \frac{1}{k} = 1$, es decir la homotecia **identidad**.

En otras palabras, si efectuamos una homotecia de factor k, basta con realizar una homotecia de mismo centro y factor $\frac{1}{k}$ para volver a la figura original. Esto permite introducir la siguiente definición:

"Dada una homotecia, llamaremos homotecia **inversa,** a la que al componerse con la anterior resulta en la identidad".

De esta manera, una homotecia **inversa** de una homotecia de centro O y factor k, es la homotecia del mismo centro O y factor $\frac{1}{k}$. La siguiente imagen ilustra esto.



Comentarios

- Notemos que por conmutatividad de la composición de homotecias del mismo centro, si tenemos dos homotecias tales que la segunda es inversa de la primera, entonces la primera es inversa de la segunda. Es decir, son inversa una de otra.

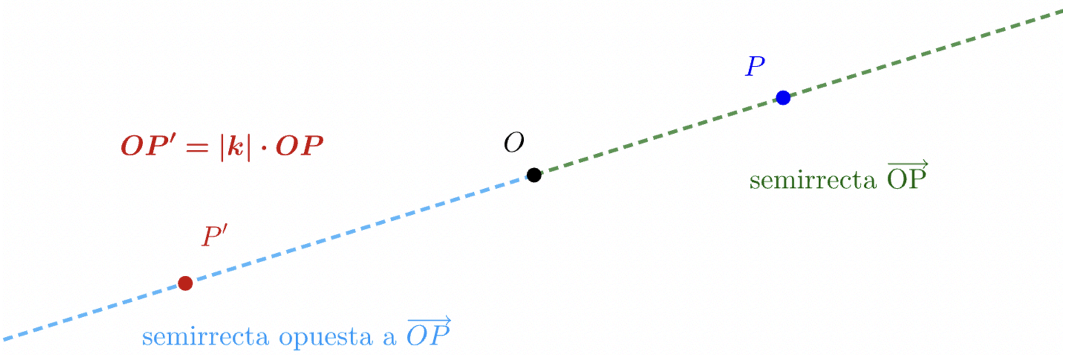
Ubicación

Taller: Homotecia y Teorema de Tales
Actividad: Homotecia

19. Homotecia negativa

Una **homotecia** de **centro** O y **factor** $k < 0$ es una transformación en el plano en la que:

- La imagen de O es O.
- A cada punto P distinto de O, le asigna un único punto P' en la semirrecta **opuesta** a $\overrightarrow{OP}$ tal que la distancia OP' es $|k|$ veces la distancia OP, es decir, $OP' = |k| \cdot OP$.

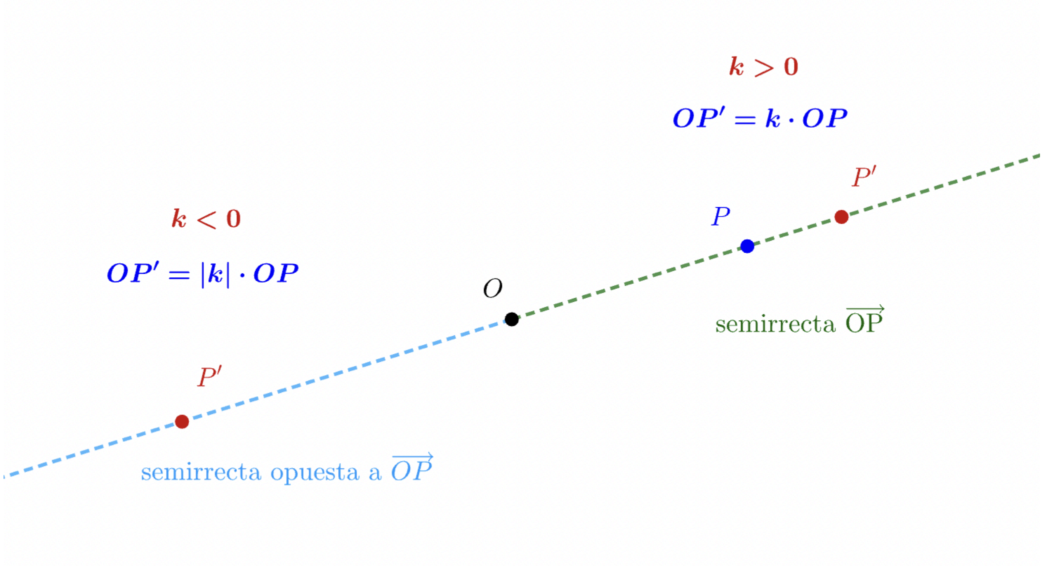


Comentarios

- Notar que la definición anterior de homotecia es válida para $k < 0$, por lo que se conoce como homotecia "negativa".

- Notemos que, al aplicar una homotecia de centro O y factor k negativo a un punto P, la distancia OP' es la misma que si el factor fuera positivo. Esto ocurre porque en la definición de homotecia de factor negativo se utiliza el valor absoluto de k.

- La diferencia entre una homotecia con factor negativo y una con factor positivo radica en la ubicación del punto P'. Con un factor negativo, P' se sitúa en la semirrecta opuesta a aquella en la que se encontraría si k fuera positivo, como se ilustra en la siguiente imagen.



- Las propiedades fundamentales de distancias y de ángulos de la homotecia positiva se siguen cumpliendo para la homotecia negativa, en la que las distancias se multiplican por el valor absoluto de k en vez de k.
- El resto de las propiedades también se cumplen: la homotecia negativa satisface las propiedades de colinealidad, recta en recta, rayo en rayo, segmento en segmento, circunferencia en circunferencia, estar entre, paralelismo, coincidencia, ángulo en ángulo y perpendicularidad.

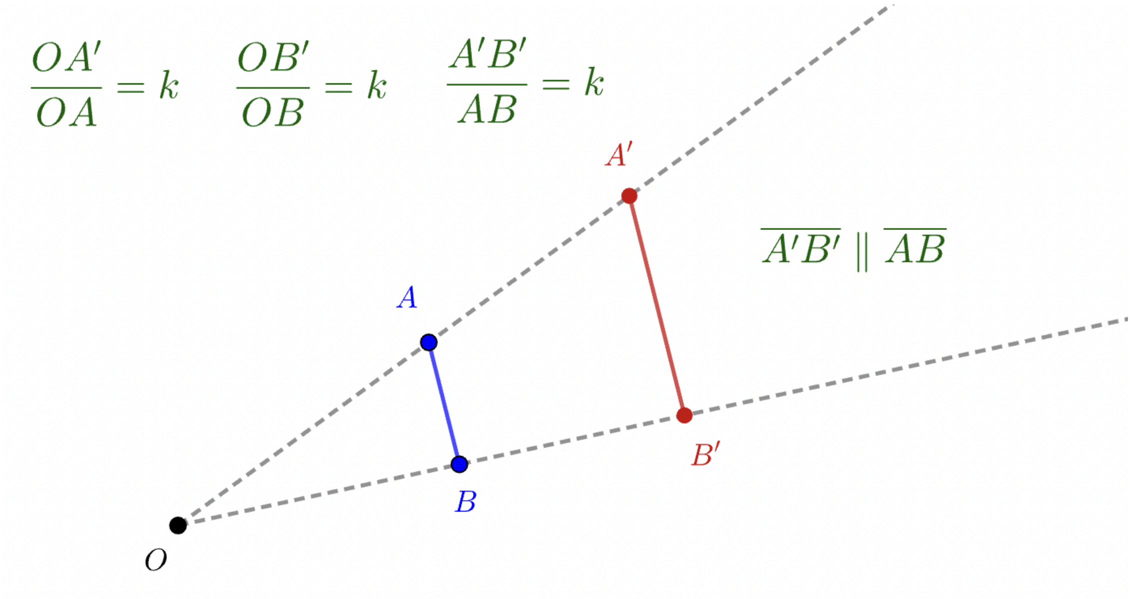
Ubicación

Taller: Homotecia y Teorema de Tales
Actividad: Homotecia

20. Nomenclatura factor y razón de homotecia

Hasta el momento en homotecias positivas hemos utilizado la nomenclatura **factor** de homotecia para referirnos al escalar por el cual se multiplican las distancias.

Si ahora simplemente nos enfocamos en la **razón** entre las distancias resultantes de una homotecia y las distancias originales, vemos que $\frac{OA'}{OA} = k$, $\frac{OB'}{OB} = k$ y $\frac{A'B'}{AB} = k$.



En resumen, en una homotecia con razón $k > 0$, **todas** las razones entre distancias resultantes y las distancias originales son siempre iguales a k.

Estas dos formas son equivalentes, y hablaremos de “factor” o “razón” de homotecia para referirnos a lo mismo. Sin embargo, plantear el factor como razón nos permitirá identificar las proporciones entre distancias que se generan en una homotecia.

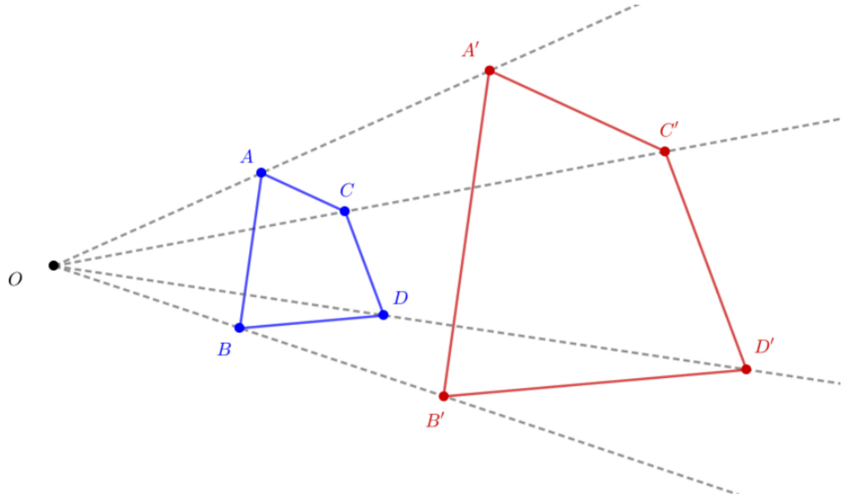
Ubicación

Taller: Homotecia y Teorema de Tales
Actividad: Teorema de Tales

21. Proporciones ligadas a la homotecia

En una homotecia con razón $k > 0$, todas las razones entre distancias resultantes y las distancias originales son siempre iguales a k. Así, por ejemplo, en la siguiente homotecia se tendría:

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{C'D'}{CD} = \cdots = k$$



Si establecemos la igualdad entre solo dos pares de distancias, tendríamos por ejemplo:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD}$$

Notemos que esto es válido para cuatro puntos cualesquiera A, B, C y D en el plano, con $A \neq B$ y $C \neq D$, y en particular para cualquier par de distancias entre puntos y las distancias resultantes de la homotecia. Así por ejemplo, podemos verificar que también se cumple la siguiente igualdad que involucra al centro O:

$$\frac{OD'}{OD} = \frac{B'C'}{BC}$$

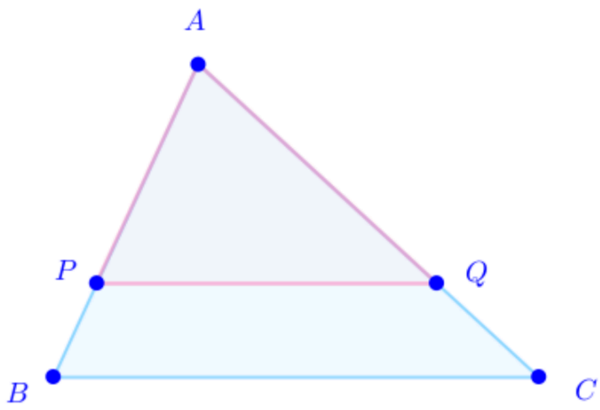
Al plantear este tipo de igualdades estamos estableciendo una **proporción**. En la igualdad anterior omitimos explícitamente la razón de homotecia k, para solo quedarnos con una proporción entre las longitudes de cuatro segmentos.

Ubicación

Taller: Homotecia y Teorema de Tales
Actividad: Teorema de Tales

22. Primer Teorema de Tales

Sea un $\triangle ABC$ y dos puntos P y Q sobre dos de sus lados.



Primer Teorema de Tales:

Si $\overline{PQ}$ es **paralelo** a $\overline{BC}$, entonces se satisface la proporción

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$$

Comentarios

- El Primer Teorema de Tales establece que se cumple la proporción

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{AP}{PB}$$

- Es importante destacar que estas razones no son iguales a la razón de homotecia k, aunque dependen de ella. En efecto, podemos demostrar que si la razón de homotecia es $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = k$, entonces

$$\frac{AP}{PB} = \frac{k}{1-k} = \frac{AQ}{QC}$$

- De forma similar, en la variante del Primer Teorema de Tales $\frac{AB}{PB} = \frac{AC}{QC}$, las razones tampoco son iguales a k, sino que a $\frac{1}{1-k}$. Más aún, en la variante

$\frac{AP}{AQ} = \frac{PB}{QC}$, la razón tampoco es igual a k, ni tampoco depende de ella, sino que es igual a $\frac{AB}{AC}$.

- Usualmente, el teorema de Tales se enuncia sin hacer explícita la relación entre esta proporción y la razón de homotecia, sino que solo estableciendo la proporción entre cuatro longitudes de segmentos.

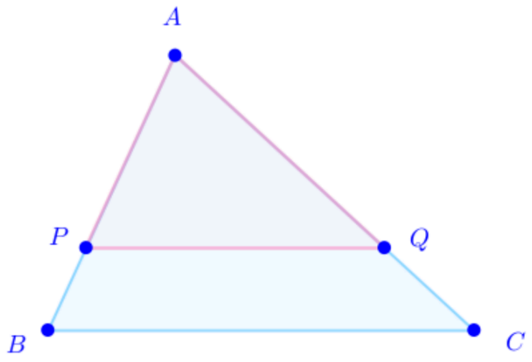
Ubicación

Taller: Homotecia y Teorema de Tales
Actividad: Teorema de Tales

23. Recíproco del Primer Teorema de Tales

Recíproco del Primer Teorema de Tales:

Consideremos un $\triangle ABC$ y dos puntos P y Q sobre sus lados, tales que $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$, entonces $\overline{PQ}$ es **paralelo** a $\overline{BC}$.



Comentarios

- Notemos que en el Teorema de Tales y el Recíproco, también se cumple la "Propiedad de existencia de homotecia": Si $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$, o si $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$, entonces en ambos casos existe una homotecia que transforma el triángulo $\triangle ABC$ en $\triangle APQ$.

- Notemos que en ambos Teoremas, se cumple también la "Propiedad de existencia de homotecia": Si $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$, o si $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$, entonces en ambos casos existe una homotecia que transforma el triángulo $\triangle ABC$ en $\triangle APQ$.

- En el punto anterior, la proporción $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ puede ser reemplazada por cualquiera de sus variantes equivalentes, como

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{PB}{QC}, \quad \frac{AB}{PB} = \frac{AC}{QC}, \quad \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$$

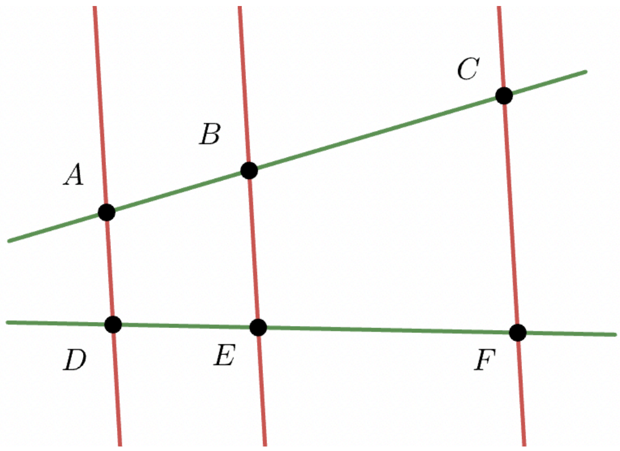
Ubicación

Taller: Homotecia y Teorema de Tales
Actividad: Teorema de Tales

24. Segundo Teorema de Tales

Segundo Teorema de Tales

Sean dos rectas no paralelas cortadas por tres rectas paralelas como se ilustra a continuación. El Segundo Teorema de Tales establece que se cumple la siguiente proporción.



$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

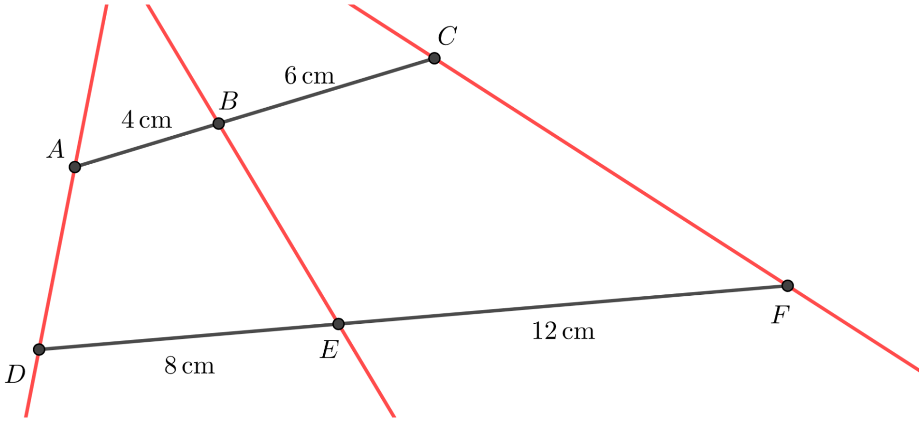
Comentarios

- Por propiedades de las proporciones, es posible a partir de la proporción anterior establecer otras proporciones, que son variantes del mismo Segundo Teorema de Tales:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}, \qquad \frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}, \qquad \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}, \ldots$$

- Notemos que, al igual que el Primer Teorema de Tales, el Segundo Teorema de Tales y cualquiera de sus variantes, hace intervenir longitudes de segmentos sobre las rectas **no** paralelas. No establece ningún resultado respecto a los segmentos paralelos.

- El recíproco de este Teorema en general no es cierto: Si se cumple la proporción $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ o cualquiera de sus variantes, no es suficiente para afirmar que las rectas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son paralelas, de hecho en general no lo son. Por ejemplo:



- Para que sí ocurra que sean paralelas, debe cumplirse dicha proporción, y saber además de antemano que dos de las rectas son paralelas, para concluir que la tercera también lo es.

Ubicación

Taller: Homotecia y Teorema de Tales
Actividad: Teorema de Tales