SUMA Y SIGUE

MATEMÁTICA EN LÍNEA

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

fcfm
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

CMMEdu
Laboratorio de Educación
Centro de Modelamiento Matemático

UNESCO
United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization
UNESCO - Hamdan Prize for the effectiveness of teachers

UNESCO
Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura
uni Twin
Cátedra UNESCO "Formación de Docentes para Enseñar Matemática en el Siglo XXI" Universidad de Chile

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

FICHAS TALLER 3:
PROPORCIONALIDAD DIRECTA

INTRODUCCIÓN

Este taller se orientó en el estudio de la proporcionalidad directa. Para ello, se presentaron distintas situaciones contextualizadas en las que se identificaron variables para caracterizar aquellas que son directamente proporcionales. Mediante la resolución de problemas se abordaron las distintas maneras de representar relaciones de proporcionalidad directa a través de gráficos, tablas y expresiones algebraicas.

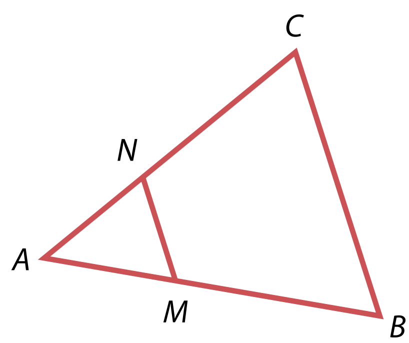
Los contenidos abordados en las fichas son los siguientes:

- Relación entre el teorema de Thales y la proporcionalidad
- Variables directamente proporcionales
- Representación gráfica
- Constante de proporcionalidad
- Aplicaciones de proporcionalidad directa en figuras geométricas
- Aplicaciones de proporcionalidad directa en porcentajes

1. Proporcionalidad y teorema de Thales

Una aplicación interesante en la que interviene la proporcionalidad es la que se produce al analizar la relación entre la altura de un objeto y la sombra que este proyecta. Así, podemos afirmar que bajo las mismas condiciones, el valor de la razón entre la altura de objetos dispuestos perpendiculares al suelo y la longitud de la sombra que proyectan en un determinado instante del día será siempre el mismo, independiente de la clase de objetos.

Lo anterior se deriva de un importante resultado matemático: el teorema de Thales. Este nos señala que para un triángulo ABC y una recta paralela al lado BC que corta el lado AB en el punto M y al lado AC en el punto N, como muestra la figura:



se cumple que $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NC}}$

y también se deduce que $\frac{\overline{AM}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$

Comentarios

Al abordar la semejanza de triángulos y al introducir el teorema de Thales, es recomendable ligar el estudio con los conocimientos previos de razones y de proporcionalidad.

Ubicación

Taller: Proporcionalidad directa
Actividad: El laboratorio del profesor Vivaldi. Estación 1: Medición de objetos

2. Variables directamente proporcionales

Existen diferentes situaciones en nuestra vida cotidiana en las que dos variables se relacionan entre sí. Por ejemplo, la cantidad de gasolina y la distancia que recorre un auto; el número de invitados y la cantidad de comida necesaria; la cantidad de objetos y el peso de ellos, entre otras. Un tipo de relación es aquella en que al aumentar o disminuir una de las variables, la otra aumenta o disminuye en la misma razón, respectivamente. En este caso, diremos que las variables son directamente proporcionales.

Más formalmente, diremos que dos variables x e y son directamente proporcionales cuando el cociente entre ellas se mantiene constante. Este cociente c corresponde al valor de la razón entre los valores de las variables y se denomina constante de proporcionalidad.

Notemos que como $\frac{y}{x} = c$, se tiene que x e y se relacionan de la siguiente forma:

$$y = c \cdot x$$

Comentarios

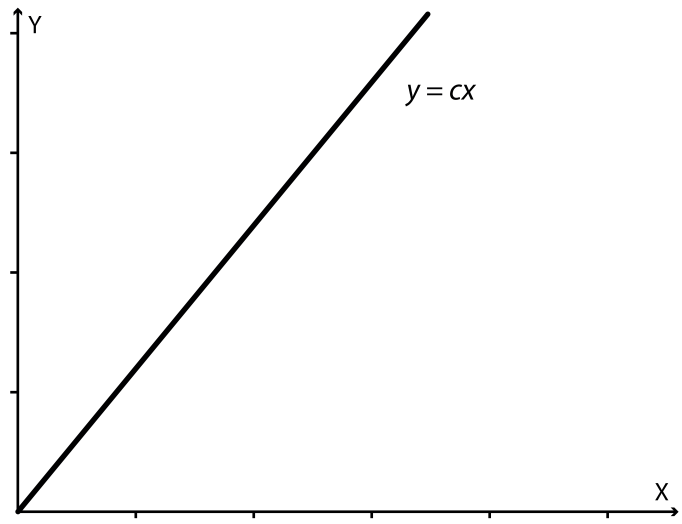
Para simplificar el análisis, y debido a que en muchos problemas las variables estudiadas toman valores positivos, de aquí en adelante consideraremos que las variables involucradas son siempre positivas.

Ubicación

Taller: Proporcionalidad directa
Actividad: El laboratorio del profesor Vivaldi. Estación 1: Medición de objetos

3. Representación gráfica de variables directamente proporcionales

Dos variables directamente proporcionales se representan gráficamente a través de un conjunto de puntos que están dentro de una recta que pasa por el origen del plano cartesiano.



Recíprocamente, utilizando semejanza de triángulos se puede demostrar que si la gráfica que representa la relación de dos variables es una recta que contiene al origen, entonces las dos variables son proporcionales.

Comentarios

Observemos que cuando la variable x toma todos los valores positivos, el gráfico corresponde a una semirrecta con origen en el punto (0 , 0).

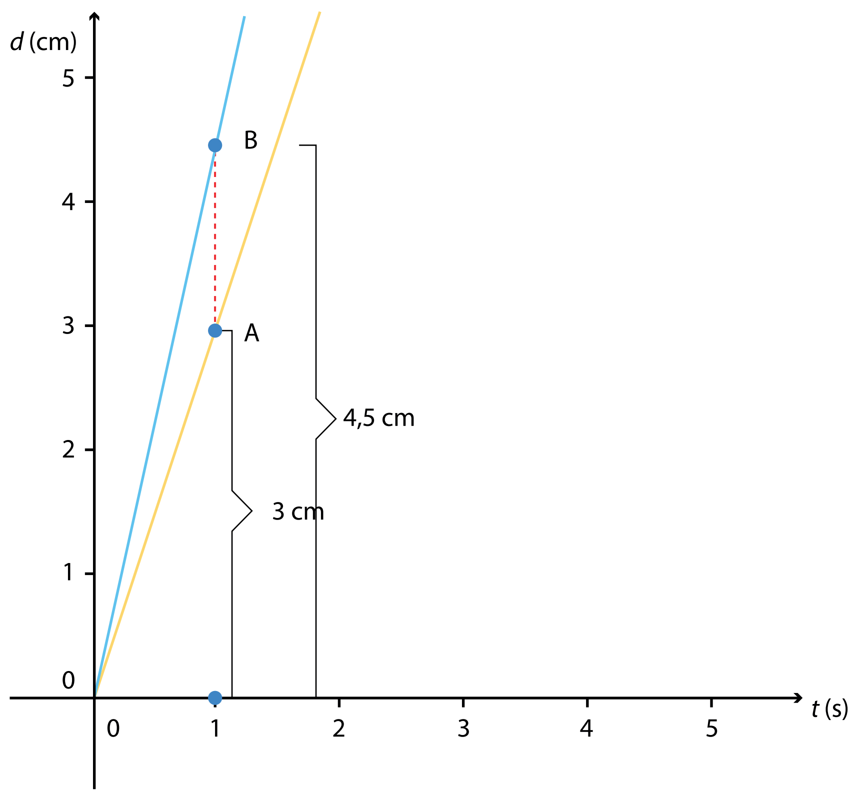
Ubicación

Taller: Proporcionalidad directa
Actividad: El laboratorio del profesor Vivaldi. Estación 1: Medición de objetos

4. Constante de proporcionalidad

La inclinación de una recta que representa la relación entre dos variables directamente proporcionales está asociada a la constante de proporcionalidad.

Para ilustrar esta idea, consideremos dos móviles: uno amarillo, que en un segundo recorre 3 cm, y uno azul, que, en el mismo tiempo, recorre 4,5 cm. Luego, al graficar estas relaciones, vemos que el punto A, que representa al móvil amarillo está más abajo que el punto B, que corresponde al móvil azul. Por lo tanto, la recta correspondiente al móvil azul tiene una inclinación mayor que la recta que corresponde al móvil amarillo.



Cuando un móvil tiene una velocidad constante, podemos establecer que la distancia recorrida y el tiempo que demora en recorrerla son variables directamente proporcionales. Es más, la constante de proporcionalidad coincide con la velocidad. En tal caso se cumple que a mayor velocidad, mayor inclinación tiene la recta y viceversa.

Comentarios

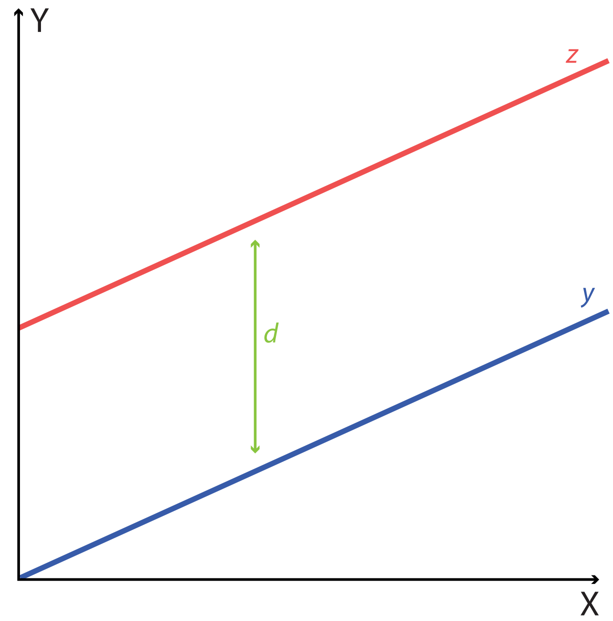
En el trabajo con proporcionalidad directa es recomendable utilizar contextos y variables en los que la constante de proporcionalidad represente alguna cantidad o magnitud física, como es el caso de la velocidad.

Ubicación

Taller: Proporcionalidad directa
Actividad: El laboratorio del profesor Vivaldi. Estación 2: La pista de carreras

5. Representación gráfica de una relación de proporcionalidad directa desplazada en el plano cartesiano

Supongamos que x e y son variables directamente proporcionales, es decir, $y = c \cdot x$, con c la constante de proporcionalidad. Si una tercera variable z tiene una diferencia constante d con y, entonces el gráfico de z en función de x será también una recta paralela a la que representa la relación de y en función de x separada verticalmente en d unidades.



Además, como $z = y + d$, se obtiene la relación $z = c \cdot x + d$.

Vemos que la recta z no pasa por el origen de coordenadas. En el contexto de movimiento a velocidad constante, la variable z representa la posición del móvil cuando este no parte del origen de la pista, sino que d unidades más adelante.

Comentarios

- Observemos que como las rectas z e y son paralelas, tienen la misma inclinación.
- Cuando consideramos la variable y como una función de x, decimos que es una función lineal. En el caso de la función z decimos que es una función lineal afín.

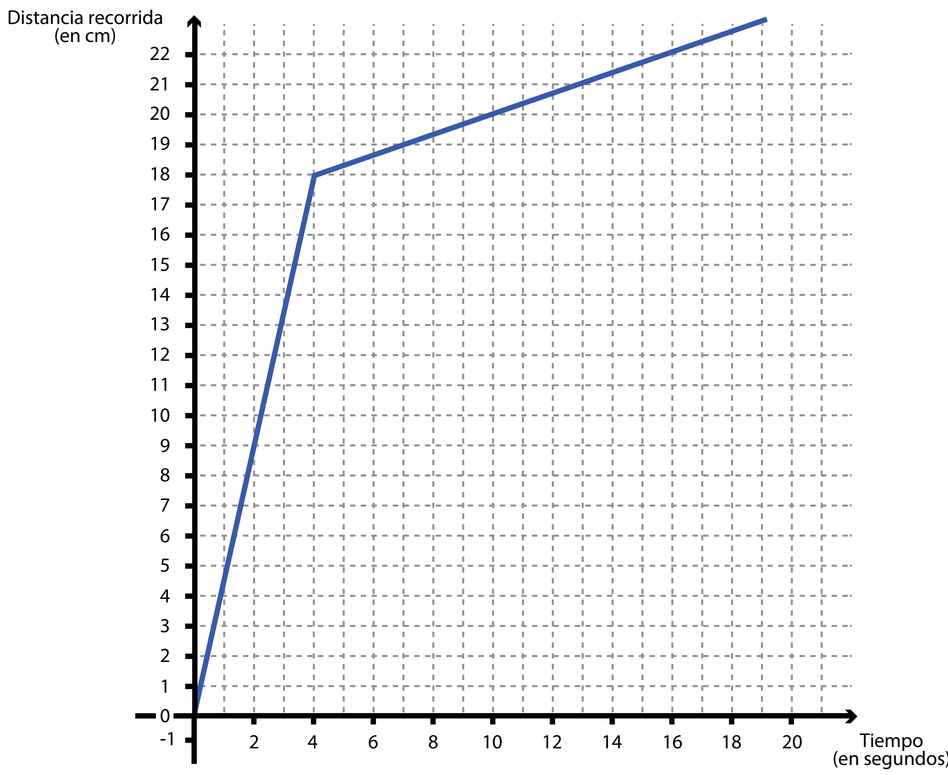
Ubicación

Taller: Proporcionalidad directa
Actividad: El laboratorio del profesor Vivaldi. Estación 2: La pista de carreras

6. Cambio de velocidad

La distancia recorrida por un móvil y el tiempo que se demora en recorrer dicha distancia son variables que se relacionan en forma directamente proporcional siempre y cuando la velocidad con que se mueve el móvil sea constante. Además, dicha velocidad corresponde a la constante de proporcionalidad.

Cuando se produce un cambio de velocidad en el móvil se aprecia un quiebre en la gráfica de la distancia en función del tiempo, como se muestra en el siguiente gráfico.



Comentarios

El contexto de movimiento de un móvil a velocidad constante entrega oportunidades para conectar la matemática con otras disciplinas.

Ubicación

Taller: Proporcionalidad directa
Actividad: El laboratorio del profesor Vivaldi. Estación 2: La pista de carreras

7. Proporcionalidad directa en un cuadrado

La relación entre el perímetro de un cuadrado y su lado es de proporcionalidad directa. Esto obedece a que el perímetro P de un cuadrado de lado *a* se obtiene sumando las longitudes de sus lados y, al ser todas iguales, resulta ser P = 4*a*. Luego, el perímetro del cuadrado es directamente proporcional a la longitud del lado y la constante de proporcionalidad es 4.

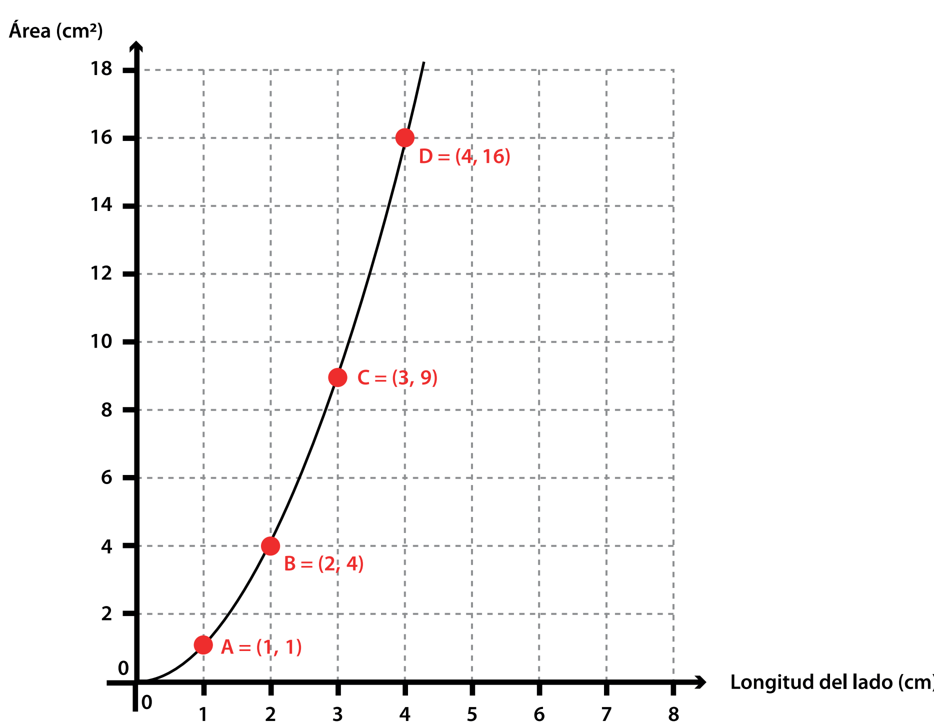
Comentarios

- Un ejemplo de variables que **no** son directamente proporcionales en el cuadrado es la longitud de su lado y su área. Esto se debe a que el cociente entre ellas no es constante, lo cual es fácil de comprobar si consideramos un cuadrado de la lado *a*, cuya área es a^2. Al considerar el cociente entre el área del cuadrado y la longitud de su lado tenemos:

$$\frac{a^2}{a} = a$$

Así, podemos afirmar que a medida que varía la longitud *a* del lado del cuadrado, el cociente entre el área y dicha longitud también varía, pues este cociente corresponde a la longitud del lado.

Otra forma de comprobarlo es representando los puntos en un gráfico y observar que no se obtiene una recta.



Ubicación

Taller: Proporcionalidad directa
Actividad: El laboratorio del profesor Vivaldi. Estación 3: Figuras geométricas

8. Proporcionalidad directa en una circunferencia

La relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro es de proporcionalidad directa. Al calcular el cociente entre la longitud y el diámetro, siempre se mantiene constante y es igual a π. En términos generales, en Geometría se deduce que el cociente entre la longitud de la circunferencia y el diámetro es constante y se denomina π.

Comentarios

La circunferencia es un ejemplo en el que se pueden definir variables directamente proporcionales cuya constante de proporcionalidad es un número irracional.

Ubicación

Taller: Proporcionalidad directa
Actividad: El laboratorio del profesor Vivaldi. Estación 3: Figuras geométricas

9. Proporcionalidad directa en un triángulo rectángulo isósceles

Consideremos un triángulo rectángulo isósceles cuyo cateto mide a unidades. La longitud de la hipotenusa será, por teorema de Pitágoras, $a\sqrt{2}$ y el perímetro será igual a $2a + a\sqrt{2}$, pues el triángulo es isósceles. Luego, el cociente entre el perímetro del triángulo rectángulo isósceles y la longitud del cateto será:

$$\frac{2a + a\sqrt{2}}{a} = \frac{a(2 + 2\sqrt{})}{a} = 2 + \sqrt{2}$$

Notemos que $2 + \sqrt{2}$ es una constante. Por tanto, el perímetro de un triángulo rectángulo isósceles y la longitud del cateto son variables directamente proporcionales y la constante de proporcionalidad es igual a $2 + \sqrt{2}$.

Comentarios

Notemos que el uso de figuras geométricas permite definir variables que se pueden expresar algebraicamente, lo cual ayuda a reforzar el estudio de la proporcionalidad directa al enfatizar el análisis del cociente constante de las variables.

Ubicación

Taller: Proporcionalidad directa
Actividad: El laboratorio del profesor Vivaldi. Estación 3: Figuras geométricas

TALLER 3: PROPORCIONALIDAD DIRECTA

10. Proporcionalidad directa y porcentaje

En situaciones que involucran porcentaje es posible analizar si las variables relacionadas en ellas son o no directamente proporcionales. Si consideramos el caso general a% de $A = b$, encontramos tres casos diferentes:

Variables	Cantidad fija	¿Son directamente proporcionales las variables?	Ejemplo
b y a	A	Sí	El descuento en pesos sobre el precio de un producto y el porcentaje de descuento.
b y A	a	Sí	La cantidad de líquido que corresponde al 25% de un recipiente y su capacidad total.
A y a	b	No	La capacidad total de un recipiente y el porcentaje de dicha capacidad que corresponde a 100 mL.

Comentarios

- Cuando estamos analizando si dos variables son directamente proporcionales, podemos tabular algunos valores de las variables, y luego mirar el gráfico de estos puntos. Si la recta que pasa por el origen y uno de los puntos no contiene a alguno de los demás puntos, entonces las variables no son directamente proporcionales.
- Es importante considerar que, si trazamos una recta que pasa por el origen y esta resulta contener a todos los puntos tabulados, pero estos no corresponden a todos los valores que pueden tomar las variables, solo podremos afirmar que las variables son directamente proporcionales si se puede mostrar de manera general, por ejemplo calculando el cociente, que dicha recta contendrá a todos los puntos (x, y) definidos por estas variables y no solo a los tabulados.

Ubicación

Taller: Proporcionalidad directa
Actividad: El laboratorio del profesor Vivaldi. Estación 4: Resolviendo problemas