SUMA Y SIGUE

MATEMÁTICA EN LÍNEA

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

CMMEdu Laboratorio de Educación Centro de Modelamiento Matemático

Ministerio de Educación Gobierno de Chile

Plan de Reactivación Educativa
Seamos Comunidad

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

FICHAS TALLER 2:
CONGRUENCIA

INTRODUCCIÓN

En este taller, se exploraron los conceptos fundamentales de congruencia. Para comenzar, se examinaron de forma crítica las nociones intuitivas relacionadas con la congruencia, para luego establecer una definición matemática precisa, fundamentada en transformaciones isométricas. Se profundizó en la congruencia de figuras geométricas y se dedujeron los criterios de congruencia de triángulos. Por último, se aplicaron estos criterios para demostrar propiedades de triángulos y cuadriláteros.

Las fichas que conforman este apartado contemplan los siguientes contenidos disciplinares:

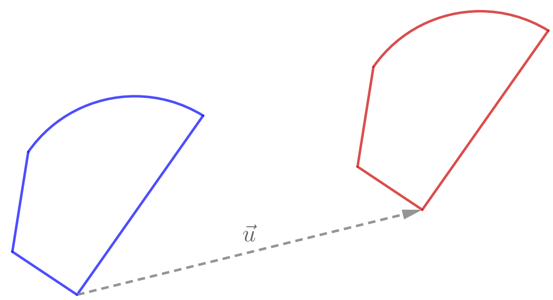
- Definición de congruencia
- Propiedades de la congruencia
- Congruencia de figuras
- Criterios de congruencia de triángulos
- Triángulo isósceles
- Triángulo equilátero
- Clasificación y definición de cuadriláteros
- Propiedades de cuadriláteros

1. Definición de congruencia

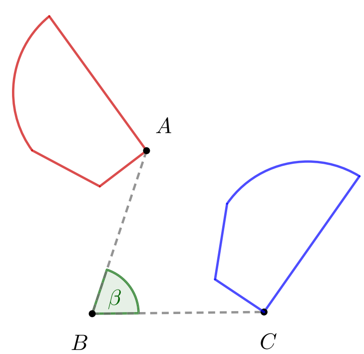
Dos figuras U y V son congruentes si existe una transformación isométrica tal que la imagen de U es V. Usando símbolos, la expresión "U es congruente con V" se escribe $U \cong V$.

En los siguientes ejemplos, las dos figuras son congruentes ya que existe una transformación isométrica que lleva una figura a la otra.

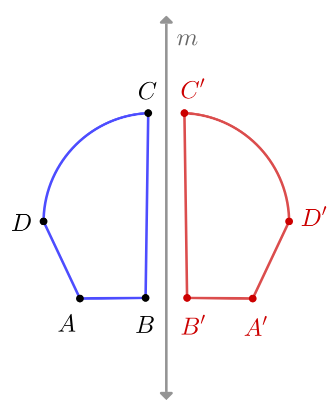
1. Dos figuras congruentes relacionadas mediante una traslación:



2. Dos figuras congruentes relacionadas mediante una rotación:



3. Dos figuras congruentes relacionadas mediante una reflexión:



Comentarios

En algunas situaciones, es posible identificar una secuencia de transformaciones isométricas que permiten llevar una figura geométrica a otra, lo cual puede conceptualizarse como una única isometría.

Ubicación

Taller: Congruencia.
Actividad: Congruencia.

TALLER 2: CONGRUENCIA

2. Propiedades de la congruencia

La congruencia se puede conceptualizar como una relación entre figuras geométricas que cumple las siguientes propiedades fundamentales:

Para cualesquiera figuras U, V y W en el plano, la congruencia es:

1. **Reflexiva**: $U \cong U$.
   Toda figura es congruente consigo misma.

2. **Simétrica**: Si $U \cong V$, entonces $V \cong U$.
   Si dos figuras son congruentes entre sí, entonces la congruencia es recíproca.

3. **Transitiva**: Si $U \cong V$ y $V \cong W$, entonces $U \cong W$.
   Si una figura es congruente con otra, que a su vez es congruente con una tercera, entonces la primera figura es congruente con la tercera.

Estas propiedades se pueden demostrar mediante la identificación de las transformaciones isométricas que justifican las congruencias planteadas en cada una de ellas.

Comentarios

- Una relación que cumple estas tres propiedades se conoce como relación de equivalencia. La congruencia es, por tanto, una relación de equivalencia. Otra relación de equivalencia es la igualdad.

- La congruencia permite comparar figuras cuyas posiciones y orientaciones difieren, es por esto, que no se habla de figuras “iguales”, sino más bien de figuras “congruentes”.

Ubicación

Taller: Congruencia.
Actividad: Congruencia.

3. Congruencia de figuras

A continuación se presentan algunas figuras geométricas elementales y las condiciones que determinan su congruencia:

- Todos los puntos son congruentes.
- Los segmentos de igual longitud son congruentes.
- Los ángulos de igual medida son congruentes.
- Los círculos con radios de igual longitud son congruentes.
- Todas las rectas son congruentes.
- Todos los rayos son congruentes.

La validez de estas afirmaciones se fundamenta en la capacidad de establecer que, en cada caso, es posible encontrar transformaciones isométricas que llevan una figura a otra del mismo tipo, lo que confirma la congruencia entre ellas.

Comentarios

Por contraposición, observemos que dos segmentos o ángulos con medidas diferentes no pueden ser congruentes. Esto se debe a que no existe una transformación isométrica que pueda llevar uno al otro.

Ubicación

Taller: Congruencia.
Actividad: Congruencia.

4. Criterios de congruencia de triángulos

Para demostrar la congruencia entre dos figuras cualesquiera se requiere, en general, recurrir a la definición, que implica mostrar que una figura es la imagen de otra mediante alguna transformación isométrica. En el caso específico de los triángulos, existe una forma de establecer su congruencia sin necesidad de aplicar directamente esta definición. y que consiste en verificar la congruencia de todos los lados y ángulos correspondientes.

No obstante, tampoco es necesario examinar los seis pares de elementos de los triángulos. Existen conjuntos de condiciones llamados **criterios de congruencia**, los cuales permiten determinar si dos triángulos son congruentes mediante la comparación de tres pares de elementos:

Criterio LAL (lado-ángulo-lado):
Si dos lados de un triángulo y el ángulo que forman son congruentes a los elementos correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

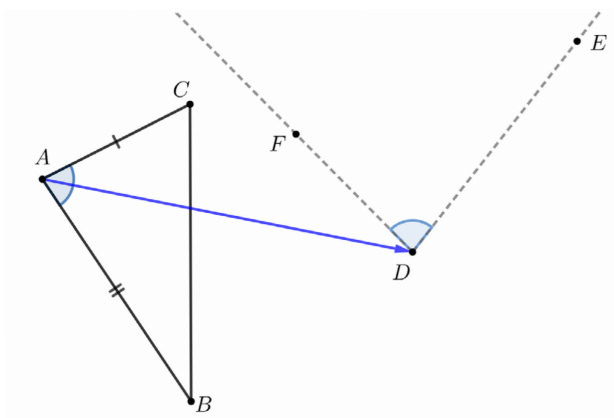
Criterio ALA (ángulo-lado-ángulo):
Si dos ángulos de un triángulo y el lado común son congruentes a los elementos correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Criterio LLL (lado-lado-lado):
Si los tres lados de un triángulo son congruentes a los lados correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Comentarios

En este taller los criterios de congruencia fueron demostrados mediante transformaciones isométricas. A modo de ejemplo, a continuación se resume la demostración del criterio LAL:

1. Se identificaron dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ en donde $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $\angle A \cong \angle D$.
2. Dado que los ángulos son congruentes, existe una isometría que lleva el ángulo en A al ángulo en B.
3. Se demuestra que esta isometría lleva los otros dos vértices sobre los lados del ángulo en D, al considerar que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.
4. Se concluye que si se cumple la condición LAL, los triángulos son congruentes.



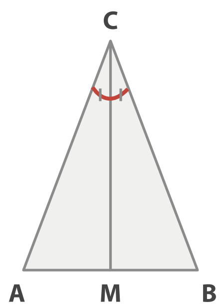
Ubicación

Taller: Congruencia.
Actividad: Congruencia.

5. Triángulo Isósceles

El triángulo isósceles es un triángulo que tiene dos lados de igual medida, es decir, congruentes. Una propiedad que se concluye a partir de esta definición, es que sus ángulos basales tienen la misma medida.

Sea un triángulo isósceles, con el punto medio de su base como muestra la figura:



Se cumplen las siguientes propiedades:
El ángulo $\angle CMA$ es recto.
La recta $\overleftrightarrow{CM}$ es perpendicular a $\overline{AB}$.
La recta $\overleftrightarrow{CM}$ es la simetral de $\overline{AB}$.
La recta $\overleftrightarrow{CM}$ es la bisectriz del ángulo $\angle ACB$.
El triángulo $\triangle BMC$ es la imagen del triángulo $\triangle AMC$ a través de una reflexión respecto a $\overleftrightarrow{CM}$.

Comentarios

- La demostración de que los ángulos de la base en un triángulo isósceles son congruentes utiliza el criterio LAL como se resume a continuación:

  En el triángulo isósceles $\triangle ABC$, solo se sabe que $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.
  El triángulo $\triangle ABC$ se puede visualizar de dos maneras distintas: como el triángulo $\triangle ABC$ o como el triángulo $\triangle BAC$.
  Al comparar $\triangle ABC$ con $\triangle BAC$, se tiene que $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, $\overline{BC} \cong \overline{AC}$ y $\angle C \cong \angle C$.
  Según criterio LAL $\triangle ABC \cong \triangle BAC$.
  Esto implica que $\angle ABC \cong \angle BAC$.

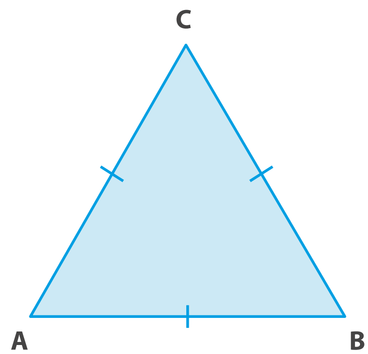
- Las otras propiedades enunciadas relacionadas a M, el punto medio de la base, utilizan para su demostración el hecho de que los triángulos $\triangle AMC$ y $\triangle BMC$ son congruentes.

Ubicación

Taller: Congruencia.
Actividad: Aplicaciones de congruencia.

6. Triángulo Equilátero

Definimos triángulo **equilátero** como un triángulo que tiene sus **tres lados de igual medida**.



Una propiedad que se deriva de esta definición es la **congruencia de los tres ángulos interiores del triángulo**.

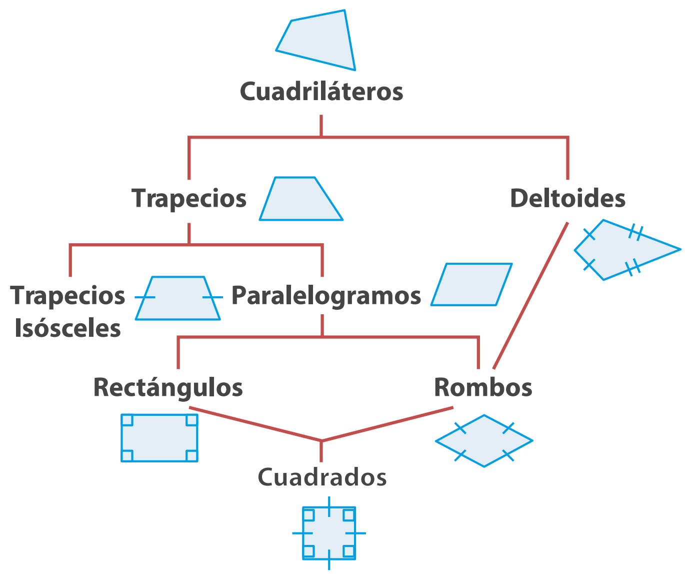
La demostración de esta afirmación se basa en el hecho de que un triángulo equilátero $\triangle ABC$ puede considerarse como un triángulo isósceles con base $\overline{AB}$, lo que permite concluir que los ángulos con vértice en A y B son congruentes. Del mismo modo, al considerarlo como un triángulo isósceles con base $\overline{BC}$, se obtiene que los ángulos con vértice en B y C son congruentes. Por lo tanto, se concluye que los tres ángulos internos son congruentes.

Ubicación

Taller: Congruencia.
Actividad: Aplicaciones de congruencia.

7. Clasificación y definición de cuadriláteros

Para probar propiedades de cuadriláteros utilizamos la clasificación de cuadriláteros convexos (todos los ángulos interiores menores a 180°) que se presenta en el siguiente esquema:



Este esquema representa una **clasificación inclusiva de cuadriláteros**, organizándolos en grupos interrelacionados que contienen a otros grupos. Por ejemplo, el rombo pertenece tanto al conjunto de paralelogramos como al de deltoides.

Para clasificar los cuadriláteros de esta forma se consideraron las siguientes definiciones:

Cuadrilátero: Polígono de cuatro lados.
Trapecio: Cuadrilátero con al menos un par de lados paralelos.
Trapecio isósceles: Trapecio con los lados no paralelos congruentes.
Paralelogramo: Cuadrilátero con dos pares de lados paralelos.
Deltoide: Cuadrilátero con dos pares de lados adyacentes congruentes.
Rectángulo: Cuadriláteros cuyos cuatro ángulos son rectos.
Rombo: Cuadriláteros cuyos cuatro lados son congruentes.
Cuadrado: Cuadriláteros cuyos cuatro lados son congruentes y cuatro ángulos son rectos.

Se optó por esta clasificación debido a su ventaja inherente: una propiedad demostrada para un tipo de cuadrilátero se aplica automáticamente a los demás tipos contenidos en esa categoría. Por ejemplo, cualquier propiedad probada para los deltoides se extiende a los rombos y cuadrados, lo que elimina la necesidad de demostrarla específicamente para estos últimos cuadriláteros.

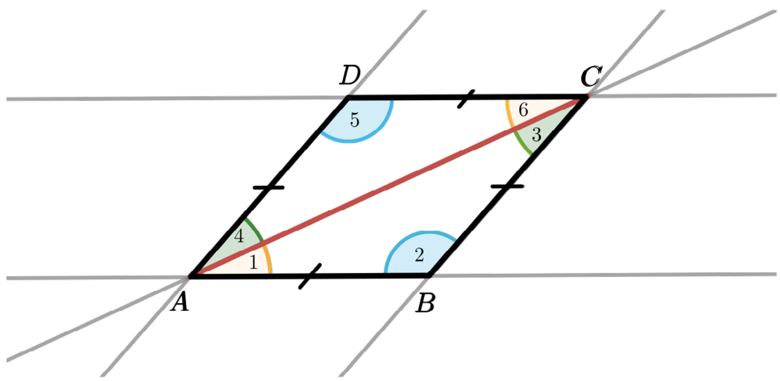
Comentarios

- La relación de inclusión entre varios cuadriláteros del esquema se deriva directamente de sus definiciones. Sin embargo, en el caso del rectángulo y el rombo, no es posible establecer que son paralelogramos directamente de su definición. Esta relación necesita ser probada.

- A continuación se resume la demostración de que un rombo es un paralelogramo:

  Consideremos el rombo $ABCD$. Por definición, todos sus lados son congruentes. Al trazar la diagonal $\overline{AC}$ encontramos que los triángulos generados $\triangle ABC$ y $\triangle CDA$ son congruentes por el criterio LLL. Así, se establece que $\angle 1 \cong \angle 6$, $\angle 2 \cong \angle 5$ y $\angle 3 \cong \angle 4$.

- Si extendemos los lados del rombo se forman ángulos alternos internos ($\angle 1$ con $\angle 6$ y $\angle 3$ con $\angle 1$), que previamente se demostró que eran congruentes. Por propiedad de paralelas, se concluye que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. Queda demostrado que el rombo $ABCD$ es un paralelogramo.



- La demostración que prueba que los rectángulos también son paralelogramos, utiliza un razonamiento similar a la anterior.

Ubicación

Taller: Congruencia.
Actividad: Aplicaciones de congruencia.

8. Propiedades de cuadriláteros

La siguiente tabla resume las propiedades de cuadriláteros analizadas en el taller.

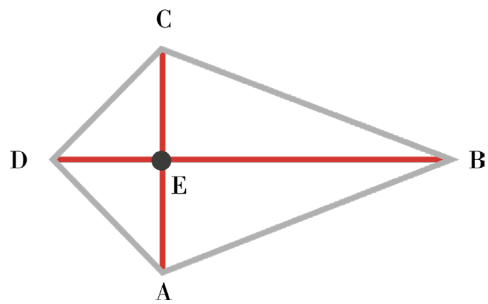
Propiedades	Paralelogramo	Deltoide	Rectángulo	Rombo	Cuadrado
Ángulos adyacentes suplementarios	Sí	No	Sí	Sí	Sí
Ángulos opuestos congruentes	Sí	No	Sí	Sí	Sí
Lados opuestos congruentes	Sí	No	Sí	Sí	Sí
Lados opuestos paralelos	Sí	No	Sí	Sí	Sí
Diagonales se dimidian	Sí	No	Sí	Sí	Sí
Diagonales congruentes	No	No	Sí	No	Sí
Ambas diagonales son bisectrices	No	No	No	Sí	Sí
Diagonales perpendiculares entre sí	No	Sí	No	Sí	Sí

Usando la clasificación inclusiva de cuadriláteros, no es necesario demostrar las propiedades en cada tipo de cuadrilátero individualmente. Al demostrarlas para las categorías más generales, automáticamente se validan para todas las categorías contenidas en ellas.

Comentarios

- La mayoría de las propiedades de los cuadriláteros se demuestran al descomponerlos en triángulos y establecer la congruencia entre ellos mediante criterios específicos de congruencia. Para ilustrar este proceso, se presenta la demostración de que las diagonales de un deltoides son perpendiculares entre sí.

  Sea $ABCD$ un deltoide donde $\overline{AD} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AD} \cong \overline{CD}$. Sea E la intersección entre las diagonales del deltoide.

  Por criterio LLL, se tiene que $\triangle DAB \cong \triangle DCB$. Esto implica que $\angle DBA \cong \angle CBD$.

  Usando el criterio LAL, se establece que $\triangle AEB \cong \triangle CEB$. Por lo tanto, $\angle AEB \cong \angle BEC$.

  Dado que $\angle AEB$ y $\angle BEC$ forman un ángulo extendido, se concluye que $\angle AEB$ es recto. Por consiguiente, las diagonales del deltoide son perpendiculares entre sí.

Ubicación

Taller: Congruencia.
Actividad: Aplicaciones de congruencia.