

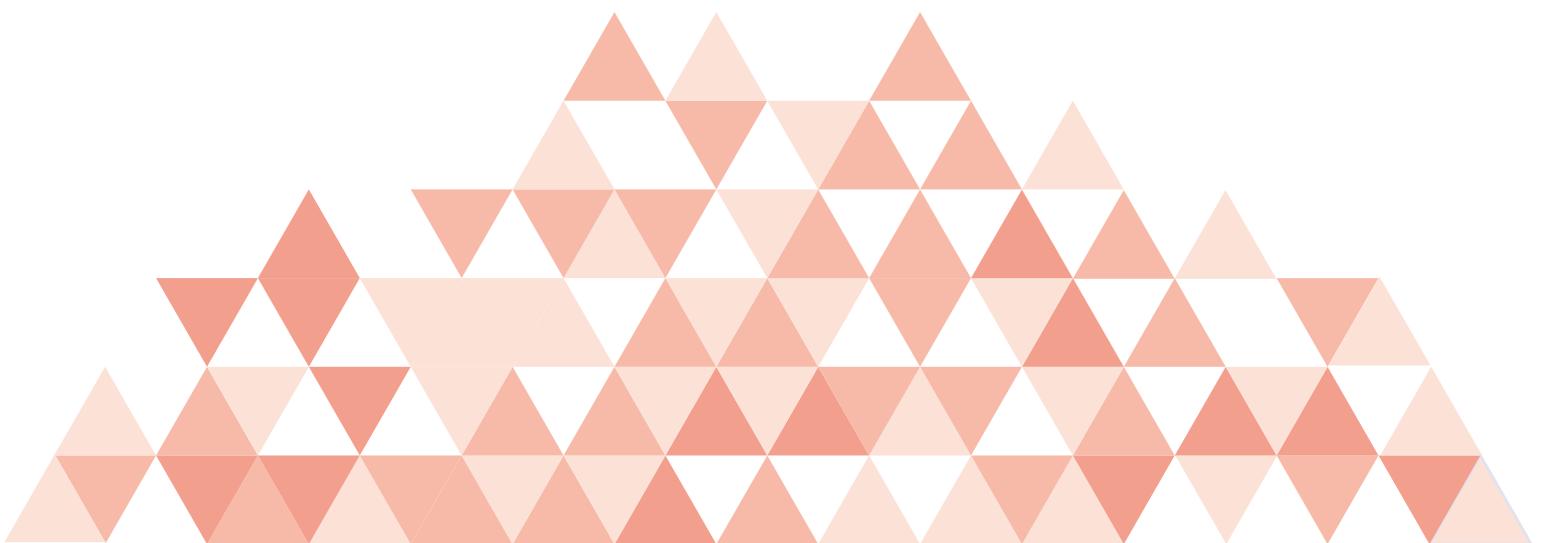
SUMA Y SIGUE MATEMÁTICA EN LÍNEA

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO



MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

FICHAS TALLER 4:
PROPORCIONALIDAD INVERSA

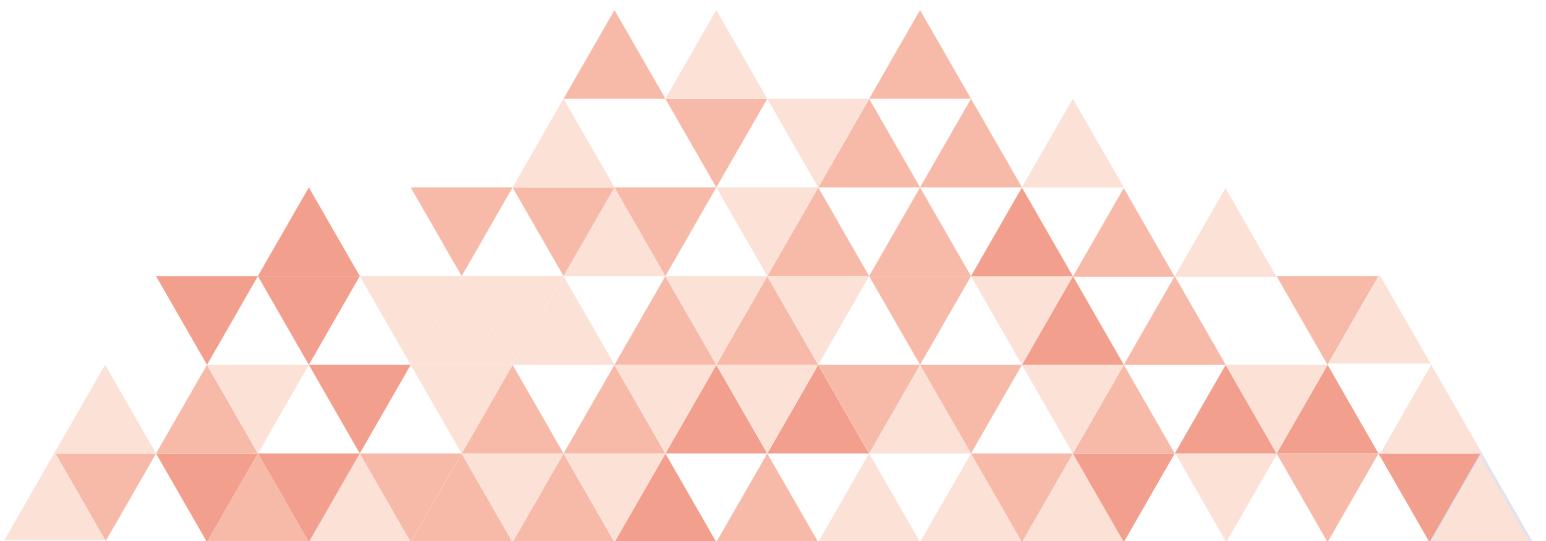


INTRODUCCIÓN

En este taller se abordaron diversas situaciones en contexto que permitieron caracterizar la relación de proporcionalidad inversa entre dos variables. Se estudió la representación gráfica de variables inversamente proporcionales y sus principales características. Además, al igual que en el taller de proporcionalidad directa, se utilizaron diversas formas de representar este tipo de relación a través de tablas, gráficos y expresiones algebraicas.

Los contenidos abordados en las fichas son los siguientes:

- Variables inversamente proporcionales
- Comportamiento de variables inversamente proporcionales
- Representación gráfica
- Características de la hipérbola
- Relación entre la proporcionalidad directa y la inversa



TALLER 4: PROPORCIONALIDAD INVERSA



1. Variables inversamente proporcionales

Diremos que dos variables x e y son inversamente proporcionales cuando el producto entre ellas se mantiene constante. Este producto c se denomina constante de proporcionalidad inversa.

Notemos que como $x \cdot y = c$, se tiene que x e y se relacionan de la siguiente forma:

$$y = \frac{c}{x}$$

En el contexto de este taller, las variables x e y toman valores mayores que cero y la constante de proporcionalidad será positiva.



Comentarios

Una de las características que se observan en las relaciones de proporcionalidad inversa es que al aumentar una variable en una razón, la otra disminuye en la misma razón, y viceversa.



Ubicación

Taller: Proporcionalidad inversa
Actividad: El tren subterráneo

TALLER 4: PROPORCIONALIDAD INVERSA



2. Comportamiento de variables inversamente proporcionales

Sean x e y variables inversamente proporcionales cuya constante de proporcionalidad inversa es c :

$$x \cdot y = c$$

Al aumentar una de ellas en un factor a , la otra disminuye en el mismo factor, puesto que la siguiente igualdad es equivalente a la anterior:

$$(ax) \cdot \frac{y}{a} = c$$



Comentarios

Es importante caracterizar las variables inversamente proporcionales a través de su producto constante, pues es esta la característica que las define más allá de su comportamiento frente a aumentos o disminuciones.



Ubicación

Taller: Proporcionalidad inversa
Actividad: El tren subterráneo

TALLER 4: PROPORCIONALIDAD INVERSA



3. Comportamiento de variables inversamente proporcionales

Sabemos que siempre que dos variables son inversamente proporcionales se cumple la característica de que si una de ellas aumenta, entonces, la otra disminuye, y viceversa. Pero se debe tener cuidado, ya que dos variables que cumplen con esta propiedad, **no** necesariamente son inversamente proporcionales.

Por ejemplo, si $y = 100 - x$, a medida que x aumenta y disminuye, pero el producto $x \cdot y$ no es constante.



Comentarios

El comportamiento descrito hace que se vuelva relevante analizar el producto para determinar la relación entre dos variables. En tal sentido, para verificar si dos variables son inversamente proporcionales, se debe probar que para cualquier valor que tomen las variables, el producto entre ellas es constante. Basta encontrar dos casos con productos diferentes para afirmar que las variables no son inversamente proporcionales.



Ubicación

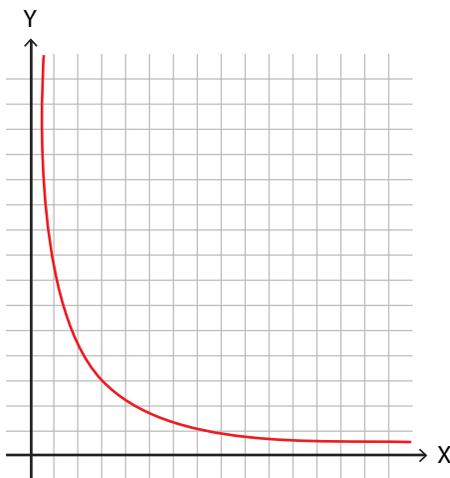
Taller: Proporcionalidad inversa
Actividad: Publicidad en las estaciones

TALLER 4: PROPORCIONALIDAD INVERSA



4. Representación gráfica de variables inversamente proporcionales

El gráfico de dos variables x e y que se relacionan de forma inversamente proporcional ($x \cdot y = k$, donde k es constante) corresponde a puntos de una curva como la siguiente:



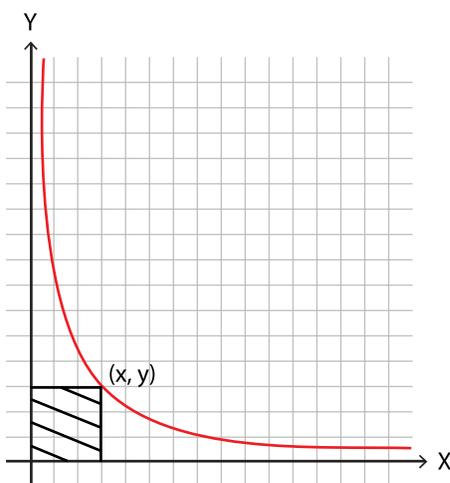
A esta curva se le llama **hipérbola**.

Las variables consideradas toman solo valores positivos y por tanto la constante k también es positiva.



Comentarios

Notemos que la constante de proporcionalidad k corresponde al área del rectángulo cuyos vértices son los puntos $(0, 0)$, $(x, 0)$, (x, y) y $(0, y)$.



Esto se debe a que el largo de la base del rectángulo, o sea, la distancia entre el punto $(0, 0)$ y $(x, 0)$, es justamente x . A su vez, la altura del rectángulo es igual a la distancia entre los puntos $(0, 0)$ y $(0, y)$, que es igual a y . De esta forma, el área del rectángulo es $x \cdot y = k$.



Ubicación

Taller: Proporcionalidad inversa
Actividad: Llenando la piscina

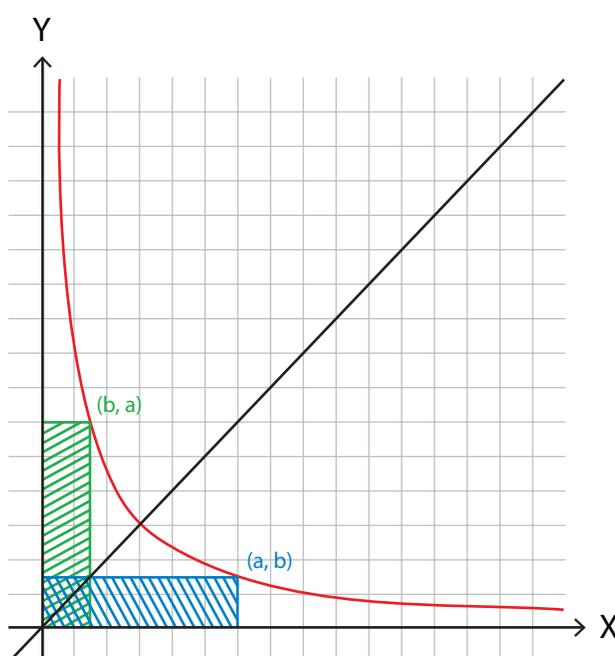
TALLER 4: PROPORCIONALIDAD INVERSA



5. Características de la hipérbola

La curva que representa la relación inversamente proporcional entre las variables x e y nunca interseca a los ejes del plano. La curva se acerca a ellos, pero nunca los llega a tocar, aunque visualmente parezca lo contrario.

Además, si el punto (a, b) pertenece a la hipérbola, también pertenece a ella el punto (b, a) , debido a que si $a \cdot b = k$ entonces $b \cdot a = k$. Esto significa que la curva es simétrica respecto a la diagonal del primer cuadrante.



Comentarios

La recta a la que se acerca una curva sin tocarla se llama **asíntota**. En general, las funciones racionales tienen comportamiento asíntótico.



Ubicación

Taller: Proporcionalidad inversa
Actividad: Llenando la piscina

TALLER 4: PROPORCIONALIDAD INVERSA



6. Relación entre la proporcionalidad directa y la inversa

Cuando las variables x e y son variables inversamente proporcionales, su producto es constante, es decir, $x \cdot y = k$. Al reescribir este producto como cociente se tiene:

$$x : \frac{1}{y} = k$$

Con esto, se obtiene que el cociente entre x y $\frac{1}{y}$ es constante, es decir, las variables x y $\frac{1}{y}$ son directamente proporcionales.

Análogamente, que x e y sean variables inversamente proporcionales equivale a que $\frac{1}{x}$ e y son directamente proporcionales.



Comentarios

Es importante explicitar la relación entre variables directamente e inversamente proporcionales de manera que los estudiantes se enfoquen en la caracterización a través del cociente y producto constante, respectivamente.



Ubicación

Taller: Proporcionalidad inversa
Actividad: Llenando la piscina