SUMA Y SIGUE

MATEMÁTICA EN LÍNEA

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

CMM Centro de Modelamiento Matemático

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

MATERIAL PEDAGÓGICO
COMPLEMENTARIO

FICHAS TALLER 3:
VOLUMEN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

INTRODUCCIÓN

En este taller estudiamos el proceso de medir y sus características con el fin de darle sentido al volumen como una magnitud inherente a los cuerpos geométricos. Se abordaron las propiedades fundamentales del volumen bajo distintas transformaciones y se dedujeron las expresiones de la medida del volumen de distintos cuerpos geométricos a partir de sus propiedades y del razonamiento deductivo.

Las fichas que conforman este apartado contemplan los siguientes contenidos:

- Sentido geométrico del volumen
- Proceso de medir
- Propiedades del volumen
- Volumen de cuerpos
- Principio de escalamiento
- Principio de Cavalieri
- Secuencias de aprendizaje y razonamiento deductivo
- Uso de recursos interactivos

1. Importancia del sentido geométrico del volumen

Es frecuente que el estudio del volumen de cuerpos geométricos se centre en sus propiedades aritméticas y se relegue a un segundo plano su sentido geométrico, lo que contribuye a que los estudiantes consideren que para el estudio de estos contenidos solo se requiere memorizar y aplicar fórmulas, y que estas están desprovistas de significado geométrico.

Esto impone un desafío para el docente, ya que debe generar actividades de aprendizaje que se focalicen en los aspectos geométricos por sobre los algebraicos.

Ubicación

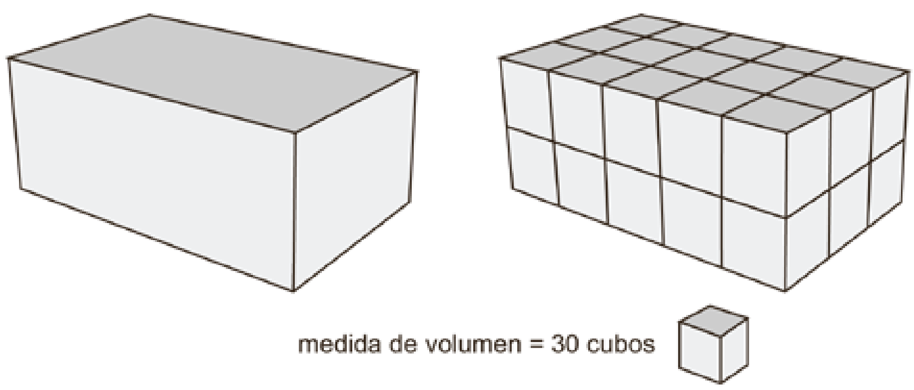
Taller: Volúmen de cuerpos geométricos
Actividad: ¡Suban el volumen! que no entiendo

2. Proceso de medir

Toda medición se basa en los siguientes tres aspectos claves:

- Reconocer el atributo, el cual debe ser medible, es decir, que es posible expresarlo cuantitativamente. A los atributos medibles les llamamos magnitud.
- Escoger una unidad de medida.
- Determinar a cuántas unidades equivale la magnitud. En este paso interviene la iteración de la unidad de medida, que corresponde al uso repetido de una unidad única de medición para encontrar una medida, sin dejar espacios entre las repeticiones de ella y sin sobreponerlas.

Llamamos medida al resultado de este proceso de medición. Por ejemplo, la medida del volumen del siguiente prisma es 30 cubos.



Comentarios

- En los niveles de Educación Media los contenidos matemáticos asociados a la medida tienden a enfocarse en la aplicación de fórmulas y en el cálculo sin explicitar su relación con el proceso de medir. Conectar las expresiones de medida de volúmenes o de otras magnitudes con las características principales del proceso de medir puede contribuir a que los estudiantes se enfoquen en el atributo que están midiendo y lo comprendan mejor.

Ubicación

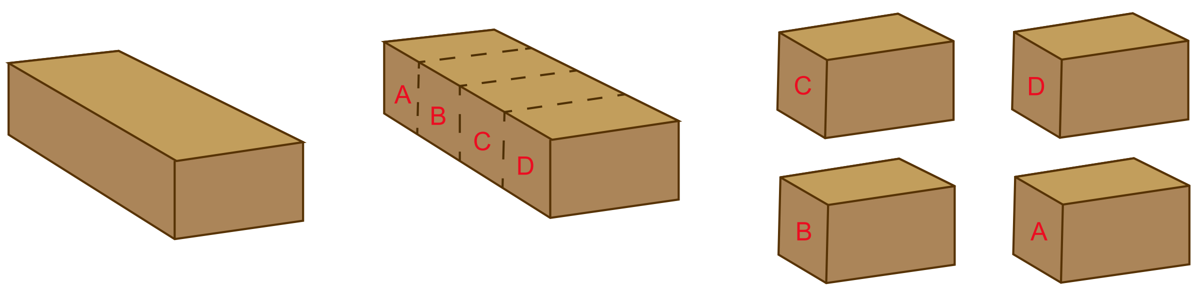
Taller: Volúmen de cuerpos geométricos
Actividad: ¡Suban el volumen! que no entiendo

TALLER: VOLUMEN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

3. Volumen y sus propiedades fundamentales

El volumen de un objeto tridimensional lo entendemos como una medida del espacio que este ocupa. Es una magnitud inherente al objeto y posee las siguientes propiedades:

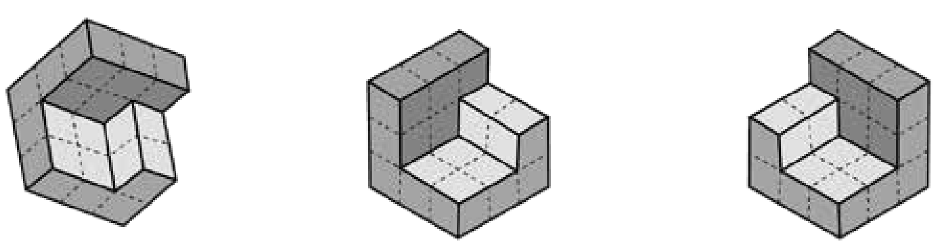
- Cuando se descompone un cuerpo geométrico en dos o más partes disjuntas, el volumen del cuerpo inicial es igual a la suma de los volúmenes de cada una de las partes. A esto lo llamaremos propiedad aditiva.



Volumen (Cuerpo) = Volumen (A) + Volumen (B) + Volumen (C) + Volumen (D)

- Al desplazar o rotar un cuerpo, el volumen se mantiene. Además, si a partir de un cuerpo se obtiene otro mediante reflexión (como en un espejo), entonces los dos cuerpos tienen igual volumen. A esto lo llamaremos propiedad de invarianza por transformaciones isométricas.

Comentarios



Cuerpo rotado | Cuerpo original | Cuerpo reflejado

- Con frecuencia los términos volumen y capacidad se utilizan como sinónimos. Es necesario aclarar que *volumen* se asocia a un espacio ocupado y la *capacidad* a un espacio vacío con posibilidad de ser llenado.

Ubicación

Taller: Volúmen de cuerpos geométricos
Actividad: ¡Suban el volumen! que no entiendo

TALLER: VOLUMEN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

4. Propiedades geométricas del volumen

Las propiedades fundamentales del volumen se pueden expresar matemáticamente del siguiente modo:

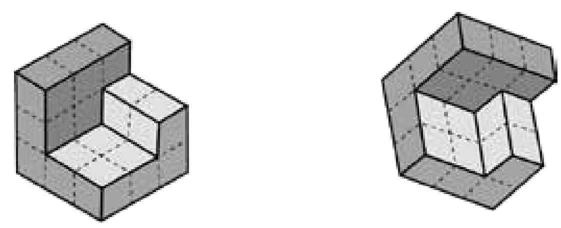
- Si un objeto A se descompone en *n* partes, A_1, A_2, …, A_n, de manera que la unión de sus partes es exactamente A y las partes son disjuntas, entonces se cumple que:

  $$\text{volumen }(A) = \text{volumen }(A_1) + \dots + \text{volumen }(A_n).$$

  Esto corresponde a la propiedad aditiva del volumen.

- Si A es un objeto al cual se le aplica una transformación isométrica T, ya sea una traslación, rotación o reflexión, o una composición de ellas, entonces se cumple que:

  $$\text{volumen }(A) = \text{volumen }(T\,(A)).$$



A T(A)

Esto corresponde a la propiedad de invarianza por transformaciones isométricas.

Comentarios

- Estas propiedades también son ciertas para la longitud y para el área de figuras planas. Además, se usan en definiciones análogas al volumen en mayores dimensiones.

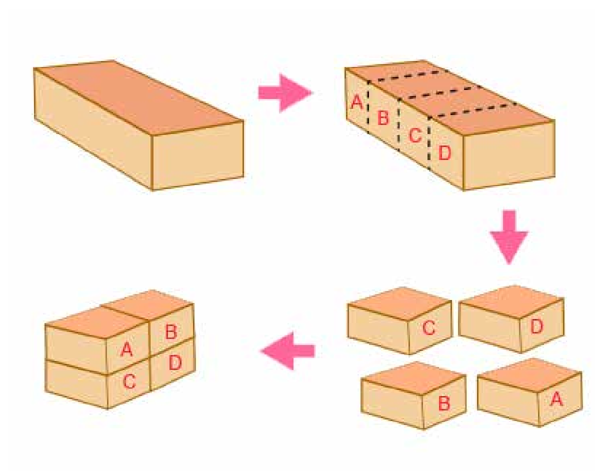
- Abordar las propiedades del volumen de manera intuitiva y con apoyo de representaciones o de material concreto ayuda a enfocar la atención en el atributo y en sus características geométricas. De igual manera, es importante que su formulación con lenguaje matemático esté presente en la enseñanza, junto con las otras representaciones, con el grado de formalización que resulte pertinente a la edad de los estudiantes.

Ubicación

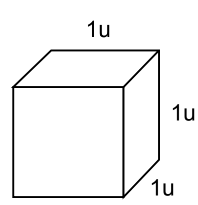
Taller: Volúmen de cuerpos geométricos
Actividad: ¡Suban el volumen! que no entiendo

5. Propiedades de las "cajas"

Las "cajas" (paralelepípedos rectos) tienen la ventaja de que al aplicar estrategias de "romper" y "rehacer", siempre es posible obtener uno o varios cuerpos que también corresponden a cajas. Y, además, sabemos que estas transformaciones preservan el volumen.



Estas propiedades hacen que las cajas formen un conjunto fundamental con las cuales se pueden asignar valores de volumen a otros cuerpos. En efecto, se ha hecho la convención matemática de definir el volumen patrón a partir de un cubo, que corresponde a una caja simétrica. La convención es que a un cubo de arista 1 u, conocido como **cubo unitario**, le asignaremos un volumen de 1 u^3, en el que u^3 nos recuerda que el volumen es una medida de espacio tridimensional.



Comentarios

- Observemos que si bien u puede corresponder a cualquier unidad de longitud, es usual ocupar u = cm para introducir el volumen a través de cm^3. Esto debido a que 1 cm^3 es un volumen que el ser humano puede dimensionar o percibir de mejor manera.

Ubicación

Taller: Volúmen de cuerpos geométricos
Actividad: ¡Suban el volumen! que no entiendo

TALLER: VOLUMEN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

6. Volumen de una “caja”

El volumen de una caja (es decir, un paralelepípedo rectangular recto) cuyas aristas miden *r*, *s* y *t* unidades u es igual a

$$r \bullet s \bullet t \text{ u}^3.$$

A través de las estrategias de “romper” y “rehacer” que cumplen las cajas, podemos ver que esta expresión se cumple para r, s y t valores racionales positivos. Más aún, la expresión se extiende a números reales usando tanto el hecho de que el volumen es creciente como propiedades de límites, pero estas se escapan del objetivo de este curso.

En particular el volumen de un cubo cuya arista mide a es

$$a \bullet a \bullet a = a^3.$$

Esto último, además, justifica la elección de notación u^3 para las unidades de volumen.

Comentarios

- Es importante transmitir al estudiante que la fórmula del volumen de una caja se puede deducir de la propiedad aditiva del volumen.

- Si bien las expresiones de las medidas del volumen de ciertos cuerpos pueden resultar naturales para los estudiantes, ellos podrían no ser conscientes de las propiedades geométricas que las sustentan. En tal sentido, se hace necesario poner énfasis en la justificación de las medidas de volumen a partir de sus propiedades geométricas. Esto último puede resultar evidente cuando se trabaja con cuerpos compuestos por cajas, sin embargo es recomendable abordar también otro tipo de cuerpos, de manera que este trabajo permita dar sentido geométrico a las fórmulas de volumen.

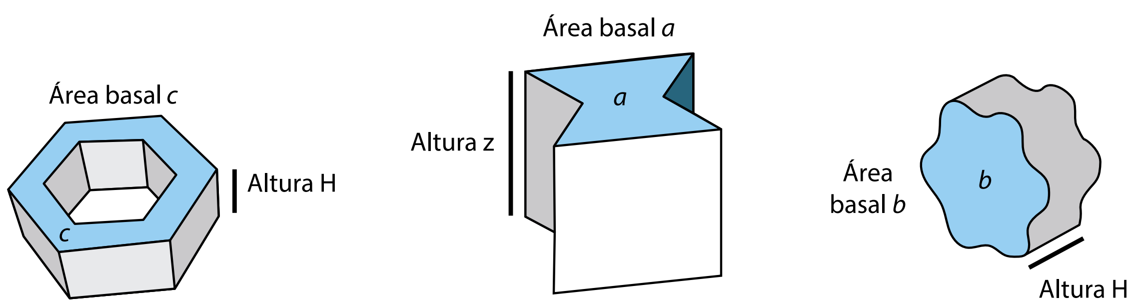
Ubicación

Taller: Volúmen de cuerpos geométricos
Actividad: ¡Suban el volumen! que no entiendo

7. Volumen de cuerpos geométricos rectos

Para cualquier cuerpo geométrico recto con base poligonal o de borde curvo, su volumen (V) se puede expresar por:

$$V = \text{área basal} \cdot \text{altura}.$$



En particular, si consideramos un cilindro que tiene como base un círculo de radio R y su altura es *z*, entonces su volumen (V) se obtiene por:

$$V = \pi R^2 z$$

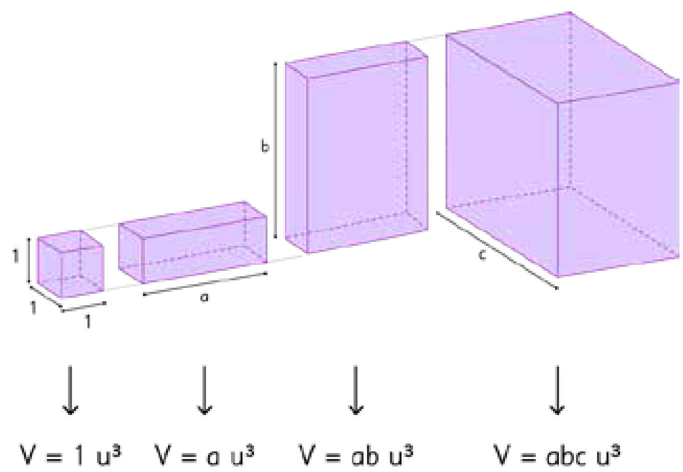
Ubicación

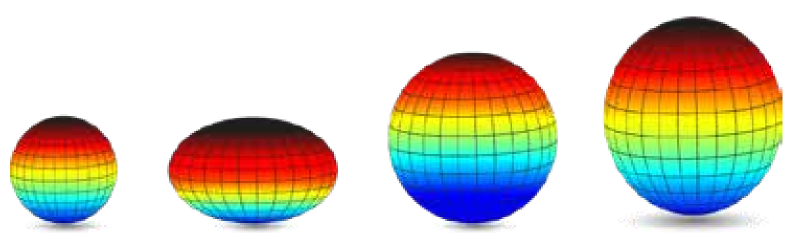
Taller: Volúmen de cuerpos geométricos
Actividad: Razonamiento a todo volumen

8. Principio de escalamiento

Si un cuerpo geométrico cualquiera se escala por un factor *k* en una dimensión, entonces su volumen se multiplica por *k*.

Si se aplica consecutivamente este principio en tres dimensiones ortogonales (ancho, largo o alto) por factores *a*, *b* y *c*, respectivamente, entonces la medida del volumen del cuerpo se multiplica por el factor *abc*.





Esto se conoce como principio de escalamiento y aplica también para el área en el plano.

Comentarios

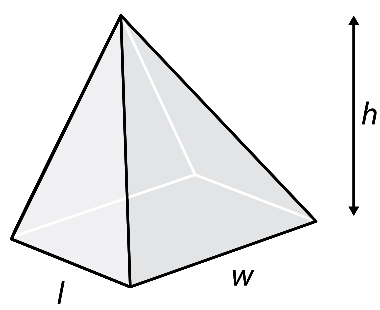
- El manejo fluido de este principio podría ayudar a simplificar muchos cálculos, además de reducir el número de fórmulas necesarias de recordar.

Ubicación

Taller: Volúmen de cuerpos geométricos
Actividad: Razonamiento a todo volumen

9. Volumen de una pirámide

El volumen de una pirámide de base rectangular es $\frac{1}{3}$ del área de la base por la altura. En particular, para una pirámide de dimensiones *l*, *w* y *h*, se tiene que su volumen (V) se expresa como sigue:



$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3} \cdot l \cdot w \cdot h \\
&= \frac{1}{3} \cdot (l \cdot w) \cdot h \\
&= \frac{1}{3} \cdot \text{área basal} \cdot \textit{altura}
\end{aligned}
$$

Comentarios

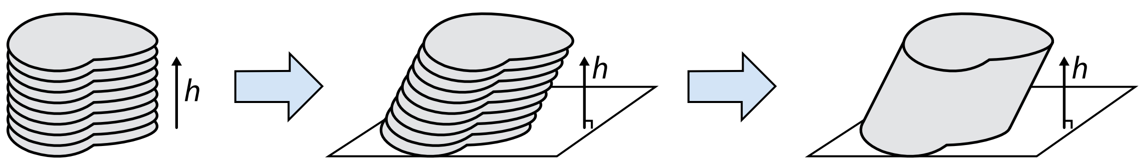
- Si bien en este taller no se abordó, es posible extender esta expresión del volumen para pirámides con base poligonal o de borde curvo.

Ubicación

Taller: Volúmen de cuerpos geométricos
Actividad: Razonamiento a todo volumen

10. Capas

El procedimiento de cortar el cuerpo en capas delgadas y desplazarlas no cambia su volumen, independientemente del número de capas.



Cuando hacemos que el número de capas tienda a infinito y las desplazamos, obtenemos una versión oblicua del cuerpo. De lo anterior podemos deducir que su volumen es igual al del cuerpo original. En particular, esta propiedad nos permite concluir que el volumen de un prisma o cilindro oblicuo sigue obteniéndose mediante el producto entre el área basal y la altura.

Comentarios

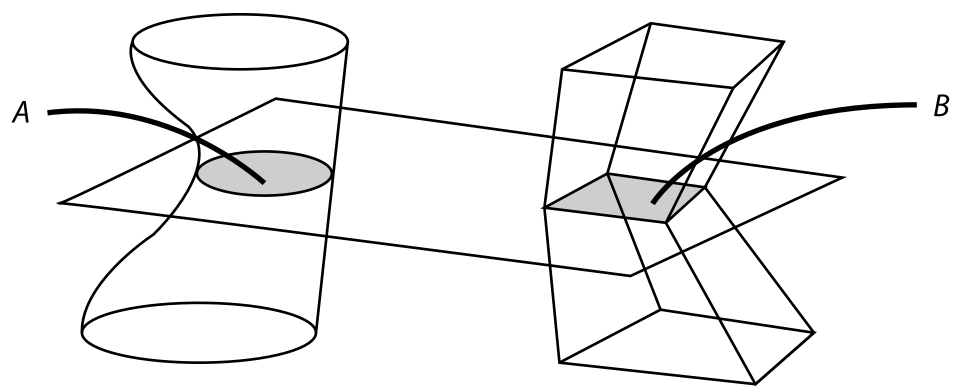
- Cabe señalar que el procedimiento de cortar un cuerpo en capas delgadas y desplazarlas preserva el volumen, pero no ocurre lo mismo con el área de las superficies laterales.

Ubicación

Taller: Volúmen de cuerpos geométricos
Actividad: Razonamiento a todo volumen

11. Principio de Cavalieri

Consideremos dos cuerpos que se encuentran entre planos paralelos. Al cortarlos con un plano paralelo a sus bases, se obtendrán dos secciones, digamos A y B. Una propiedad del volumen, conocida como el Principio de Cavalieri, nos dice que si las áreas de A y de B son iguales para cada corte paralelo a las bases, entonces el volumen de los cuerpos es el mismo.



Comentarios

- El Principio de Cavalieri permite deducir el volumen de determinados cuerpos geométricos a través de un proceso deductivo y de las medidas del volumen de cuerpos ya conocidos.

Ubicación

Taller: Volúmen de cuerpos geométricos
Actividad: Razonamiento a todo volumen

12. Volumen del cono y la esfera

Para deducir la medida del volumen de un cono de altura z y radio basal r es posible utilizar el Principio de Cavalieri comparando el área de las secciones del cono con el área de las secciones de una pirámide de base cuadrada. Así, es posible deducir que el volumen del cono es $\frac{1}{3}$ del producto entre el área basal y la altura, es decir, $\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot z$.

Además, conociendo el volumen del cono y del cilindro, es posible deducir el volumen de una esfera por medio de la aplicación del Principio de Cavalieri. Así, el volumen de una esfera de radio R es $\frac{4}{3} \pi R^3$.

Ubicación

Taller: Volúmen de cuerpos geométricos
Actividad: Razonamiento a todo volumen

13. Secuencia de aprendizaje que promueve el razonamiento deductivo

El desarrollo de este taller estuvo centrado en la deducción del volumen de cuerpos geométricos, enfatizando la justificación en las propiedades geométricas, tanto de figuras 2D como 3D. Los cuerpos geométricos fueron abordados según la siguiente secuencia de aprendizaje:

1. Cajas (paralelepípedos rectos).
2. Prismas rectos cuya base es un triángulo rectángulo.
3. Prismas rectos cuya base es un triángulo.
4. Prismas rectos cuya base es un polígono.
5. Cilindros rectos.
6. Pirámides rectas de base cuadrada.
7. Prismas y cilindros oblicuos.
8. Cono.
9. Esfera.

La secuencia permite iniciar el estudio con el volumen de cajas (paralelepípedos), a partir del cual se realiza un proceso deductivo que permite incluir gradualmente prismas de diferentes bases, rectos y oblicuos. Esto hace posible complejizar el trabajo a tal nivel que finalmente se puede deducir el volumen de esferas a partir de sus relaciones con cilindros y conos

Comentarios

- Es recomendable que el docente planifique actividades para desarrollar el razonamiento deductivo y que anticipe posibles respuestas de sus estudiantes frente a este tipo de trabajo, de manera que pueda propiciar el avance hacia niveles de formalización más abstractos.

Ubicación

Taller: Volúmen de cuerpos geométricos
Actividad: Razonamiento a todo volumen

14. Uso de recursos interactivos

Los recursos interactivos fueron una herramienta importante en el desarrollo de este taller, ya que nos permitieron visualizar propiedades de figuras 3D y del volumen y las relaciones entre ellas, por ejemplo, al comparar secciones transversales entre prismas rectos y oblicuos. Si bien en los recursos interactivos se puede apreciar el cumplimiento de propiedades y relaciones para una gran cantidad de casos, estos no constituyen demostraciones, pero plantean de manera clara los razonamientos que se transforman posteriormente en demostraciones más formales.

Ubicación

Taller: Volúmen de cuerpos geométricos
Actividad: Razonamiento a todo volumen