SUMA Y SIGUE
MATEMÁTICA EN LÍNEA

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE
CMMEdu Laboratorio de Educación Centro de Modelamiento Matemático
Ministerio de Educación Gobierno de Chile
PLAN DE REACTIVACIÓN EDUCATIVA seamos Comunidad

MATERIAL PEDAGÓGICO
COMPLEMENTARIO

FICHAS TALLER 3:
JUSTIFICANDO RELACIONES GEOMÉTRICAS EN CIRCUNFERENCIAS Y POLÍGONOS

INTRODUCCIÓN

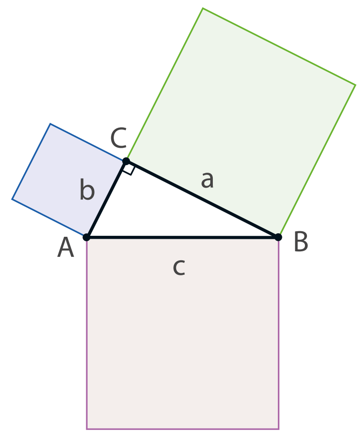
En este taller se exploraron dos aspectos fundamentales en el aprendizaje de la geometría. En primer lugar, se abordaron los argumentos matemáticos que respaldan el teorema de Pitágoras, se exploraron las transformaciones isométricas presentes en los recursos de geometría dinámica utilizados para enseñar este concepto, y se analizaron algunas dificultades comunes que enfrentan los estudiantes al aprender este tema. En segundo lugar, se examinó la fundamentación de la fórmula del perímetro de una circunferencia, así como la justificación de las propiedades de los ángulos en polígonos.

Las fichas que conforman este apartado contemplan los siguientes contenidos disciplinares:

- Teorema de Pitágoras
- Recíproco del teorema de Pitágoras
- La circunferencia y sus elementos
- Propiedades de los elementos de la circunferencia
- Perímetro de una circunferencia
- Suma de ángulos interiores de un triángulo
- Suma de ángulos interiores de un polígono
- Suma de ángulos exteriores de un polígono

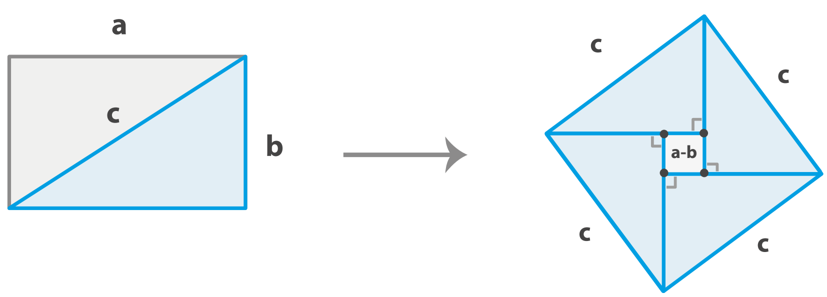
1. Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras afrima que en cualquier triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido en la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos en los catetos.



El teorema puede expresarse de otra manera: "Para un triángulo rectángulo $\triangle ABC$, con *a* y *b* las longitudes de sus catetos y *c* la longitud de su hipotenusa, se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$".

Una demostración del teorema de Pitágoras se basa en la siguiente configuración geométrica:



Al área del cuadrado de lado *c* se le pueden asociar dos expresiones equivalentes, que se obtienen al considerar las distintas figuras que componen el cuadrado. Al igualar estas expresiones, se establece la relación entre los lados y la hipotenusa del triángulo rectángulo planteado por el teorema de Pitágoras.

$$c^2 = (a - b)^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}$$

$$c^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Comentarios

- Es común encontrar enfoques de enseñanza del teorema de Pitágoras que se centran en la relación numérica, que vincula las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Sin embargo, es crucial que los estudiantes comprendan el teorema de Pitágoras como una relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo.

- La enseñanza del teorema de Pitágoras no debería limitarse solo al uso de recursos visuales. Dependiendo únicamente de la percepción visual puede dar la impresión errónea de que basta con observar la relación para aceptarla como cierta, sin la necesidad de explorar los argumentos matemáticos que la respaldan.

Ubicación

Taller: Justificando relaciones geométricas en circunferencias y polígonos.
Actividad: Teorema de Pitágoras.

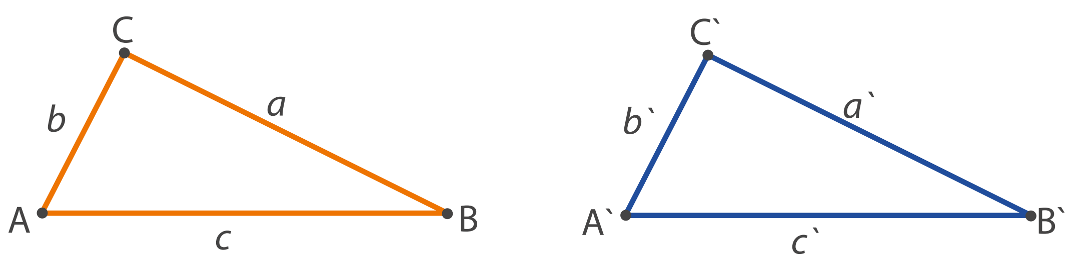
TALLER 3: JUSTIFICANDO RELACIONES GEOMÉTRICAS EN CIRCUNFERENCIAS Y POLÍGONOS

2. Recíproco del teorema de Pitágoras

El recíproco del teorema de Pitágoras se puede enunciar de la siguiente forma:

Si en un triángulo $\triangle ABC$ de lados de longitud *a*, *b* y *c* se satisface la relación $a^2 + b^2 = c^2$, entonces ese triángulo es rectángulo.

Para demostrar que el ángulo del vértice C es recto, consideremos un triángulo rectángulo $\triangle A'B'C'$ con catetos de longitud *a* y *b*, e hipotenusa *c'*.



Dado que $\triangle A'B'C'$ es rectángulo, satisface el teorema de Pitágoras, lo que implica que $a^2 + b^2 = c'^2$. Por lo tanto, $c = c'$. Esto implica que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ tienen sus tres lados respectivos congruentes y según el criterio LLL son congruentes. Por lo tanto, el ángulo en C es congruente con el ángulo en C', lo que implica que el $\triangle ABC$ es triángulo rectángulo.

Comentarios

- Algunos errores o dificultades que experimentan los estudiantes al trabajar con el teorema de Pitágoras son:
    - Asumir que la relación de los lados del teorema de Pitágoras es cierta en cualquier triángulo.
    - Asumir sin justificación que el recíproco del teorema de Pitágoras es cierto.

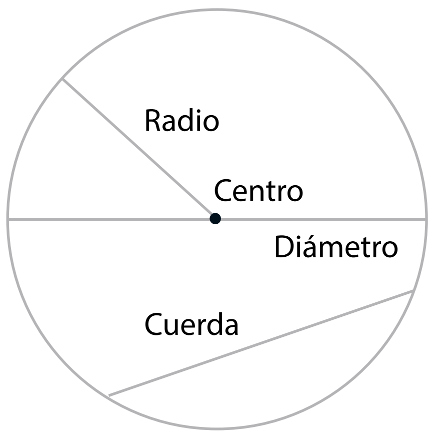
Ubicación

Taller: Justificando relaciones geométricas en circunferencias y polígonos.
Actividad: Teorema de Pitágoras.

3. La circunferencia y sus elementos

Una **circunferencia** es una figura plana compuesta por todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de un punto específico, conocido como el centro de la circunferencia. Esta distancia común se denomina **radio** de la circunferencia. También se define el **radio** de una circunferencia como cualquier segmento que conecta el centro de la misma con uno de sus puntos.

Una **cuerda** de una circunferencia es un segmento que une dos puntos cualesquiera de la misma. Cuando una cuerda contiene al centro de la circunferencia, se denomina diámetro. Todos los **diámetros** de una circunferencia tienen la misma longitud, la cual es exactamente el doble del radio.



Ubicación

Taller: Justificando relaciones geométricas en circunferencias y polígonos.
Actividad: Perímetro de una circunferencia y ángulos en polígonos.

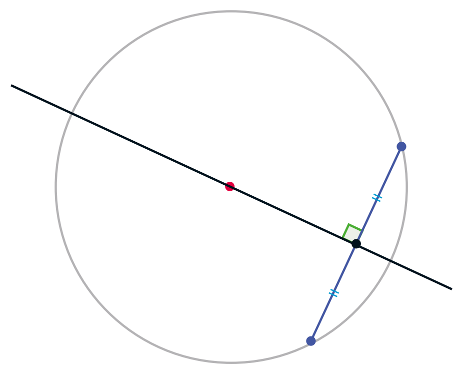
4. Propiedades de los elementos de la circunferencia

A continuación se enuncian algunas propiedades que satisfacen los elementos de la circunferencia.

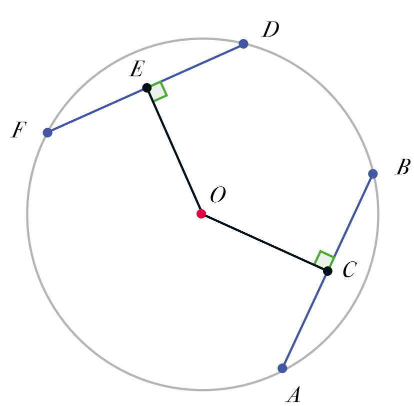
1. Por un punto en una circunferencia pasa un único diámetro.

2. Una cuerda que contiene a un radio debe ser necesariamente un diámetro de la circunferencia.

3. Si la recta que contiene al centro de la circunferencia es perpendicular a una cuerda, entonces la recta debe cortar a la cuerda en su punto medio.

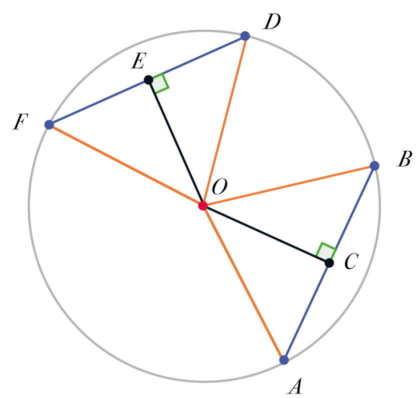


4. Dos cuerdas congruentes están a la misma distancia del centro de la circunferencia.



Comentarios

- Para demostrar propiedades sobre el círculo y sus elementos se utilizan propiedades conocidas y criterios de congruencia de triángulos.. Por ejemplo, para demostrar que dos cuerdas congruentes están a la misma distancia del centro se utilizaron los siguientes argumentos:



Al trazar los radios que se muestran en la imagen, se puede demostrar que los triángulos $\triangle OCB$ y $\triangle OED$ son congruentes mediante el criterio LAL. En efecto:

1. $\overline{OB} \cong \overline{OD}$ por ser radios.
2. $\angle OBA \cong \angle FDO$ debido a que los triángulos $\triangle OAB$ y $\triangle OFD$ son congruentes según criterio LLL.
3. $\overline{CB} \cong \overline{ED}$ ya que las cuerdas son congruentes y sus simetrales $\overleftrightarrow{CO}$ y $\overleftrightarrow{EO}$ pasan por sus puntos medios.

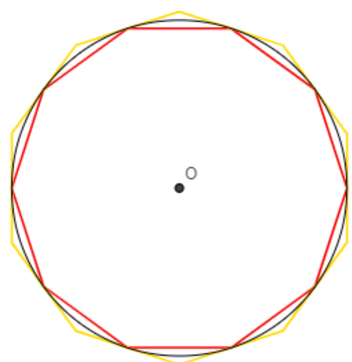
Por lo tanto, se concluye que $\overline{OC} \cong \overline{OE}$, lo que demuestra que las cuerdas congruentes $\overline{AB}$ y $\overline{FD}$ están a la misma distancia del centro O de la circunferencia.

Ubicación

Taller: Justificando relaciones geométricas en circunferencias y polígonos.
Actividad: Perímetro de una circunferencia y ángulos en polígonos.

5. Perímetro de una circunferencia

Se puede estimar el perímetro de una circunferencia utilizando los perímetros de polígonos regulares inscritos y circunscritos en ella. A medida que los lados de los polígonos inscritos aumentan, su perímetro se incrementa y se aproxima al perímetro de la circunferencia. Por otro lado, cuando el número de lados aumenta, el perímetro de los polígonos circunscritos disminuye, acercándose cada vez más al perímetro de la circunferencia.



El perímetro de una circunferencia se define como el límite de la secuencia de perímetros de polígonos regulares inscritos a medida que el número de lados crece indefinidamente. Del mismo modo, el perímetro de una circunferencia es el límite de la secuencia de perímetros de polígonos regulares circunscritos cuando el número de lados crece indefinidamente.

Se puede demostrar que el cociente (o razón) entre el perímetro C y el diámetro d de cualquier circunferencia es constante. Esta constante corresponde al número π.

$$\frac{C}{d} = \pi$$

Esta relación permite establecer fórmulas para el perímetro C de cualquier circunferencia en términos de su diámetro d o de su radio r.

$$C = \pi \cdot d$$

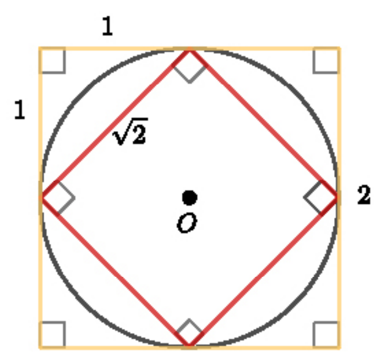
$$C = 2\pi \cdot r$$

Comentarios

- El hecho de que el cociente entre el perímetro C y el diámetro d de una circunferencia sea constante implica que estas cantidades son directamente proporcionales, donde la constante de proporcionalidad es π.

- El procedimiento para aproximar el valor de π estableciendo cotas inferiores y superiores basadas en perímetro de polígonos regulares inscritos y circunscritos a una circunferencia se conoce como el método de Arquímides. En el siguiente ejemplo, se aproximó el valor de π mediante polígonos regulares de $n = 4$ lados, usando una circunferencia de radio igual a 1:

$$p_n \leq \pi \cdot d \leq P_n$$
$$4 \cdot \sqrt{2} \leq \pi \cdot 2 \leq 4 \cdot 2$$
$$2 \cdot \sqrt{2} \leq \pi \leq 4$$
$$2{,}82 \leq \pi \leq 4$$

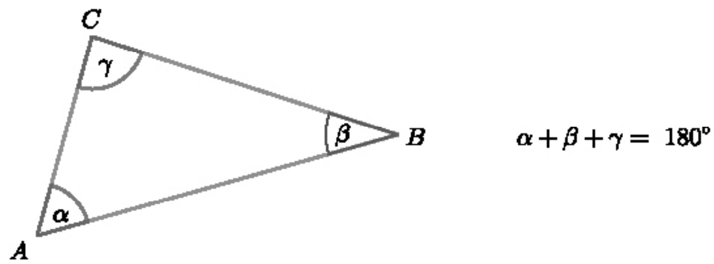


Ubicación

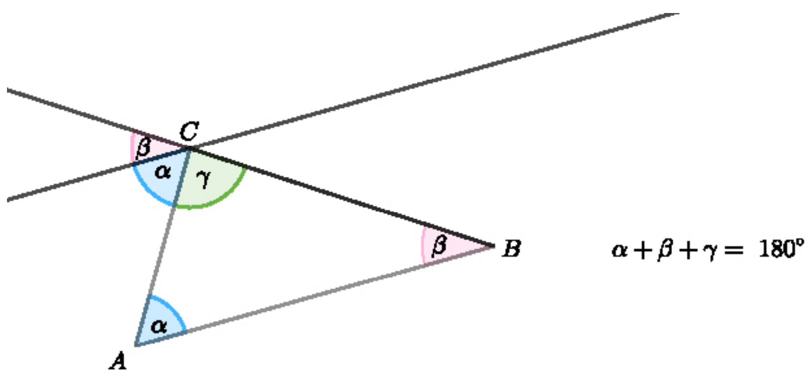
Taller: Justificando relaciones geométricas en circunferencias y polígonos.
Actividad: Perímetro de una circunferencia y ángulos en polígonos.

6. Suma de ángulos interiores de un triángulo

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.



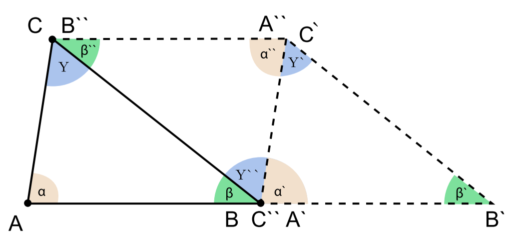
La demostración de esta propiedad se fundamenta en la disposición de los tres ángulos interiores formando un ángulo extendido. Esto se logra trazando una recta paralela al lado $\overline{OB}$ y demostrando que existen ángulos alternos internos y ángulos correspondientes congruentes con α y β, los cuales, junto con Υ, conforman un ángulo extendido



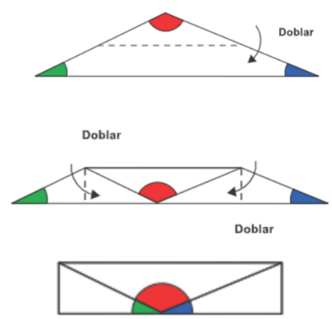
Comentarios

- Existen recursos que permiten visualizar las propiedades relacionadas con los ángulos de los polígonos. Estas herramientas ofrecen argumentos visuales que permiten convencerse de la veracidad de las propiedades. En el caso de la suma de los ángulos interiores exploramos los siguientes recursos:

Trasladar y rotar



Plegado de papel



Rotar lápiz

- Aunque los argumentos visuales son útiles para generar convicción sobre la veracidad de una propiedad, no constituyen una demostración en sí misma, ya que no detallan los argumentos lógicos y las propiedades que respaldan la justificación de la afirmación. Sin embargo, en algunos casos, estos recursos pueden sugerir los elementos que luego se explicitarán en una demostración formal.

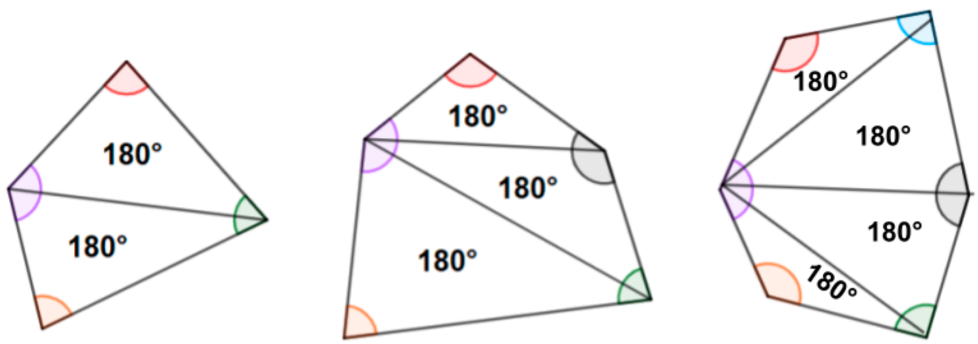
Ubicación

Taller: Justificando relaciones geométricas en circunferencias y polígonos.
Actividad: Perímetro de una circunferencia y ángulos en polígonos.

7. Suma de ángulos interiores de un polígono

La suma de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados es igual a $(n - 2) \cdot 180°$.

Esta propiedad se basa en la posibilidad de trazar *n* - 3 diagonales desde cualquier vértice del polígono, las cuales dividen al polígono en *n* - 2 triángulos. La suma de los ángulos interiores de todos estos triángulos, que en total es $(n - 2) \cdot 180°$, equivale a la suma de los ángulos interiores del polígono.



Ubicación

Taller: Justificando relaciones geométricas en circunferencias y polígonos.
Actividad: Perímetro de una circunferencia y ángulos en polígonos.

TALLER 3: JUSTIFICANDO RELACIONES GEOMÉTRICAS EN CIRCUNFERENCIAS Y POLÍGONOS

8. Suma de ángulos exteriores de un polígono

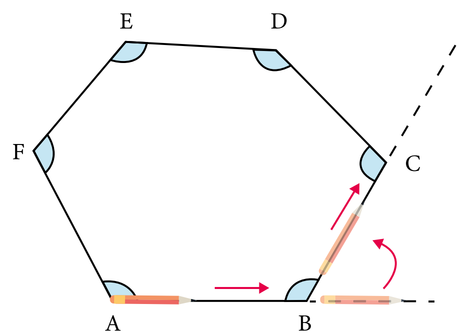
La suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo de *n* lados es igual a 360°.

Para demostrar esta propiedad, consideramos que en cada vértice del polígono, la suma del ángulo interior y el ángulo exterior es igual a 180°. Por lo tanto, si restamos la suma de los ángulos interiores del polígono, que es 180º (n - 2), de la suma total de los ángulos interiores y exteriores, que es 180º n, obtenemos la suma de los ángulos exteriores:

$$180^{o}\, n - 180^{o}\,(n - 2) = 180^{o}\, n - 180^{o}\, n + 360^{o} = 360^{o}$$

Comentarios

- Una forma intuitiva de probar que la suma de los ángulos exteriores de un polígono es 360° es imaginando el recorrido de un lápiz al moverse a lo largo de cada uno de estos ángulos. Al completar el recorrido, el lápiz habrá dado una vuelta completa, regresando a su posición inicial.



- Aunque este recurso es útil para generar convicción sobre la veracidad de la propiedad, dicha convicción se basa en la percepción visual en lugar de propiedades geométricas explícitas que la respalden. Además, en este caso, se emplea un objeto físico (un lápiz) en vez de elementos geométricos. Para convertir este proceso en una demostración formal, es esencial eliminar el uso del lápiz y emplear exclusivamente objetos y relaciones geométricas, respaldando cada afirmación con argumentos matemáticos.

Ubicación

Taller: Justificando relaciones geométricas en circunferencias y polígonos.
Actividad: Perímetro de una circunferencia y ángulos en polígonos.