SUMA Y SIGUE

MATEMÁTICA EN LÍNEA

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile
fcfm
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile
CMMEdu
Laboratorio de Educación
Centro de Modelamiento Matemático
United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization
UNESCO - Hamdan Prize for the effectiveness of teachers
Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura
Cátedra UNESCO "Formación de Docentes para Enseñar Matemática en el Siglo XXI" Universidad de Chile

MATERIAL PEDAGÓGICO
COMPLEMENTARIO

FICHAS TALLER 5:
INTERPRETACIÓN DE GRÁFICOS

INTRODUCCIÓN

En este taller se continuó y profundizó el estudio de la relación entre dos variables a través de su representación gráfica. Además, se estudiaron propiedades y características de las curvas graficadas a partir del análisis de situaciones. De manera transversal, se modelaron situaciones de la vida real empleando gráficos y se resolvieron problemas que involucran su uso e interpretación.

Los contenidos abordados en las fichas son los siguientes:

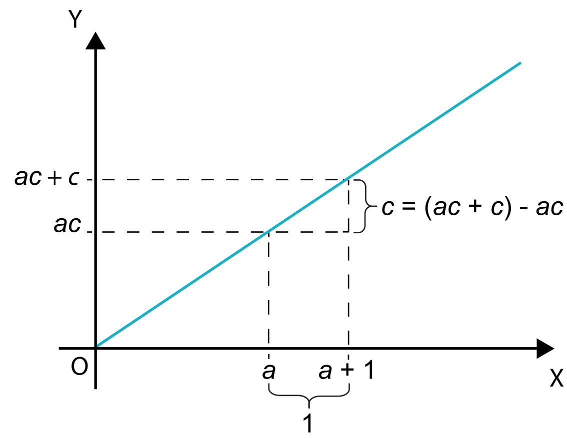
- Incremento y constante de proporcionalidad
- Representación gráfica de las relaciones $y = ax + b$ e $y = \frac{a}{x} + b$
- Punto de intersección
- Variables discretas y continuas
- Curvas que se intersectan
- Incremento de una variable
- Crecimiento y decrecimiento
- Curvas crecientes y decrecientes
- Curvas cóncavas
- Gráfico escalonado

TALLER 5: INTERPRETACIÓN DE GRÁFICOS

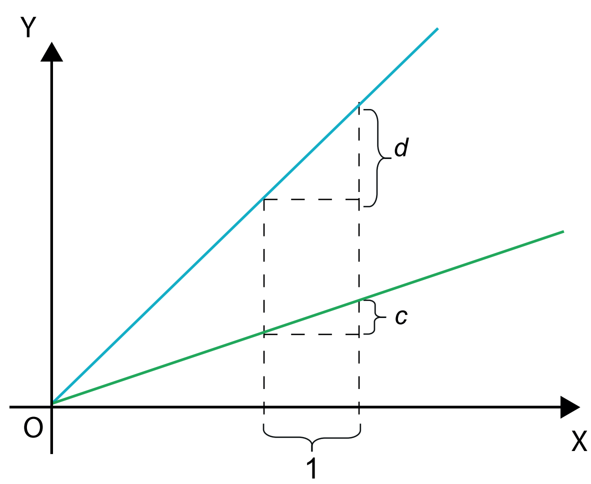
1. Incremento y constante de proporcionalidad directa

Como vimos, la inclinación respecto de la horizontal de una recta de la forma $y = cx$, que representa una relación de proporcionalidad directa entre las variables x e y, está asociada a la constante de proporcionalidad c, que suponemos positiva. Más aún, como se muestra en los siguientes gráficos, c corresponde al incremento en la variable y cuando la variable x aumenta en 1 unidad.

x	y
a	$a \cdot c$
$a + 1$	$a \cdot c + c$



En el gráfico anterior, a representa cualquier valor mayor o igual que 0.
El siguiente gráfico muestra que si c y d corresponden a las constantes de proporcionalidad asociadas a dos rectas y $c < d$, entonces la recta $y = cx$ es menos empinada, es decir, menos inclinada respecto de la horizontal que la recta $y = dx$.



Comentarios

Observemos que como los dos gráficos anteriores están en el mismo sistema de ejes coordenados y, por lo tanto, con las mismas escalas, la inclinación de la recta se ordena de la misma forma que las constantes de proporcionalidad.

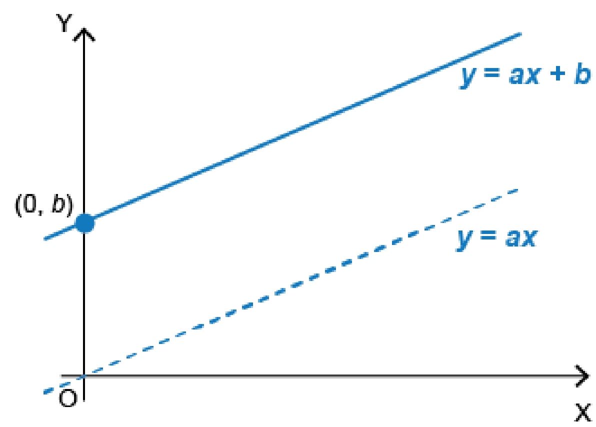
Ubicación

Taller: Interpretación de gráficos
Actividad: Polerones para la graduación de octavo

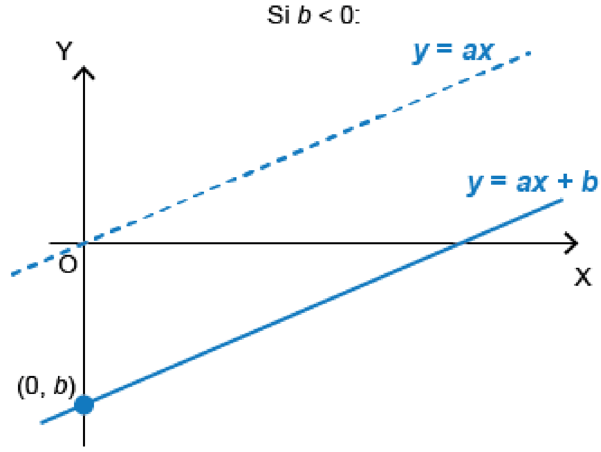
2. Representación gráfica de la relación $y = ax + b$

Si dos variables x e y se relacionan mediante la expresión $y = ax + b$, en la que a y b son constantes, entonces, su gráfico corresponde al asociado a la relación de proporcionalidad $y = ax$ desplazado verticalmente en b. Esto se representa por una línea recta que corta al eje vertical en el punto $(0, b)$, como se muestra a continuación:

Si $b > 0$:



Si $b < 0$:



Vemos que la recta que se obtiene a partir de la relación $y = ax + b$ tiene la misma inclinación respecto a la horizontal que la recta $y = ax$, por lo tanto, al igual que antes, el coeficiente a cuantifica su grado de inclinación. Usualmente el número a se denomina pendiente de la recta y corresponde al incremento en la variable y cuando la variable x aumenta en 1 unidad.

Comentarios

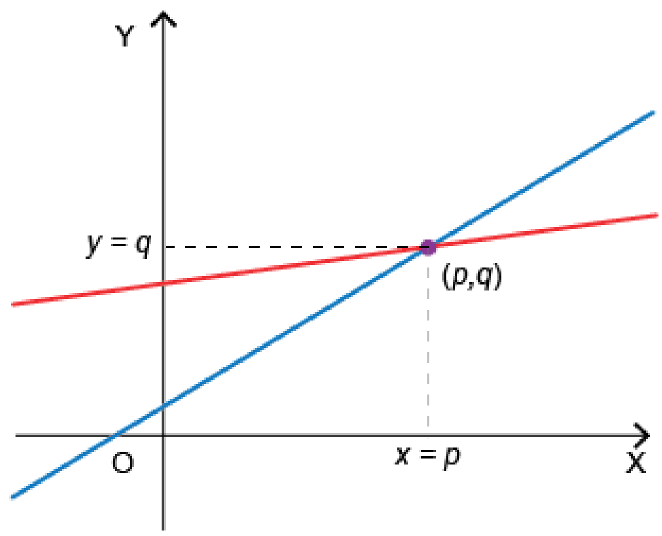
Abordar las relaciones de proporcionalidad estudiando sus representaciones gráficas puede ser un punto de partida para desarrollar el estudio de las funciones con los estudiantes.

Ubicación

Taller: Interpretación de gráficos
Actividad: Polerones para la graduación de octavo

3. Punto de intersección

Al comparar visualmente dos curvas que están en un mismo sistema de ejes coordenados, puede ocurrir que para cierto valor de *x* el valor de *y* para ambas sea el mismo, produciéndose un punto de intersección entre ellas.



Por ejemplo, si en la curva roja la variable *y* representa el total que se debe pagar al comprar *x* artículos en la empresa A y en la curva azul la variable *y* representa el total que se pagará al comprar *x* artículos en la empresa B, la interpretación del punto de intersección *(p, q)* es que al comprar *p* artículos, el total que se debe pagar en ambas empresas es el mismo.

Comentarios

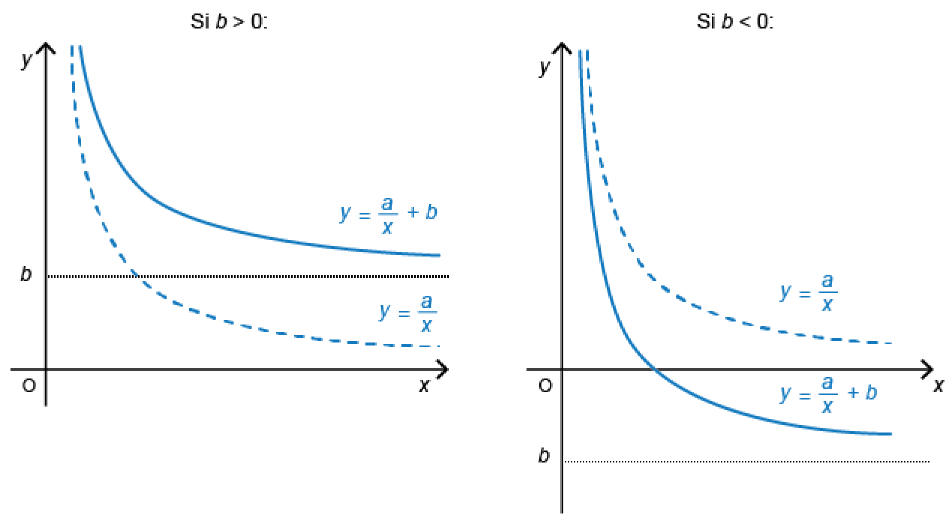
- Como hemos utilizado variables que toman valores mayores que 0, encontraremos el punto de intersección en el primer cuadrante. Sin embargo, cuando las variables pueden tomar cualquier valor, el punto de intersección puede encontrarse en cualquier cuadrante.
- Graficar distintas relaciones en un mismo plano cartesiano nos puede ayudar a tomar decisiones respecto de las situaciones que ellas modelan. Por ejemplo, podemos decidir en qué rango de valores de una de las variables una elección puede ser más conveniente que otra.

Ubicación

Taller: Interpretación de gráficos
Actividad: Polerones para la graduación de octavo

4. Representación gráfica de la relación y = $\frac{a}{x}$ + b

Si dos variables x e y se relacionan mediante la expresión $y = \frac{a}{x} + b$, en la que a y b son constantes, entonces su gráfico corresponde al asociado a la relación de proporcionalidad inversa $y = \frac{a}{x}$ desplazado verticalmente en b. Esto se representa por una hipérbola que no corta ni al eje vertical ni a la recta $y = b$, como se muestra a continuación:



Comentarios

En el caso de la relación $y = \frac{a}{x} + b$, la recta $y = b$ se conoce como asíntota.

Ubicación

Taller: Interpretación de gráficos
Actividad: Polerones para la graduación de octavo

TALLER 5: INTERPRETACIÓN DE GRÁFICOS

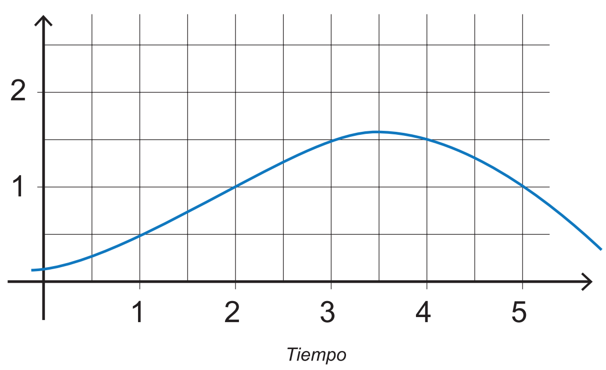
5. Variables continuas y discretas

Al graficar la relación entre dos variables es importante tener en cuenta su naturaleza. Podemos distinguir variables continuas y discretas.

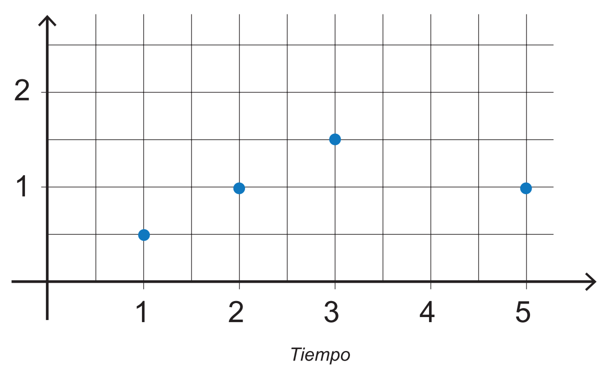
- Una variable se dice **continua** si puede tomar todos los valores de un intervalo de números. Por ejemplo, la longitud corresponde a una variable continua.
- Una variable se dice **discreta** si los valores que puede tomar corresponden a puntos aislados de la recta numérica. Por ejemplo, si una variable *x* corresponde a una cantidad de personas, sabemos que *x* puede ser 1 o 2, pero no tiene sentido tomar los valores de *x* entre 1 y 2.

Una misma variable puede definirse a veces como continua y otras como discreta dependiendo de la conveniencia y el contexto. Por ejemplo, si nuestros aparatos de medición nos permiten medir el tiempo con una precisión de minutos, entonces la variable tiempo (medido en minutos) puede ser considerada discreta. Por otro lado, a veces conviene considerar que la variable tiempo puede tomar todos los valores positivos de la recta numérica, en cuyo caso se considera continua.

Variable continua



Variable discreta



Comentarios

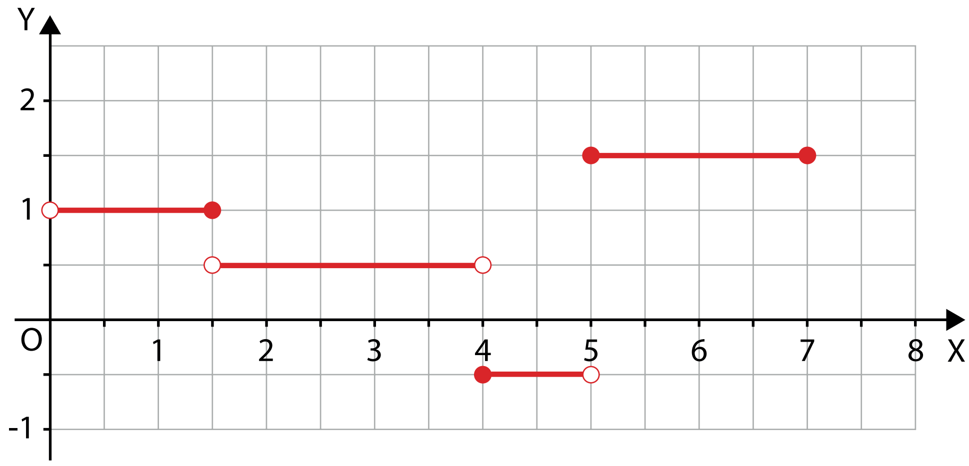
Al graficar la relación entre dos variables es importante tener en cuenta la naturaleza de estas, distinguiendo si son continuas o discretas.

Ubicación

Taller: Interpretación de gráficos
Actividad: ¿Dónde conviene estacionar?

6. Gráfico escalonado

El gráfico de una relación entre dos variables x e y se dice escalonado si el rango de variación de x se puede separar en intervalos, de modo que en cada uno de ellos la variable y se mantenga constante. Para denotar dónde empieza y dónde termina un escalón se usa la notación ● o ○ dependiendo si los puntos correspondientes pertenecen o no al escalón, respectivamente.



Como podemos observar en el gráfico:

- El valor de y es constante e igual a 1 para valores de x desde 0 hasta 1,5, incluyendo x = 1,5, pero no x = 0.
- Luego, y es constante e igual a 0,5 para x desde 1,5 hasta 4. En este caso los puntos extremos del escalón no pertenecen a él.
- A continuación, y = -0,5 desde x = 4 inclusive hasta x = 5, donde dicho punto no pertenece al escalón.
- Finalmente, y = 1,5 desde x = 5 hasta x = 7, incluyendo ambos extremos.

Comentarios

Utilizamos gráficos escalonados, por ejemplo, para describir el precio pagado en un estacionamiento respecto del tiempo de uso debido a que este es una variable que se puede separar en intervalos en los que el precio permanece constante.

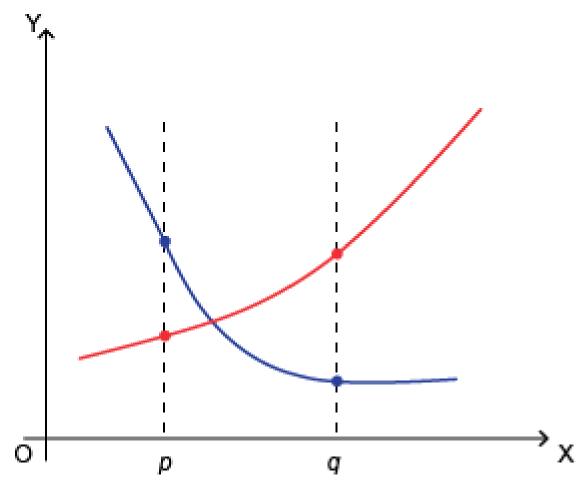
Ubicación

Taller: Interpretación de gráficos
Actividad: ¿Dónde conviene estacionar?

7. Comparación visual de curvas

Al dibujar dos o más curvas en un mismo sistema de ejes coordenados, podemos comparar visualmente los valores de las variables asociadas a estas curvas.

Para esto, debemos fijar el valor de la variable x, digamos $x = p$, luego trazar la recta vertical $x = p$ y marcar los puntos donde la recta corta a cada curva. Si una curva se intersecta con la recta a mayor altura, el valor de la variable y asociada a esta curva es mayor para este valor de x. Por ejemplo, en el gráfico siguiente, para el valor p, vemos que la variable y asociada a la curva azul toma un valor mayor que el de y asociada a la roja, pero para el valor q, vemos que el valor de y asociado a la curva roja es mayor que el valor de y asociado a la azul.



Observemos que en el punto donde se produce la intersección entre las curvas el valor de y asociado a la curva roja y a la azul es el mismo.

Comentarios

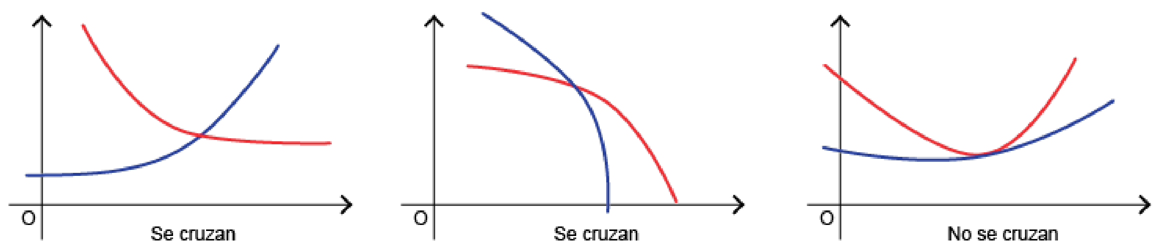
Comparar visualmente los valores de las curvas trazando rectas verticales es una estrategia simple y sencilla que puede utilizarse para cualquier par de curvas, incluso si ellas no se intersectan.

Ubicación

Taller: Interpretación de gráficos
Actividad: ¿Dónde conviene estacionar?

8. Curvas que se intersectan

No es cierto que al intersectarse dos curvas continuas estas siempre se cruzan; a veces se intersectan sin cruzarse. Los siguientes gráficos muestran distintas situaciones que pueden ocurrir cuando se intersectan dos curvas.



Comentarios

Cuando hablamos de rectas que se cruzan nos estamos refiriendo a que una “atraviesa” a la otra. Por ello, es perfectamente posible que dos curvas se intersecten sin cruzarse.

Ubicación

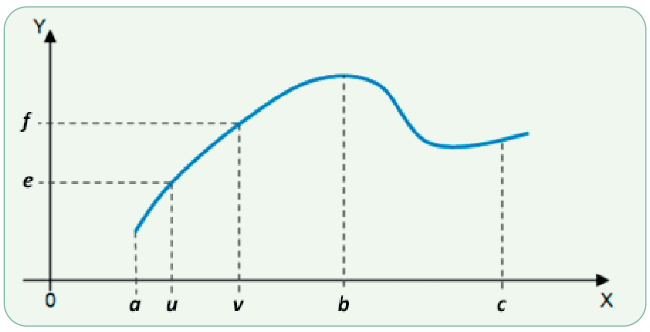
Taller: Interpretación de gráficos
Actividad: Los trenes

9. Crecimiento y decrecimiento

La curva que representa la relación de una variable *y* con respecto a una variable *x* es creciente en el tramo entre *a* y *b* si para cada par de valores *u* y *v* de dicho tramo, con $u < v$, se tiene que el valor de *y* asociado a *u* es menor que el valor de *y* asociado a *v*.

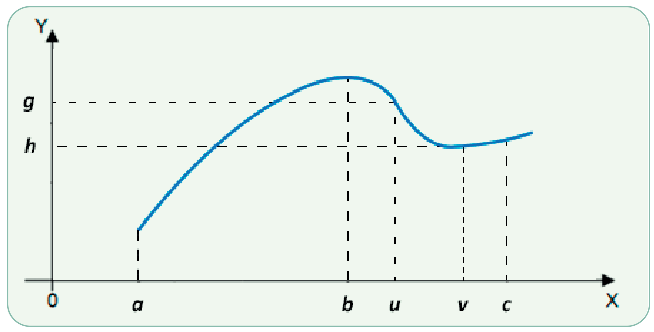
Por ejemplo:

La curva es creciente en el tramo *a y b*



$u < v$ y $e < f$

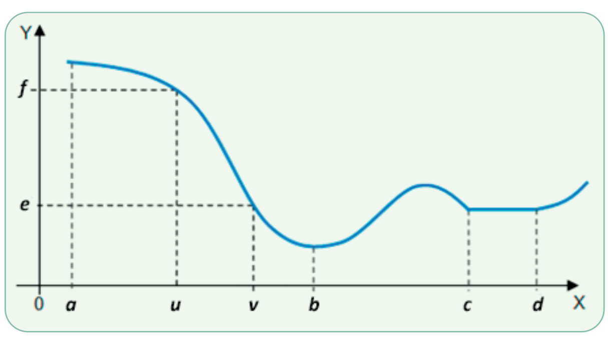
La curva no es creciente en el tramo entre *b* y *c*.



$u < v$ pero $g < h$

Del mismo modo, decimos que la curva que representa la relación de una variable *y* con respecto a una variable *x* es decreciente en el tramo entre *a* y *b* si para cada par de valores *u* y *v* de dicho tramo, con $u < v$, se tiene que el valor de *y* asociado a *u* es mayor que el valor de *y* asociado a *v*.

Por ejemplo, la siguiente curva es decreciente en el tramo entre *a* y *b*, pero no es decreciente en el tramo entre *b* y *c* (y tampoco es creciente):



Por otro lado, si en un determinado tramo el valor de *y* en la curva no varía, se dice que es constante. Por ejemplo, la curva anterior es constante en el tramo entre *c* y *d*.

Comentarios

Es importante explicitar que el crecimiento de una curva se define por tramos. Dicho de otro modo, una misma curva no se comporta necesariamente siempre de la misma manera, esto es: la curva puede ser, por ejemplo, creciente en un tramo y constante en otro.

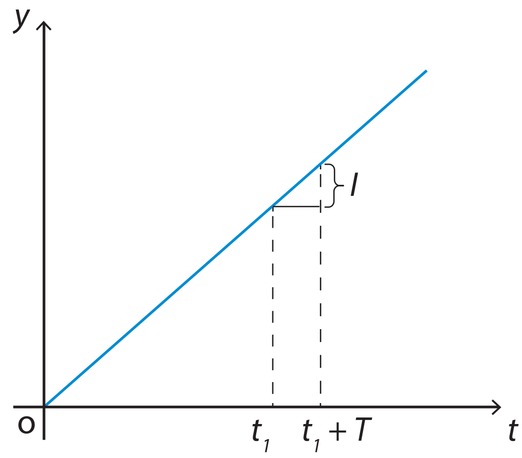
Ubicación

Taller: Interpretación de gráficos
Actividad: La visita de Fernando

TALLER 5: INTERPRETACIÓN DE GRÁFICOS

10. Incremento

Dada una relación entre dos variables t e y, denominamos incremento de la variable y en el intervalo de t_1 a $t_1 + T$ a la diferencia entre el valor que toma la variable y en $t_1 + T$ y el valor que toma la variable y en t_1.



Comentarios

Observemos que en el gráfico anterior el incremento toma un valor positivo. Este es un caso particular, ya que en general los incrementos pueden tomar valores positivos, negativos, o incluso nulos, como se verá en una ficha más adelante.

Ubicación

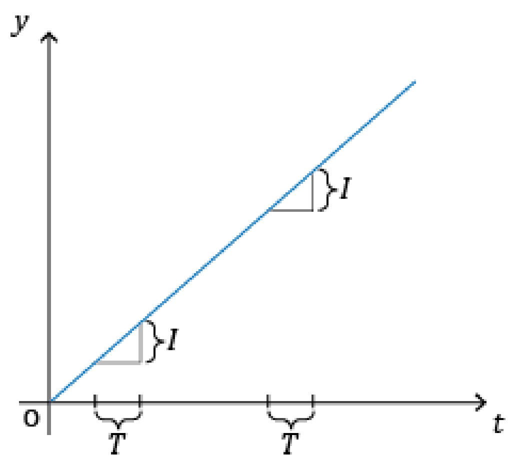
Taller: Interpretación de gráficos
Actividad: ¿Cuánta sombra cubre la figura?

11. Incrementos iguales

Si dos variables *y* y *t* son proporcionales, entonces el incremento de *y* entre dos instantes t_1 y t_2 corresponde a la constante de proporcionalidad multiplicada por la diferencia entre dichos instantes, esto es $c(t_2 - t_1)$.

Por tanto, en el caso de variables proporcionales, en intervalos iguales, el incremento es el mismo.

Podemos visualizar esto en el gráfico correspondiente a una relación de este tipo:



Comentarios

A veces es posible encontrar una fórmula para la relación entre dos variables, por ejemplo, en el caso que sean directa o inversamente proporcionales. Sin embargo, se puede extraer e interpretar mucha información de un gráfico aun sin contar con una fórmula que relacione ambas variables.

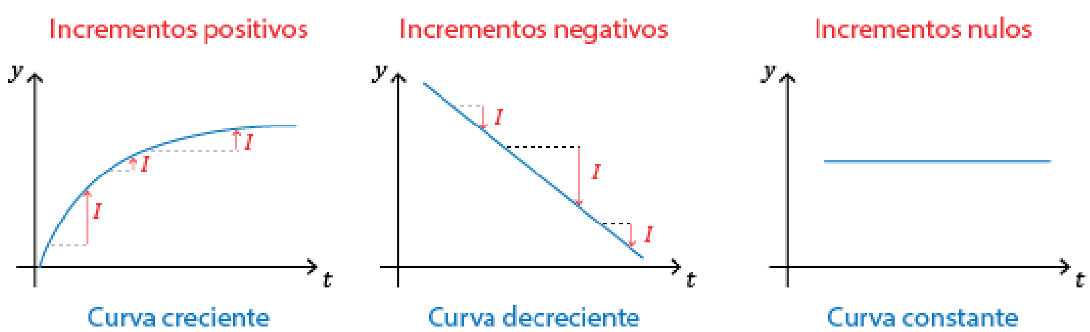
Ubicación

Taller: Interpretación de gráficos
Actividad: ¿Cuánta sombra cubre la figura?

12. Tipos de curvas

El signo de todos los posibles incrementos de la variable *y* en un intervalo caracteriza el tipo de crecimiento del gráfico que relaciona las variables *y* y *t*.

- Que los incrementos sean todos positivos en dicho intervalo corresponde a que el gráfico de la relación de *y* en función de *t* es creciente.
- Que los incrementos sean todos negativos en dicho intervalo corresponde a que el gráfico de la relación de *y* en función de *t* es decreciente.
- Que los incrementos sean todos nulos en dicho intervalo corresponde a que el gráfico de la relación de *y* en función de *t* es constante.



Comentarios

Para interpretar gráficos necesitamos examinar distintos elementos, por ejemplo, reconocer las variables presentes, la graduación de los ejes e identificar puntos en el gráfico. También se pueden analizar aspectos relacionados con la forma de la curva, por ejemplo, identificar e interpretar puntos donde el gráfico experimenta cambios de tendencia.

Ubicación

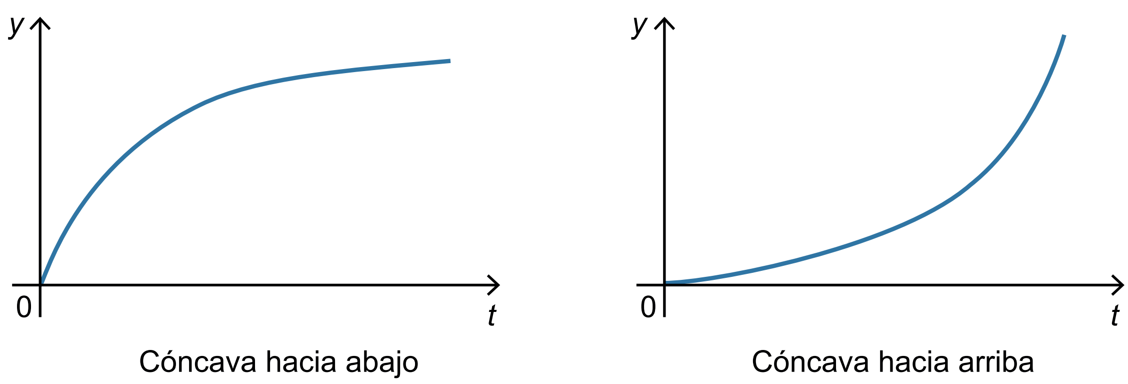
Taller: Interpretación de gráficos
Actividad: ¿Cuánta sombra cubre la figura?

13. Curvas cóncavas

Dada una relación entre dos variables *y* y *t*, si se consideran los incrementos de *y* correspondientes a intervalos de igual duración en un tramo de la variable *t*, se tiene que:

- Si a medida que aumenta el valor de *t* los incrementos son decrecientes, independientemente del largo de los intervalos, entonces, la curva que representa la relación de *y* en función de *t* es **cóncava hacia abajo** en dicho tramo.

- Si a medida que aumenta el valor de *t* los incrementos son crecientes, independientemente del largo de los intervalos, entonces, la curva que representa la relación de *y* en función de *t* es **cóncava hacia arriba** en dicho tramo.



Comentarios

Independientemente de si los ejes de un gráfico están o no graduados, es posible observar tendencias y extraer información de la situación que modela.

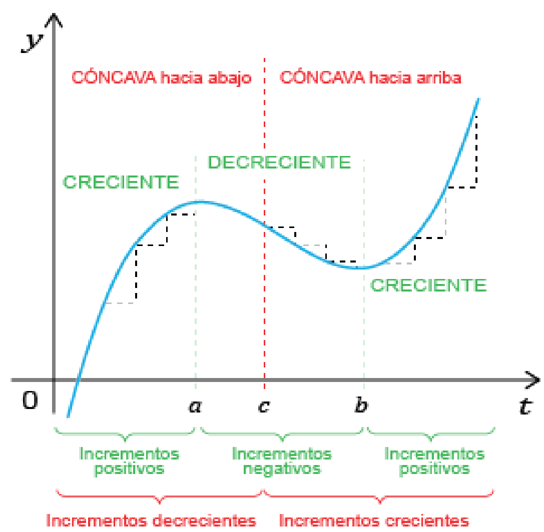
Ubicación

Taller: Interpretación de gráficos
Actividad: ¿Cuánta sombra cubre la figura?

TALLER 5: INTERPRETACIÓN DE GRÁFICOS

14. Crecimiento y concavidad

El estudio del comportamiento general de los incrementos de la variable *y* a medida que la variable *t* aumenta entrega información acerca del crecimiento y la concavidad de la curva que representa la relación de *y* en función de *t*.



Una misma curva no se comporta necesariamente siempre de la misma manera. Por ejemplo, la curva anterior es decreciente y cóncava hacia abajo desde *a* hasta *c*, y es decreciente y cóncava hacia arriba desde *c* hasta *b*.

Comentarios

Observemos que el signo de los incrementos está asociado al crecimiento de la curva. Mientras que el crecimiento de los incrementos está asociado a su concavidad.

Ubicación

Taller: Interpretación de gráficos
Actividad: ¿Cuánta sombra cubre la figura?