SUMA Y SIGUE

MATEMÁTICA EN LÍNEA

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

fcfm
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

CMM
Centro de Modelamiento Matemático

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

FICHAS TALLER 3: LENGUAJE ALGEBRAICO.

INTRODUCCIÓN

En este taller se estudiaron expresiones numéricas y algebraicas que describen patrones y regularidades presentes en secuencias de diversos contextos. Se trabajaron en detalle las expresiones algebraicas, evaluándolas y abordando sus propiedades para operar con ellas. Además, se utilizó el álgebra para expresar propiedades de la operatoria de los números. Se analizaron situaciones que se modelan con progresiones y que se pueden representar mediante expresiones algebraicas. Por último, se examinaron errores frecuentes en el trabajo con lenguaje algebraico durante la enseñanza básica.

Las fichas que conforman este apartado contemplan los siguientes contenidos:

- Expresiones numéricas.
- Expresiones algebraicas.
- Algunas convenciones en el trabajo con expresiones algebraicas.
- Evaluación de expresiones algebraicas.
- Reducción de términos semejantes.
- Simplificación de fracciones con expresiones algebraicas.
- Propiedades de los números expresadas mediante lenguaje algebraico.
- Representaciones geométricas para visualizar propiedades de las operaciones.
- Identidades algebraicas.
- Álgebra para deducir la regla de los signos.
- Expresiones algebraicas de propiedades y fórmulas geométricas.
- Expresiones algebraicas para progresiones aritméticas y geométricas.
- Errores comunes en el uso de lenguaje algebraico.

14- Comenzando con expresiones numéricas

Desde pequeños, los niños y niñas se familiarizan con expresiones numéricas tales como 5 + 4, 3 • 2, las que pueden surgir al expresar relaciones entre los datos de un problema.

Las *expresiones numéricas* permiten representar de manera concisa y precisa una situación o una relación. El uso de expresiones numéricas para describir situaciones cotidianas o para expresar patrones es un paso previo al trabajo con expresiones algebraicas.

Comentarios

Expresar patrones a través de expresiones numéricas es una forma de introducir las expresiones algebraicas, dándoles significado y pasando desde lo particular a lo general.

Ubicación: Módulo 2

Taller: Lenguaje algebraico.
Actividad 1: Expresiones para armar cuadrados.

TALLER 3: LENGUAJE ALGEBRAICO.

15- ¿Qué son las expresiones algebraicas?

Una *expresión algebraica* es una secuencia de números y letras unidos mediante operaciones matemáticas.

Es importante mencionar que las letras pueden representar cualquier valor numérico.

De este modo, 3 • a será 6 si a vale 2, o será 9 si a vale 3.

Un término de una expresión algebraica está compuesto por productos y cocientes entre un número y letras, los cuales se denominan coeficiente numérico y factor literal:

Coeficiente numérico

$$2\frac{ab^2}{c}$$

Factor literal

El uso de símbolos y letras permite expresar relaciones entre cantidades, de tal manera que en una sola expresión se pueden resumir muchos casos.

Comentarios

Es conveniente que el uso del álgebra sea precedido por la utilización de expresiones numéricas y tablas para expresar patrones y regularidades. Esto facilita realizar generalizaciones y comprender el significado de las expresiones algebraicas.

Muchas veces el razonamiento que conduce a una expresión numérica es el mismo que permite escribir la expresión algebraica que lo generaliza.

Ubicación: Módulo 2

Taller: Lenguaje algebraico.
Actividad 1: Expresiones para armar cuadrados.

16- Trabajando con expresiones algebraicas

Es una expresión algebraicas se utilizan letras para representar variables, las que pueden tomar cualquier valor numérico.

La elección de la letra utilizada es arbitraria, es decir, cualquier letra del abecedario puede ser usada para representar un número.

Al trabajar con expresiones algebraicas se utilizan algunas *convenciones*:

- Al escribir la multiplicación se usa el punto (•) en lugar del signo (x) para no confundirse con expresiones que tengan la letra x.
- Al expresar la multiplicación entre un número y una letra o entre letras se puede omitir el signo (•) de multiplicación.
- Al escribir la multiplicación entre un número y una letra, se escribe antes el número y luego la letra.

Entonces, para expresar el doble de un número se usa indistintamente $2 \cdot x$ o $2x$, y la multiplicación entre p y q se puede representar como $p \cdot q$ o pq. Además, se escribe $2x$ y no $x2$.

Comentarios

Cuando se tiene más de una variable, es necesario denotarlas con letras distintas.

Ubicación: Módulo 2

Taller: Lenguaje algebraico.
Actividad 2: Álgebra en la zapatería.

17- Evaluando expresiones algebraicas

Evaluar o *valorar* una expresión algebraica significa dar un valor numérico a las variables que en ella aparecen.

Al evaluar expresiones que involucran más de una variable, los valores considerados pueden ser iguales o distintos.

La evaluación de expresiones puede cumplir varios propósitos, entre ellos:

- Comprender por qué un cierto resultado puede ser correcto o no:

  - comprender por qué $n + 3n + 2 = 4n + 2$, y
  - entender por qué $n + 3n + 2$ no es igual a $6n$

- Recordar que las variables siempre representan números.

Comentarios

Es importante motivar a los estudiantes a evaluar sus expresiones algebraicas para verificar si el resultado es correcto o no, o si es pertinente para la situación que se está trabajando.

Ubicación: Módulo 2

Taller: Lenguaje algebraico.
Actividad 2: Álgebra en la zapatería.

18- Lenguaje natural versus lenguaje algebraico

Una de las complicaciones que tiene describir situaciones o relaciones con lenguaje algebraico o numérico es la *ambigüedad del lenguaje natural*.

Por ejemplo, la presencia de una coma en una oración o la variación del tono de voz en una frase pueden cambiar su traducción en expresión numérica o algebraica y, por tanto, su valor final. Además, en el lenguaje oral las comas o puntos no siempre se aprecian con claridad, por lo que evidentemente podrían darse ambigüedades.

> La expresión "el triple de, quince más doce" corresponde a $3 \cdot (15 + 12)$, mientras que "tres veces quince, más doce" se expresa por $3 \cdot 15 + 12$. De ambas frases se obtienen expresiones numéricas de apariencia similar, pero con un valor distinto.

El lenguaje algebraico, a diferencia del lenguaje natural, es preciso, no tiene las ambigüedades de este último. Esta característica evita confusiones a la hora de trabajar con él.

> La expresión en lenguaje natural "el doble de un número más uno" se podría entender como $2(n + 1)$ o $2n + 1$. Estas dos expresiones algebraicas son absolutamente diferentes.

Comentarios

Es de suma importancia asegurarse de que al traducir alguna expresión desde el lenguaje natural al lenguaje algebraico, se esté expresando exactamente lo que se quiere decir.

Ubicación: Módulo 2

Taller: Lenguaje algebraico.
Actividad 3: Expresiones para el inventario.

19- Reduciendo términos semejantes

Debido a que en las expresiones algebraicas las variables representan números, en ellas se cumplen las propiedades aritméticas. Además, una misma letra corresponde al mismo número en una expresión algebraica.

Por ejemplo, por efecto de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma, la expresión:

$$3x + 5x + 6x + 9x + 3x + 7x + 6x$$

se puede escribir como:

$$(3 + 5 + 6 + 9 + 3 + 7 + 6)x$$

lo que equivale a:

$$39x$$

Esta manera de reducir expresiones algebraicas se denomina *reducción de términos semejantes*.

Recordemos que un término de una expresión algebraica se puede escribir como el producto entre un coeficiente numérico y un factor literal:

Coeficiente numérico ← $2\dfrac{ab^2}{c}$ → Factor literal

Dos términos se dicen semejantes si tienen el mismo factor literal.

Comentarios

Esta forma de reducir términos algebraicos mediante la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma es una de las formas que usualmente se denomina *factorizar*.

Ubicación: Módulo 2

Taller: Lenguaje algebraico.
Actividad 4: Contando productos con álgebra.

20- Simplificando fracciones con expresiones algebraicas

Como en toda expresión algebraica las letras representan números, las operaciones aritméticas presentes en ellas conservan sus propiedades. Por esta razón, podemos *simplificar* las fracciones que contienen expresiones algebraicas de la misma manera que simplificamos fracciones numéricas: dividiendo el numerador y el denominador por el mismo número o variable.

Ejemplo:

$$\frac{5ab}{b} + 2a + 9$$

En este caso podemos simplificar la fracción por b para obtener $5a + 2a + 9$ y luego, reducir a la expresión a $7a + 9$.

Otro ejemplo:

$$\frac{19b^2 + 6b^2}{11b^2cj}$$

En este caso, el numerador es $19b^2 + 6b^2$, que se reduce a $25b^2$; por lo tanto, la fracción queda

$$\frac{25b^2}{11b^2cj}$$

Y se puede simplificar dividiendo por b^2 el numerador y el denominador.

Comentarios

Al simplificar expresiones algebraicas en fracciones se debe tener presente que las operaciones aritméticas conservan sus propiedades, por ejemplo, los productos y divisiones se desarrollan antes que las adiciones y sustracciones.

Ubicación: Módulo 2

Taller: Lenguaje algebraico.
Actividad 4: Contando productos con álgebra.

21- El álgebra para expresar propiedades de los números

El álgebra nos permite expresar propiedades de manera general y precisa.

Por ejemplo, la propiedad conmutativa nos dice que para todo par de números a y b se tiene que $a \bullet b = b \bullet a$. Si evaluamos en algunos casos particulares, obtenemos:

$$4{,}5 \bullet 2 = 2 \bullet 4{,}5$$

$$-5 \bullet 2 = 2 \bullet -5$$

$$-0{,}7 \bullet -\frac{2}{3} = -\frac{2}{3} \bullet -0{,}7$$

Algunas propiedades de los números expresadas en lenguaje algebraico:

• *Conmutatividad de la suma*: para dos números cualesquiera denotados por a y b, se cumple que:

$$a + b = b + a$$

• *Asociatividad de la suma:* para tres números cualesquiera denotados por a, b y c, se cumple que:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

• *Conmutatividad de la multiplicación*: para dos números cualesquiera denotados por a y b, se cumple que:

$$a \bullet b = b \bullet a$$

• *Asociatividad de la multiplicación:* para tres números cualesquiera denotados por a, b y c, se cumple que:

$$a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$$

• *Distributividad de la multiplicación sobre la suma*: para tres números cualesquiera denotados por a, b y c, se cumple que:

$$a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$$

Cuando esta propiedad se lee de izquierda a derecha se dice que se distribuye a sobre el paréntesis, sin embargo, cuando se lee de derecha a izquierda, decimos que estamos *factorizando* por a.

Comentarios

Las propiedades anteriores son útiles para trabajar con expresiones algebraicas y sirven de base para deducir otras propiedades.

Ubicación: Módulo 2

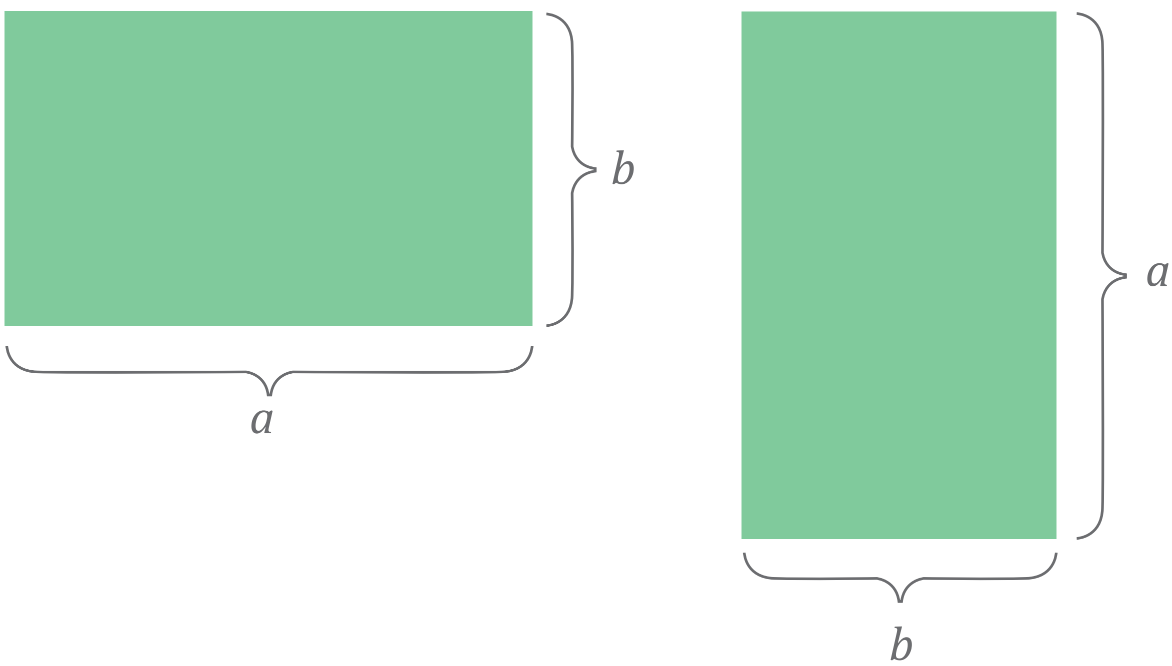
Taller: Lenguaje algebraico.
Actividad 4: Contando productos con álgebra.

22- Representaciones geométricas para visualizar propiedades de las operaciones

Utilizar *visualizaciones geométricas* en el trabajo algebraico nos ayuda a convencernos de la validez de distintas propiedades de las operaciones.

A través de modelos continuos, representando números como longitudes de segmentos y productos como áreas de rectángulos, podemos visualizar las propiedades para números positivos cualesquiera.

Por ejemplo, el primer rectángulo tiene área ab, y el segundo, ba. Claramente, el segundo rectángulo es el primero rotado en 90º, entonces su superficie es igual, es decir, $ab = ba$, lo que nos ayuda a visualizar la conmutatividad de la multiplicación.



Comentarios

Es importante notar que al usar modelos geométricos se están utilizando representaciones solo para variables positivas.

Ubicación: Módulo 2

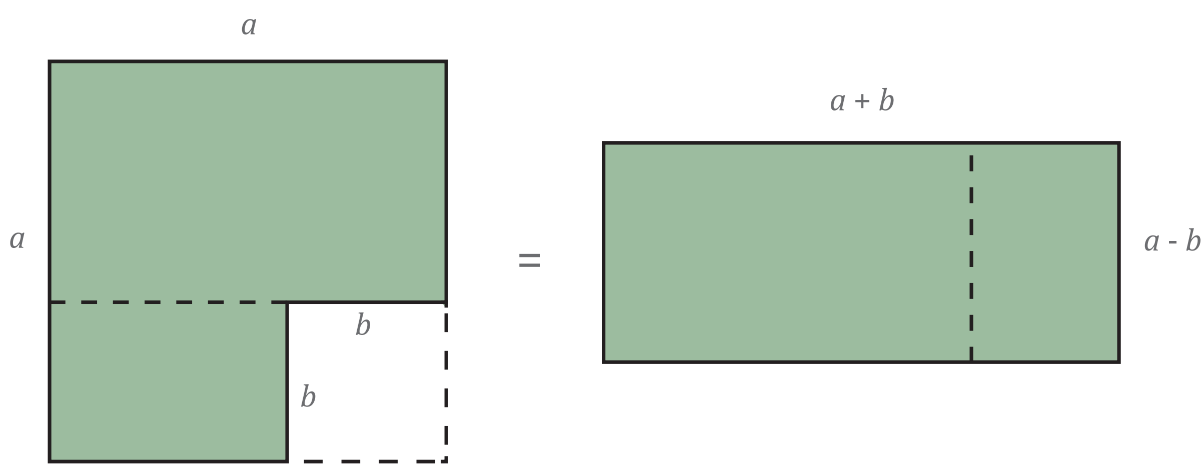
Taller: Lenguaje algebraico.
Actividad 4: Contando productos con álgebra.

23- Visualizando identidades algebraicas

Una *identidad algebraica* es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que se escriben de distinta forma, pero utilizando las propiedades podemos transformar una en la otra.

La visualización geométrica de identidades y propiedades, aunque no constituye una demostración, nos ayuda a comprender su validez.

Por ejemplo: Sean a y b dos números cualesquiera, con b menor que a:



En el diagrama, la primera figura representa un cuadrado de área a^2 al que se le ha quitado el área de un cuadrado que es b^2, es decir, $a^2 - b^2$.

La segunda figura es equivalente, solo que el rectángulo de abajo de la primera figura se gira y se une por el lado derecho al rectángulo de arriba, también de la primera figura, quedando un rectángulo de área $(a + b)(a - b)$. Como ambas figuras tienen la misma superficie, se tiene que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Se debe notar que al usar la distributividad en $(a + b)(a - b)$ y luego al operar los términos semejantes, se llega a $a^2 - b^2$. Esta identidad se denomina “suma por su diferencia”.

Comentarios

Existen otras identidades algebraicas conocidas que se pueden visualizar mediante representaciones geométricas, por ejemplo, el “cuadrado de binomio”: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Ubicación: Módulo 2

Taller: Lenguaje algebraico.
Actividad 4: Contando productos con álgebra.

24- Álgebra para deducir la regla de los signos

Para a y b números cualesquiera se cumple que:

$$a \bullet b = ab$$
$$(-a) \bullet (-b) = ab$$
$$(-a) \bullet b = -ab$$
$$a \bullet (-b) = -ab$$

Lo anterior se puede demostrar a través de las propiedades de las operaciones.

Aplicando estas propiedades en el caso de que a y b sean números positivos, se deduce la conocida *regla de los signos*:

> Un número positivo por un número positivo da como resultado un número positivo; un número negativo por otro negativo da como resultado un número positivo; un número negativo por uno positivo da un número negativo.

Una manera con la que esta regla se anota de manera informal es:

$$+ \bullet + = +$$
$$- \bullet - = +$$
$$+ \bullet - = -$$
$$- \bullet + = -$$

Comentarios

Al enseñar la regla de los signos, es importante demostrar su validez mediante ejemplos genéricos o el uso del álgebra y las propiedades de los números, ya que, por ejemplo, puede no ser intuitivo que la multiplicación entre números negativos da un resultado positivo.

Ubicación: Módulo 2

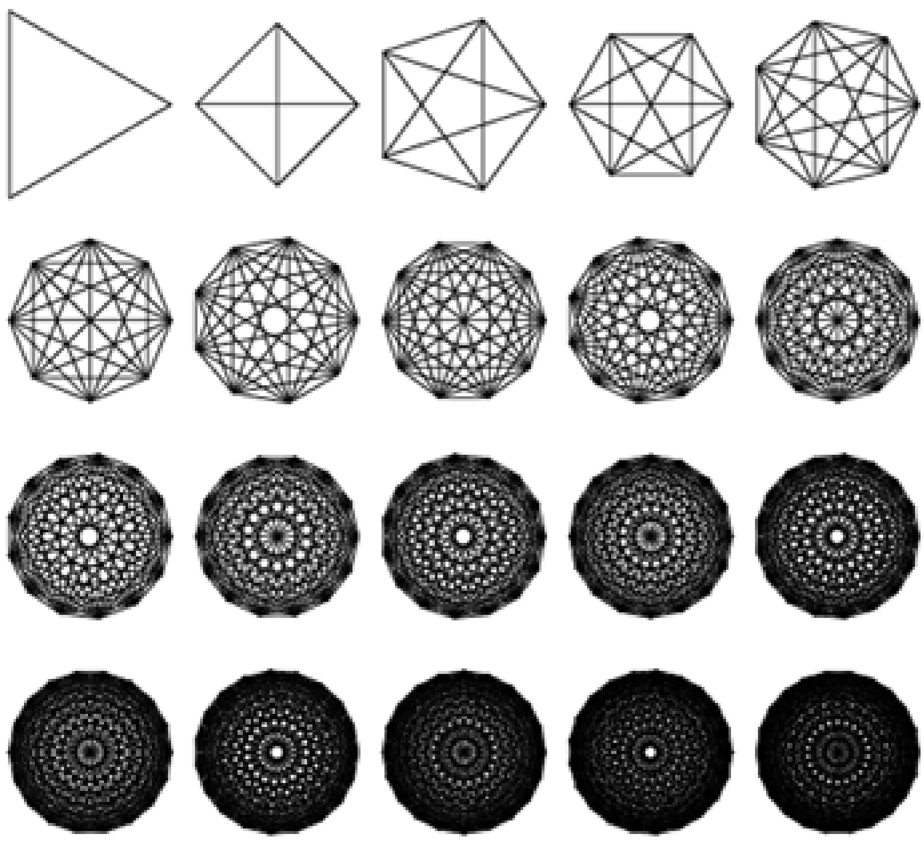
Taller: Lenguaje algebraico.
Actividad 4: Contando productos con álgebra.

25- Expresiones algebraicas de propiedades y fórmulas geométricas

En geometría aparecen numerosas expresiones algebraicas debido a que ellas nos permiten expresar propiedades y fórmulas generales.

Por ejemplo, el número de diagonales de un polígono regular de n lados se puede expresar por:

$$\frac{n\,(n-3)}{2}$$



La imagen anterior nos muestra las diagonales a medida que va aumentando la cantidad de lados de un polígono regular. La importancia del álgebra es que nos permite conocer el número de diagonales para polígonos de cualquier número de lados, mientras que otros métodos, como el conteo, no son siempre eficientes para conocer dicho número.

Comentarios

Es recomendable incentivar en los estudiantes el uso de álgebra en contenidos geométricos, por ejemplo, en la deducción y expresión de fórmulas geométricas.

Ubicación: Módulo 2

Taller: Lenguaje algebraico.
Actividad 5: Expresiones para secuencias y progresiones.

26- Una expresión algebraica para las progresiones aritméticas

Si a es el primer término de una *progresión aritmética* y su diferencia es d, el término n-ésimo se puede expresar como:

$$a + (n - 1) \cdot d$$

Si conocemos d y a, podremos encontrar cualquier término de la progresión aritmética.

¿Qué valores basta saber en una progresión aritmética para conocer todos sus términos?

- La diferencia entre términos, un término específico y su posición.
- Dos términos consecutivos y la posición de cada uno.
- Dos términos cualesquiera y sus respectivas posiciones.

Comentarios

Es bastante usual en la enseñanza escolar el trabajo de completar secuencias numéricas que corresponden a progresiones aritméticas y geométricas. Se recomienda, además, promover que los estudiantes comuniquen sus razonamientos para completarlas.

Ubicación: Módulo 2

Taller: Lenguaje algebraico.
Actividad 5: Expresiones para secuencias y progresiones.

27- Una expresión algebraica para progresiones geométricas

Si a es el primer término de la progresión geométrica de razón r, el término n-ésimo de ella se escribe de la siguiente manera:

$$a \cdot r^{n-1}$$

Si conocemos r y a, podremos encontrar cualquier término de la progresión geométrica.

¿Qué valores basta saber en una progresión geométrica para conocer todos sus términos?

- La razón y uno de los términos con su posición.
- Dos términos consecutivos y sus posiciones.

Comentarios

Para introducir la expresión algebraica de una progresión geométrica es necesario manejar la noción de potencia y su notación.

Ubicación: Módulo 2

Taller: Lenguaje algebraico.
Actividad 5: Expresiones para secuencias y progresiones.

28- Errores comunes en el uso de lenguaje algebraico

- En las expresiones algebraicas, las letras simbolizan números, no objetos. Por ejemplo, es un error usual escribir "la suma de 4 casas más 5 casas son 9 casas" como $4c + 5c = 9c$, donde c simboliza casas. En este caso el error es considerar c como el objeto casa en lugar de una variable que representa un número cualquiera.
- La multiplicación no se distribuye sobre la multiplicación. Es común que los estudiantes multipliquen de la forma $2 \cdot (6x) = 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot x$, lo que es incorrecto.
- Es común reducir términos que no son semejantes. Por ejemplo, $5x + 1 = 6x$ es incorrecto, ya que los términos $5x$ y 1 no son semejantes, por lo que no se pueden reducir.
- Un error usual es que al elevar al cuadrado una suma de dos términos, solo se suman los cuadrados de cada uno de ellos. Esto, en lenguaje algebraico, se expresa por $(x + y)^2 = x^2 + y^2$, lo que es falso.
- Otro error es no tener claro que al simplificar expresiones algebraicas en fracciones, solo se pueden simplificar factores.

$$\frac{3\cancel{x}\cancel{y}}{\cancel{x}+2\cancel{y}} = \frac{3}{2}$$

- Comúnmente los niños traducen directamente del lenguaje natural al lenguaje algebraico. Por ejemplo, en la frase "El papá de Juan tiene 20 años más que Juan", es posible identificar papá, más 20 y Juan, en ese orden, y luego plantear $P + 20 = J$. Esto último indica que Juan es 20 años mayor que su padre.

Comentarios

Existen otras dificultades y errores frecuentes en el trabajo con lenguaje algebraico. Es importante que el docente los conozca y se adelante a ellos dentro de lo posible para crear actividades en que se utilicen de manera provechosa.

Ubicación: Módulo 2

Taller: Lenguaje algebraico.
Actividad 6: Errores en clases de matemática.