SUMA Y SIGUE

MATEMÁTICA EN LÍNEA

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

CMMEdu Laboratorio de Educación Centro de Modelamiento Matemático

Ministerio de Educación Gobierno de Chile

PLAN DE REACTIVACIÓN EDUCATIVA seamos Comunidad

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

FICHAS TALLER 4:
CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS

INTRODUCCIÓN

En este taller, se exploraron construcciones geométricas a través del plegado de papel y el uso de regla y compás. Las actividades se enfocaron en desarrollar procedimientos de construcción y argumentos deductivos para validarlos. Estos métodos se emplearon luego para construir elementos secundarios de triángulos y para realizar transformaciones isométricas mediante regla y compás.

Las fichas que conforman este apartado contemplan los siguientes contenidos disciplinares:

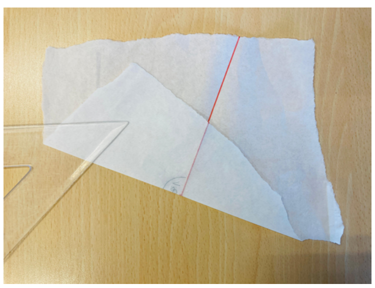
- Construcciones de ángulos con plegado de papel
- Construcciones geométricas con plegado de papel
- Normas de construcción con regla y compás
- Puntos constructibles
- Notación utilizada para describir una construcción
- Construcciones básicas con regla y compás
- Demostraciones de las construcciones geométricas
- Elementos secundarios del triángulo
- Recta de Euler
- Construcción de triángulos
- Transformaciones isométricas con regla y compás

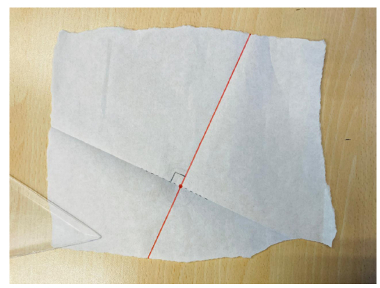
1. Construcciones de ángulos con plegado de papel

Mediante el plegado de papel es posible construir ángulos de diferentes medidas. A continuación, se describen algunas de estas construcciones.

Para un ángulo de 90°

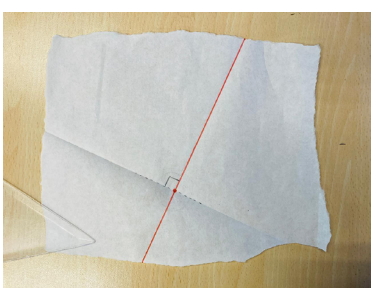
Se dibuja una línea recta sobre el papel y se marca un punto en ella. Luego, se pliega el papel de modo que la línea se alinee consigo misma, asegurándose de que el pliegue pase por el punto marcado.

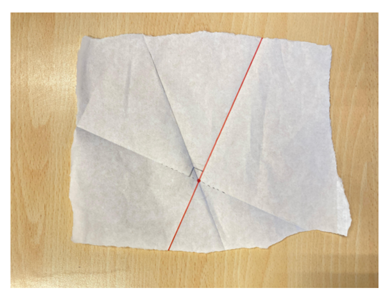




Para un ángulo de 45°

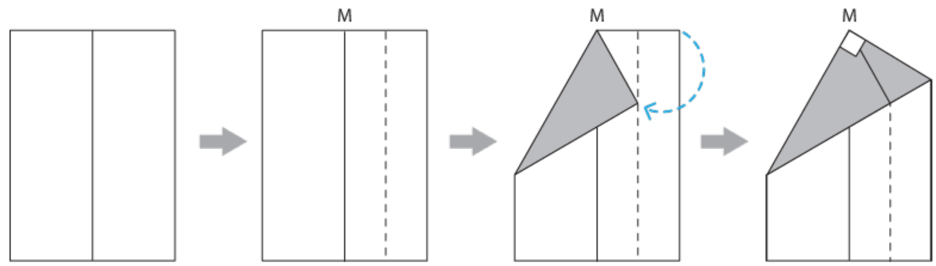
Después de haber construido un ángulo de 90° siguiendo los pasos anteriores, hay que plegar el papel para que los rayos del ángulo recto coincidan. Esto dividirá el ángulo recto en dos ángulos congruentes, cada uno de 45°.

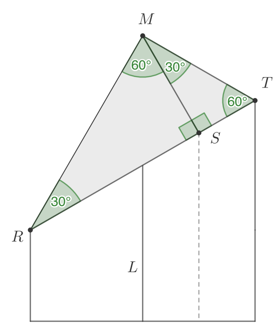




Para un ángulo de 60° y 30°

La siguiente secuencia de dobleces de un papel rectangular produce ángulos de 90°, 60° y 30°.





Comentarios

- La técnica de construir ángulos rectos doblando papel se introduce temprano en la educación escolar. Es una actividad concreta que ayuda a los estudiantes a comprender y describir las características de las figuras geométricas. Les permite internalizar la noción de ángulo recto de manera tangible antes de profundizar en su comprensión conceptual.
- Los procedimientos para construir ángulos mediante el plegado de papel pueden ser justificados con argumentos geométricos que se centran principalmente en la idea de reflexión generada por el doblez y la congruencia de triángulos.

Ubicación

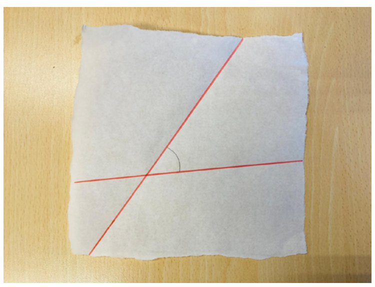
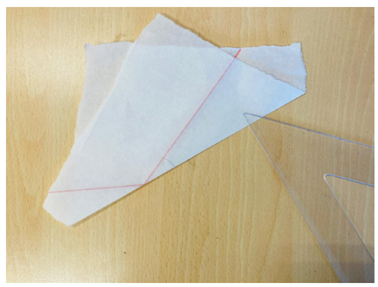
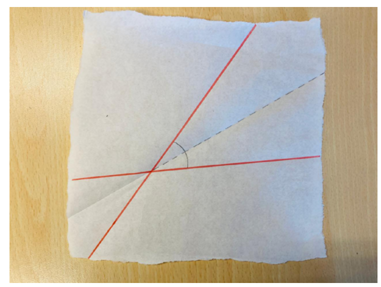
Taller: Construcciones geométricas
Actividad: Construcciones con papel

2. Construcciones geométricas con plegado de papel

El plegado de papel permite construir varios objetos geométricos. A continuación, se describen los procedimientos para construir algunos de ellos.

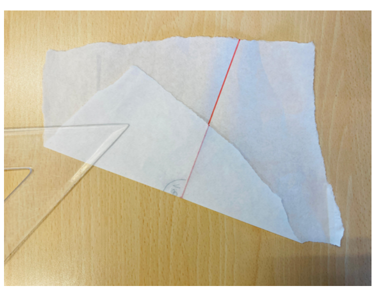
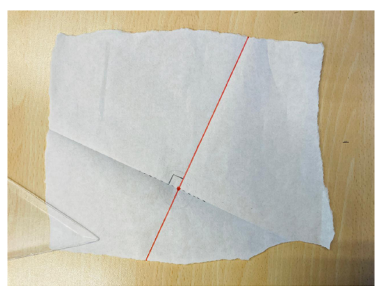
Bisectriz

Para hallar la bisectriz de un ángulo, se pliega el papel de modo que los lados del ángulo coincidan. Esto divide el ángulo en dos ángulos congruentes, lo que convierte al pliegue en la bisectriz del ángulo.

Perpendicular

Para construir una perpendicular a una recta L que pase por un punto P, se puede hacer un pliegue que haga coincidir la recta consigo misma y que pase por L.

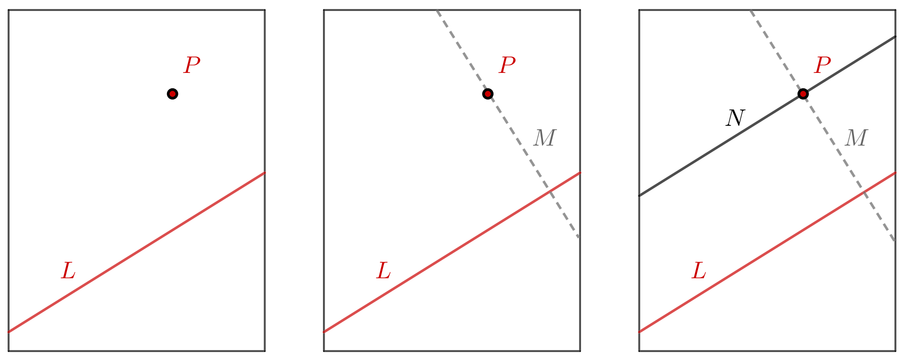



Paralela

Para construir una paralela a una recta L que pase por un punto P fuera de ella, se puede seguir el siguiente procedimiento:

1° Hacer un pliegue que haga coincidir la recta L consigo misma y que pase por P. De esa forma, se obtiene una recta M perpendicular a L.

2° Hacer otro pliegue que haga coincidir la recta M consigo misma y que pase por P. Esto permite obtener una recta N perpendicular a M. De este modo, N es una recta paralela a L, que pasa por P.



Comentarios

- El empleo del plegado de papel brinda la oportunidad de visualizar de manera concreta las propiedades implicadas en cada construcción. Esto facilita la comprensión y deducción de los razonamientos utilizados para argumentar y justificar los resultados obtenidos.

- Los argumentos que respaldan estas construcciones se basan principalmente en las propiedades de la reflexión y la congruencia de triángulos. Es crucial que los estudiantes participen activamente en la comprensión y justificación de los pasos involucrados en las construcciones mediante el plegado de papel.

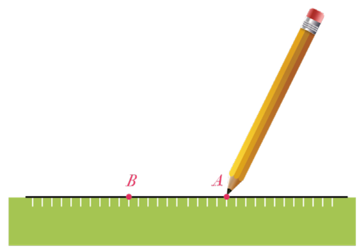
Ubicación

Taller: Construcciones geométricas
Actividad: Construcciones con papel

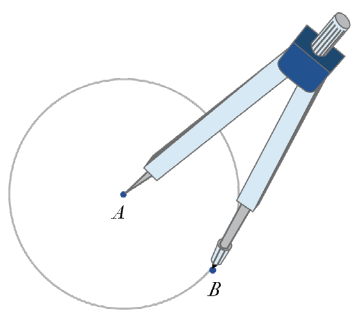
3. Normas de construcción con regla y compás

En la geometría euclidiana las construcciones con regla y compás se llevan a cabo bajo ciertas normas.

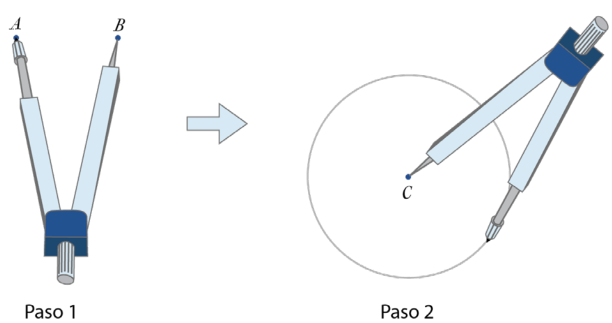
- Sólo es posible trazar una línea recta con la regla cuando se disponen de dos puntos.



- Se pueden trazar circunferencias con el compás si:
    - Se dispone de dos puntos. Un punto es el centro y la distancia entre ambos el radio.



    - Se dispone de tres puntos. Un punto es el centro y la distancia entre los otros dos es el radio.



Comentarios

Las normas de construcción garantizan que las rectas o circunferencias quedan unívocamente determinadas. Es por esto que para trazar una recta se requieren dos puntos, mientras que para una circunferencia se necesita un punto como centro y una distancia como radio.

Ubicación

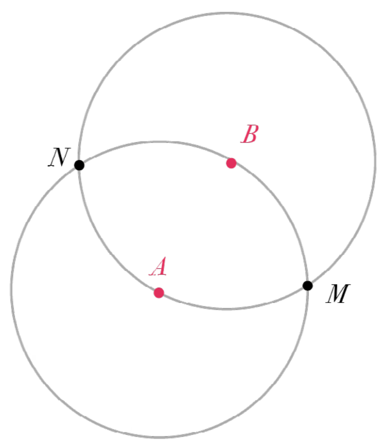
Taller: Construcciones geométricas
Actividad: Construcciones con regla y compás.

4. Puntos constructibles

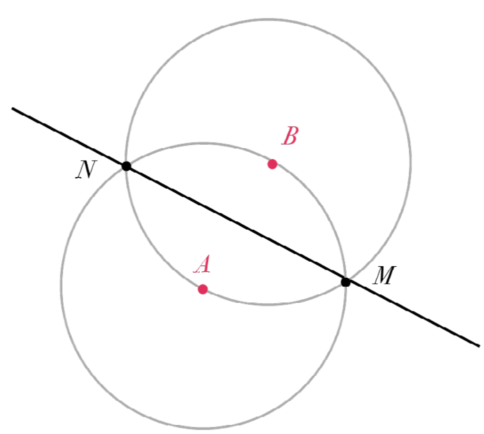
En las construcciones con regla y compás, se denominan **puntos constructibles** a aquellos puntos que cumplen alguna de las siguientes condiciones:

- Están dados desde el inicio.
- Se obtienen de la intersección entre rectas y/o circunferencias que se construyen siguiendo las normas de uso de la regla y el compás.

En el siguiente ejemplo, partimos de los puntos dados A y B, trazando dos circunferencias con centros en A y B, respectivamente, y radios iguales a la distancia entre ellos. La intersección de estas circunferencias proporciona dos nuevos puntos constructibles, que llamaremos M y N.

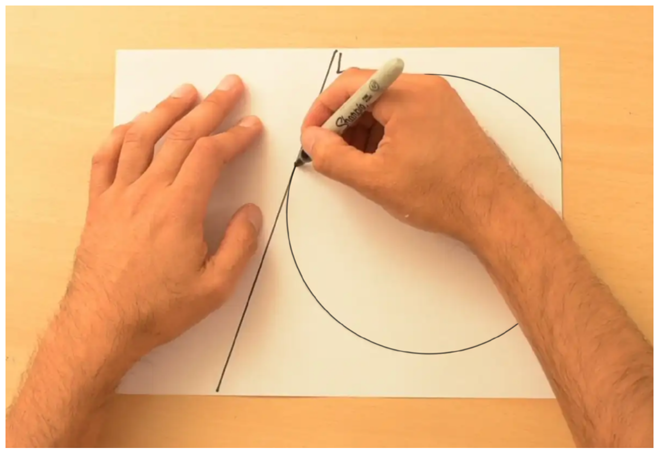


Los puntos constructibles pueden ser empleados para llevar a cabo otras construcciones geométricas. Por ejemplo, podemos trazar la recta que pasa por los puntos M y N.



Comentarios

- Un error común al realizar construcciones con regla y compás es la elección arbitraria de puntos que deben cumplir una determinada condición, basada únicamente en la observación visual. Por ejemplo, seleccionar al "ojo" el punto donde una recta es tangente a una circunferencia.



Para hacer la construcción es necesario emplear exclusivamente:

- **Puntos constructibles**: aquellos dados inicialmente o que surgen de la intersección de las rectas y circunferencias construidas previamente.

- **Puntos auxiliares**: puntos seleccionados de manera arbitraria que se utilizan para llevar a cabo ciertas construcciones. Estos puntos no cumplen ninguna condición especial, son solo utilizados para trazar circunferencias o rectas.

Ubicación

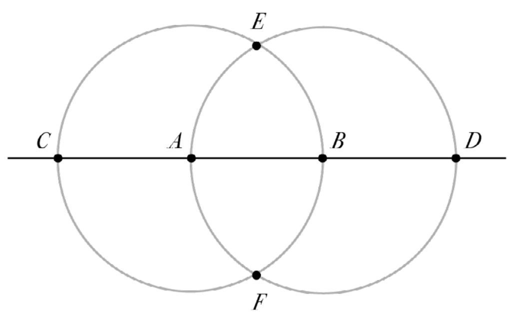
Taller: Construcciones geométricas
Actividad: Construcciones con regla y compás.

5. Notación utilizada en describir una construcción

Utilizar notación matemática para describir los objetos geométricos de las construcciones facilita la comunicación precisa y concisa de los pasos, en contraste a las descripciones extensas que surgen al emplear lenguaje natural.

En el siguiente ejemplo se presentan los pasos de una construcción usando notación matemática y su descripción verbal, donde se puede apreciar la ventaja de utilizar una notación compacta.

Construcción:



Pasos de la construcción:

Notación matemática	Descripción en lenguaje natural
1. $\overleftrightarrow{AB}$	Trazar recta $\overleftrightarrow{AB}$-
2. (A, AB)	Trazar circunferencia de centro en A y radio AB.
3. $\overleftrightarrow{AB} \cap (A, AB) = \{C\}$	Ubicar punto C en la intersección de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y la circunferencia de centro en A y radio AB.
4. (B, AB)	Trazar circunferencia de centro en B y radio AB.
5. $\overleftrightarrow{AB} \cap (B, AB) = \{D\}$	Ubicar punto D en la intersección de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y la circunferencia de centro en B y radio AB.
6. $(A, AB) \cap (B, AB) = \{E, F\}$	Ubicar puntos E y F en la intersección de las circunferencias de centro A y B, y radio AB.

Ubicación

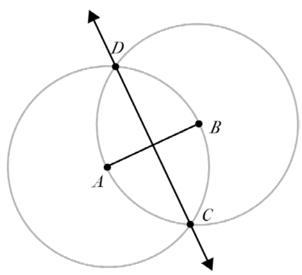
Taller: Construcciones geométricas
Actividad: Construcciones con regla y compás.

6. Construcciones básicas con regla y compás

Simetral de un segmento

Dado el segmento $\overline{AB}$, se quiere construir su simetral:

Construcción



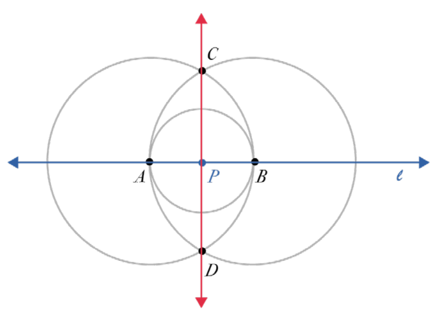
Pasos de la construcción

1. $(A,\ AB)$
2. $(B,\ AB)$
3. $(A,\ AB) \cap (B,\ AB) = \{C,\ D\}$
4. $\overleftrightarrow{CD}$

Perpendicular por un punto en la recta

Dada la recta ℓ y un punto P en ella, se desea construir la recta perpendicular a ℓ que pase por P.

Construcción



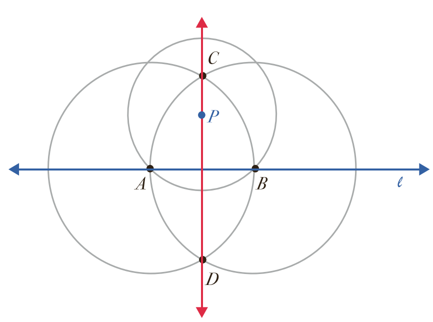
Pasos de la construcción

1. Seleccionar punto auxiliar $A \in \ell$, distinto de P .
2. $(P,\ AP)$
3. $(P,\ AP) \cap \ell = \{B\}$
4. $(A,\ AB)$
5. $(B,\ AB)$
6. $(A,\ AB) \cap (B,\ AB) = \{C,D\}$
7. $\overleftrightarrow{CD}$

Perpendicular por un punto fuera de la recta

Dada la recta ℓ y un punto P fuera de ella, se desea construir la recta perpendicular a ℓ que pase por P.

Construcción



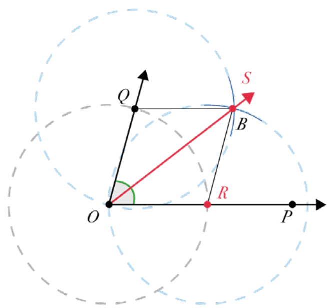
Pasos de la construcción

1. Seleccionar punto auxiliar A en ℓ.
2. $(P,\ AP)$
3. $(P,\ AP) \cap \ell = \{B\}$
4. $(A,\ AB)$
5. $(B,\ AB)$
6. $(A,\ AB) \cap (B,\ AB) = \{C,D\}$
7. $\overleftrightarrow{CD}$

Bisectriz

Dada el ángulo $\angle POQ$, se desea construir su bisectriz.

Construcción



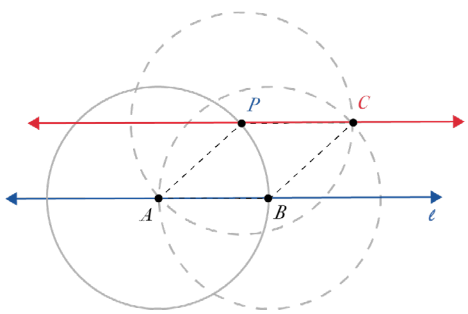
Pasos de la construcción

1. $(O,\ OQ)$
2. $(O,\ OQ) \cap \overrightarrow{OP} = \{R\}$
3. $(R,\ RO)$ y $(Q,\ QO)$
4. $(R,\ RO) \cap (Q,\ QO) = \{S\}$
7. $\overrightarrow{OS}$

Paralela

Dada la recta ℓ y un punto P fuera de ella, se desea construir la recta paralela a ℓ que pase por P.

Construcción



Pasos de la construcción

1. Seleccionar punto auxiliar A en ℓ.
2. $(A,\ AP)$
3. $(A,\ AP) \cap \ell = \{B\}$
4. $(P,\ AP)$ y $(B,\ AP)$
5. $(P,\ AP) \cap (B,\ AP) = \{C\}$
6. $\overleftrightarrow{PC}$

Comentarios

Las construcciones geométricas se pueden apoyar en figuras conocidas. Por ejemplo, la construcción para una recta paralela presentada arriba se basa en la idea de construir un rombo, aprovechando el hecho de que estos tienen pares de lados paralelos. De manera similar, es factible realizar otras construcciones para una recta paralela, empleando otros paralelogramos como referencia, tales como rectángulos, cuadrados o trapecios.

Ubicación

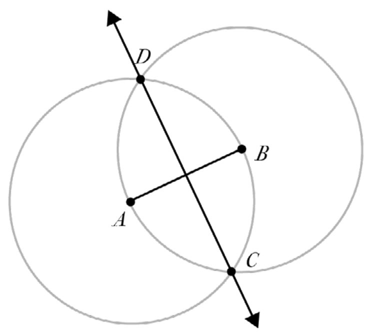
Taller: Construcciones geométricas
Actividad: Construcciones con regla y compás.

7. Demostraciones de las construcciones geométricas

Se pueden formular distintas demostraciones para una misma construcción geométrica, las que varían de acuerdo a las premisas consideradas. En todos los casos, las demostraciones deben estar respaldadas por definiciones y postulados ya establecidos, así como en propiedades cuya validez ha sido demostrada.

A continuación, se presenta la demostración de una construcción de la simetral del segmento $\overline{AB}$.

Construcción:



Pasos de la construcción:

1. $(A,\ AB)$
2. $(B,\ AB)$
4. $(A,\ AB) \cap (B,\ AB) = \{C\ ,D\}$
7. $\overleftrightarrow{CD}$

Se quiere demostrar que en esta construcción $\overleftrightarrow{CD}$ es la simetral del segmento $\overline{AB}$.

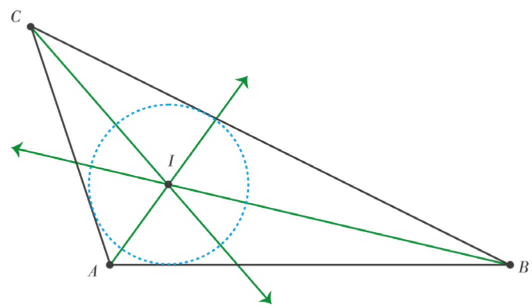
La figura $ABCD$ es un rombo, ya que todos sus lados son radios de las circunferencias $(A,\ AB)$ y $(B,\ AB)$, que por la construcción tienen igual radio.
Por propiedad, las diagonales $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ del rombo son perpendiculares y se dimidian entre sí. Esto implica que la recta $\overleftrightarrow{CD}$ es perpendicular al segmento AB y pasa por su punto medio. Como existe una única recta que pasa por dos puntos, $\overleftrightarrow{CD}$ debe ser la simetral de $\overline{AB}$.

Ubicación

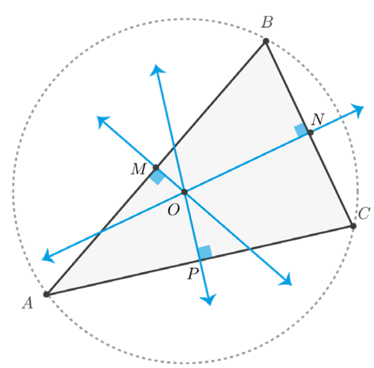
Taller: Construcciones geométricas
Actividad: Construcciones con regla y compás.

8. Elementos del triángulo

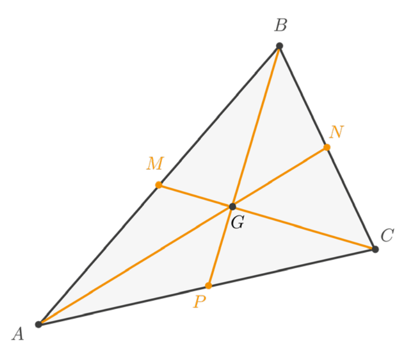
Las **bisectrices** de un triángulo son rayos que dividen a los ángulos interiores del triángulo en dos ángulos de la misma medida. Estas se intersectan en un punto llamado **incentro** (I), que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.



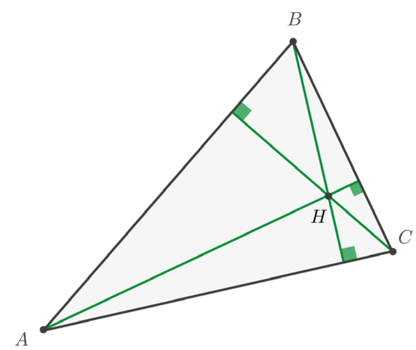
Las **simetrales** de un triángulo son rectas perpendiculares a los lados, que cortan en sus respectivos puntos medios. Estas se intersectan en un punto llamado **circuncentro** (O), que es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.



Las **transversales de gravedad o medianas** de un triángulo son segmentos que comienzan en un vértice y caen en el punto medio del lado opuesto. Estos se intersectan en un punto llamado **baricentro** (G).



Las **alturas** de un triángulo son segmentos perpendiculares que van desde un vértice del triángulo a la recta que contiene el lado opuesto. Las rectas que contienen a las alturas de un triángulo se intersectan en un punto llamado **ortocentro** (H).



Comentarios

- En un triángulo equilátero, las alturas, bisectrices, simetrales y transversales de gravedad correspondientes a cada uno de los lados del triángulo se superponen, lo que implica que el ortocentro, circuncentro, incentro y centro de gravedad coinciden en un único punto.
- Los elementos secundarios de un triángulo pueden construirse con regla y compás, combinando las construcciones básicas que incluyen la bisectriz de un ángulo, la simetral de un segmento y la perpendicular a una recta.

Ubicación

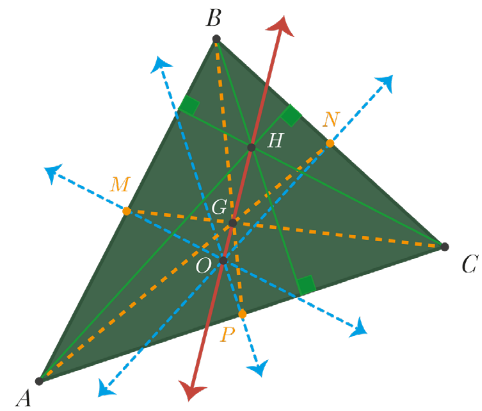
Taller: Construcciones geométricas
Actividad: Aplicaciones de construcciones.

9. Recta de Euler

En cualquier triángulo el **ortocentro**, **circuncentro** y **baricentro** son colineales. La recta que pasa por estos puntos se conoce como **recta de Euler**.

En la siguiente imagen, H, O y G son el ortocentro, circuncentro y el baricentro del triángulo $\triangle ABC$, respectivamente. La recta de color rojo que pasa por estos tres puntos corresponde a la recta de Euler de este triángulo.

Recta de Euler



Comentarios

En los triángulos equiláteros, el ortocentro, circuncentro y baricentro coinciden en un sólo punto. Dado que por un punto dado pasan infinitas rectas, cuando estos tres puntos coinciden no hay una sola recta determinada a la que se le pueda denominar recta de Euler.

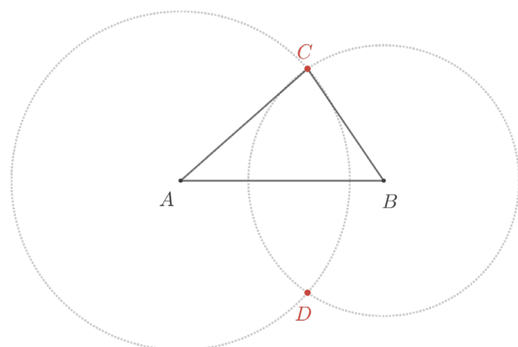
Ubicación

Taller: Construcciones geométricas
Actividad: Aplicaciones de construcciones.

10. Construcción de triángulos

Dados tres segmentos, se puede construir un triángulo con ellos si satisfacen la **desigualdad triangular**. Esta regla establece que la suma de las longitudes de cualquier par de segmentos es mayor que la longitud del tercer segmento.

Para construir el triángulo, comenzamos trazando un segmento de cualquiera de las longitudes de los segmentos dados. Luego, trazamos circunferencias con centros en los extremos de este segmento, utilizando como radios las longitudes de los otros dos segmentos proporcionados. Los vértices del triángulo se encuentran en los extremos del segmento inicial y en cualquiera de los puntos de intersección de las circunferencias trazadas.



En general, para copiar triángulos es suficiente considerar los datos asociados a los criterios de congruencia de triángulos (LLL, LAL y ALA). Estos criterios proporcionan las condiciones necesarias para asegurar que dos triángulos sean congruentes y, por lo tanto, copias exactas uno del otro.

Comentarios

La proposición “En cualquier triángulo, la longitud del lado más largo es menor a la suma de las longitudes de los otros dos lados” es equivalente a la proposición que enuncia la desigualdad triangular. Esto se debe a que, si la longitud del lado más largo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos, la desigualdad triangular se cumplirá para todos los demás casos.

Ubicación

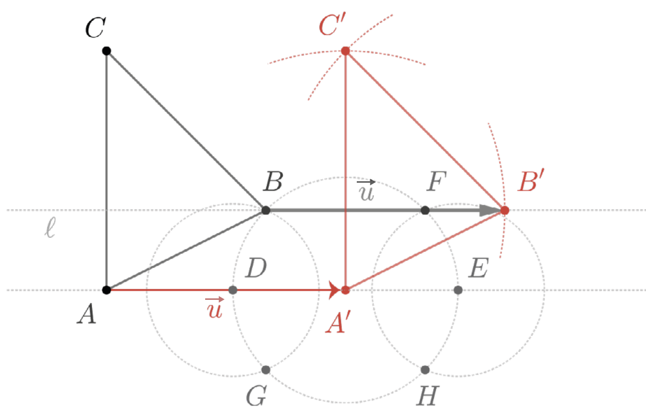
Taller: Construcciones geométricas
Actividad: Aplicaciones de construcciones.

11. Transformaciones isométricas con regla y compás

Combinando las técnicas básicas de construcción con regla y compás, es posible obtener la imagen de una figura a través de una traslación, rotación o reflexión, a partir de sus definiciones.

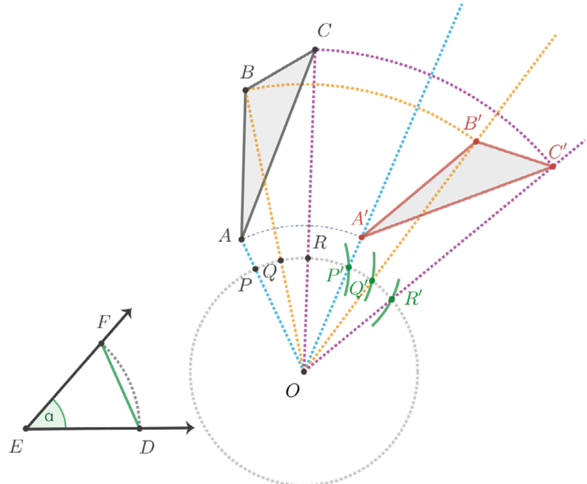
Traslación

En términos generales, para trasladar un punto P mediante un vector $\vec{v}$, se traza una recta paralela a $\vec{v}$ que pase por P. De esta forma, podemos fijar el origen del vector en P, y la ubicación de su otro extremo determinará la imagen de P. En el siguiente ejemplo se muestra la construcción que permitió trasladar el triángulo $\triangle ABC$ según el vector $\vec{v}$.



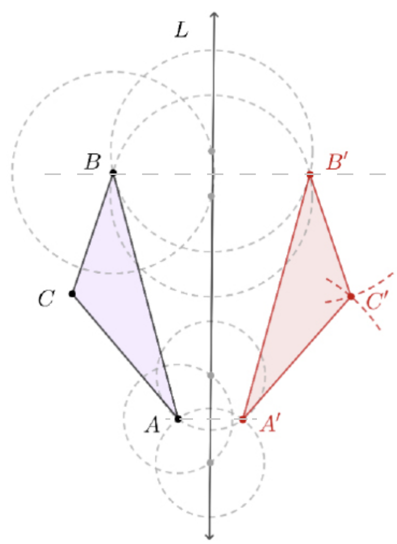
Rotación

Para rotar un punto P en torno al punto O en un ángulo α, se copia este ángulo usando O como vértice y el rayo $\overrightarrow{OP}$ como uno de sus lados. La imagen de P es el punto de intersección entre el otro rayo del ángulo y la circunferencia de centro en O y radio OP. En el siguiente ejemplo, se muestra la construcción para rotar el triángulo $\triangle ABC$ en torno al punto O en un ángulo α.



Reflexión

Para reflejar un punto P respecto de una recta L, debemos construir la perpendicular a la recta L que pasa por el punto P. La imagen del punto P corresponde al punto sobre la perpendicular que está a igual distancia que P, al otro lado de la recta L. En el siguiente ejemplo, se muestra la construcción utilizada para reflejar el triángulo $\triangle ABC$ sobre la recta L.



Ubicación

Taller: Construcciones geométricas
Actividad: Aplicaciones de construcciones.