SUMA Y SIGUE

MATEMÁTICA EN LÍNEA

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

fcfm FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

CMM Centro de Modelamiento Matemático

Ministerio de Educación Gobierno de Chile

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

FICHAS TALLER 5: PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON MÉTODOS ALGEBRAICOS.

INTRODUCCIÓN

En este taller se abordó el planteamiento de ecuaciones que involucran números naturales, enteros y racionales para modelar problemas reales. Se analizaron en detalle estrategias de resolución de ecuaciones a través de métodos algebraicos, conectándolos con las propiedades de la igualdad para justificar dichos métodos y darles sentido a los procedimientos involucrados. Se modelaron problemas que involucran más de una incógnita a través de sistemas de ecuaciones, se estudiaron estrategias de resolución de estos y se mostró cómo un razonamiento intuitivo permite a los estudiantes resolver sistemas de ecuaciones antes de conocer métodos formales de solución. También, se consideraron casos en los que, dada una ecuación, se busca una situación que puede ser representada por ella. Finalmente, se examinaron y discutieron las soluciones de una ecuación dado su contexto, abordando tipos de ecuaciones con infinitas soluciones y sin solución.

Las fichas que conforman este apartado contemplan los siguientes contenidos:

- Método algebraico para resolver ecuaciones.
- Ecuaciones equivalentes.
- Sistemas de ecuaciones.
- Método de ensayo y error.
- Verificación e interpretación de soluciones.
- Ecuaciones sin solución o con infinitas soluciones.

35- Obteniendo ecuaciones equivalentes

Los procedimientos algebraicos para resolver ecuaciones se sustentan en el uso de las propiedades de la igualdad para convertir una ecuación en otra más simple.

Si dos ecuaciones se pueden transformar una en la otra y viceversa utilizando las propiedades de la igualdad, entonces dichas ecuaciones son equivalentes. Además, dos *ecuaciones* son *equivalentes* si cualquier solución de una es también solución de la otra.

Por ejemplo, la ecuación $4n - 4 = 364$ se puede manipular obteniendo ecuaciones equivalentes a ella.

$$
\begin{array}{ll}
4n - 4 = 364 & / + 4 \\
4n - 4 + 4 = 364 + 4 & \\
4n = 368 & / \cdot \dfrac{1}{4} \\
\dfrac{4n}{4} = \dfrac{368}{4} & \\
n = 92 &
\end{array}
$$

Las operaciones más usuales para transformar una ecuación en otra equivalente son sumar una misma cantidad (positiva o negativa) a ambos lados de la igualdad o multiplicar por un número distinto de cero ambos lados de la igualdad.

Comentarios

Es importante mencionar que la propiedad "si $a = b$ entonces $a \cdot c = b \cdot c$" es muy usada para resolver ecuaciones, pero solo cuando $c \neq 0$. En el caso de que $c = 0$, la ecuación original se transforma en $0 = 0$, lo cual es cierto independiente de cuánto valga la incógnita, por lo tanto no nos sirve para conocer su valor y se pierde la equivalencia entre ecuaciones.

En particular, un error común que suele ocurrir junto con lo anterior, es deducir que el valor de la incógnita que resuelve la ecuación es 0.

Ubicación: Módulo 2

Taller: Planteamiento y resolución de ecuaciones con métodos algebraicos.
Actividad 1: Resolviendo con ecuaciones.

36- Situaciones que involucran más de una incógnita

Se denomina *sistema de ecuaciones* al conjunto de ecuaciones que relacionan las incógnitas involucradas en un problema.

Por ejemplo, la situación "Para la elección de un representante estudiantil se presentaron dos candidatos. El ganador obtuvo 33 votos más que el otro, y entre ambos recibieron un total de 57 votos", se representa por las expresiones:

$$G + P = 57$$
$$G - P = 33$$

las que conforman un sistema de ecuaciones con dos incógnitas: G y P, votos del ganador y votos del perdedor, respectivamente.

Resolver un sistema de ecuaciones significa encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones de este. Una manera de resolverlo es despejando una incógnita en términos de las otras para ir remplazando en las demás ecuaciones.

Comentarios

Muchas veces no existen procedimientos formales para resolver sistemas de ecuaciones, o no se tiene conocimiento de estos. Aun así, es valioso abordar problemas en los que pueden aparecer sistemas de ecuaciones, ya que permiten desarrollar habilidades como:

- modelar diversas situaciones cotidianas,
- analizar si las ecuaciones planteadas representan las condiciones del problema, y
- en caso de obtener soluciones, verificar que estas respondan al contexto original.

Ubicación: Módulo 2

Taller: Planteamiento y resolución de ecuaciones con métodos algebraicos.
Actividad 2: Resolviendo con sistemas de ecuaciones.

37- El ensayo y error es siempre un recurso disponible

El *ensayo y error* es una estrategia muy común y válida para resolver un problema cuando no disponemos de herramientas matemáticas conocidas, o bien cuando no se nos ocurre otra estrategia para abordarlo.

En muchos casos, una búsqueda ordenada de las soluciones asegura encontrar la respuesta de un problema, sin embargo, esta forma de ensayo y error puede requerir bastantes intentos. Por lo tanto, resulta más eficiente promover el uso de ensayo y error acompañado de un razonamiento previo sobre las condiciones del problema para limitar el conjunto de búsqueda de posibles soluciones y así minimizar la cantidad de intentos por realizar.

Comentarios

Como docente, es recomendable fomentar en los estudiantes el uso de ensayo y error, y también de otras estrategias y procedimientos matemáticos, incluyendo análisis y razonamientos que hagan que estos sean más eficientes.

Ubicación: Módulo 2

Taller: Planteamiento y resolución de ecuaciones con métodos algebraicos.
Actividad 2: Resolviendo con sistemas de ecuaciones.

38- No es solo obtener un valor, también hay que verificarlo e interpretarlo

Para *verificar* si un valor numérico es *solución* de una ecuación con una incógnita, basta remplazar este valor donde aparece la incógnita y comprobar que se obtiene la misma expresión a ambos lados de la igualdad. En caso de que no sean iguales ambos lados, dicho valor no es solución de la ecuación.

Al resolver una ecuación, es recomendable verificar que el o los resultados obtenidos son soluciones, ya que es posible que se haya cometido algún error en el desarrollo de los pasos intermedios.

Durante el proceso de resolución de un problema a veces se plantean ecuaciones cuyas soluciones no entregan directamente la respuesta al mismo. Por esto, es importante:

- tener claridad sobre qué representan las incógnitas en las ecuaciones que se han formulado, e
- interpretar las soluciones encontradas para determinar si estas tienen o no sentido en el contexto original del problema, o si es necesario adaptarlas de algún modo o descartarlas.

Comentarios

En el proceso de resolución de ecuaciones es importante incentivar a los estudiantes para que verifiquen e interpreten las soluciones encontradas.

Ubicación: Módulo 2

Taller: Planteamiento y resolución de ecuaciones con métodos algebraicos.
Actividad 3: Interpretando soluciones.

39- ¿Cuándo una ecuación no tiene solución?

Existen ecuaciones que *no tienen solución*, es decir, no hay valores que al remplazarlos en ellas hagan que se cumpla la igualdad.

Una manera de establecer que una ecuación no tiene solución es operar correctamente con ella hasta llegar a expresiones equivalentes que no sean ciertas.

Por ejemplo, al operar correctamente con la ecuación $5y + 7 - 4 = 3y + 1 + 2y$, se obtiene la ecuación equivalente

$$5y + 3 = 5y + 1$$

Esta igualdad nunca es cierta, independiente del valor de y, puesto que en ambos lados está presente el término $5y$, al que se le suman distintas cantidades.

Reforzando lo anterior, la última igualdad es equivalente a $3 = 1$, lo que al ser una expresión falsa, nos indica que la ecuación original no tiene solución.

Comentarios

Es importante tener en cuenta que no solo por llegar a una expresión falsa se puede declarar que la ecuación no tiene solución; también hay que cerciorarse que se operó correctamente, de modo que la expresión falsa sea equivalente a la expresión original.

Ubicación: Módulo 2

Taller: Planteamiento y resolución de ecuaciones con métodos algebraicos.
Actividad 3: Interpretando soluciones.

40- ¿Cuándo una ecuación tiene infinitas soluciones?

Existen ecuaciones que tienen una *cantidad infinita de soluciones*. En particular, esto ocurre cuando al evaluar cualquier número en la ecuación, siempre se cumple la igualdad.

Una manera de establecer que una ecuación tiene a cualquier número como solución es operar correctamente con ella hasta llegar a una expresión equivalente que sea siempre cierta. De esta forma, cualquier número es solución de la ecuación.

Por ejemplo, al operar correctamente con $20x + 700 = 14x + 240 + 6x + 460$, se obtiene la ecuación equivalente

$$20x + 700 = 20x + 700$$

Como en ambos lados se tiene lo mismo, la igualdad se cumple para cualquier valor de x.

Reforzando lo anterior, esta última igualdad es equivalente a $0 = 0$, lo que al ser una expresión verdadera, nos indica que la ecuación original se satisface para cualquier número, o sea, que tiene una cantidad infinita de soluciones.

Comentarios

Aunque se obtenga que cualquier número es solución de una ecuación que modela un problema, el contexto de este puede establecer restricciones que limitan el conjunto de valores posibles para la incógnita.

Por ejemplo, si la incógnita indica el precio de un dulce, sabemos que en nuestro sistema monetario los precios no pueden ser números negativos ni no enteros, entonces la solución necesariamente debe ser un número natural. Además, los valores factibles están dentro de un rango de precio, ya que es poco natural que un dulce tenga un precio exageradamente alto o bajo.

Ubicación: Módulo 2

Taller: Planteamiento y resolución de ecuaciones con métodos algebraicos.
Actividad 3: Interpretando soluciones.

41- ¿Qué hacemos cuando no hay variables?

Evaluar una ecuación significa dar un valor numérico a las variables que en ella aparecen. Pero ¿qué ocurre si tenemos una expresión en la que no hay variables? En este caso, como la expresión no depende de ninguna de ellas, al asignarle cualquier valor numérico a una variable, la expresión no cambia.

Por ejemplo, si consideramos la expresión $2 + 2 = 4$ y la evaluamos para $x = 1$, obtenemos $2 + 2 = 4$, pues esta no depende de x.

Si una ecuación en la variable x es equivalente a una expresión falsa que no contiene a x, por lo dicho anteriormente, no existe ningún valor de x tal que al evaluarlo en la ecuación original se cumpla la igualdad. Por lo tanto, la ecuación no tiene solución.

Por ejemplo, la ecuación $x + 3 = x + 4$ es equivalente a la expresión falsa $3 = 4$, luego no tiene solución.

Por la misma razón, todos los números son solución de una ecuación que es equivalente a una expresión verdadera.

Por ejemplo, la ecuación $x + 4 = 2x + 4 - x$ es equivalente a la expresión verdadera $4 = 4$, y por tanto cualquier valor de x es solución de ella.

Comentarios

Al obtener expresiones que no dependen de variables, es importante verificar que los procedimientos de resolución realizados sean correctos y luego interpretar lo obtenido según el contexto del problema.

Ubicación: Módulo 2

Taller: Planteamiento y resolución de ecuaciones con métodos algebraicos.
Actividad 3: Interpretando soluciones.