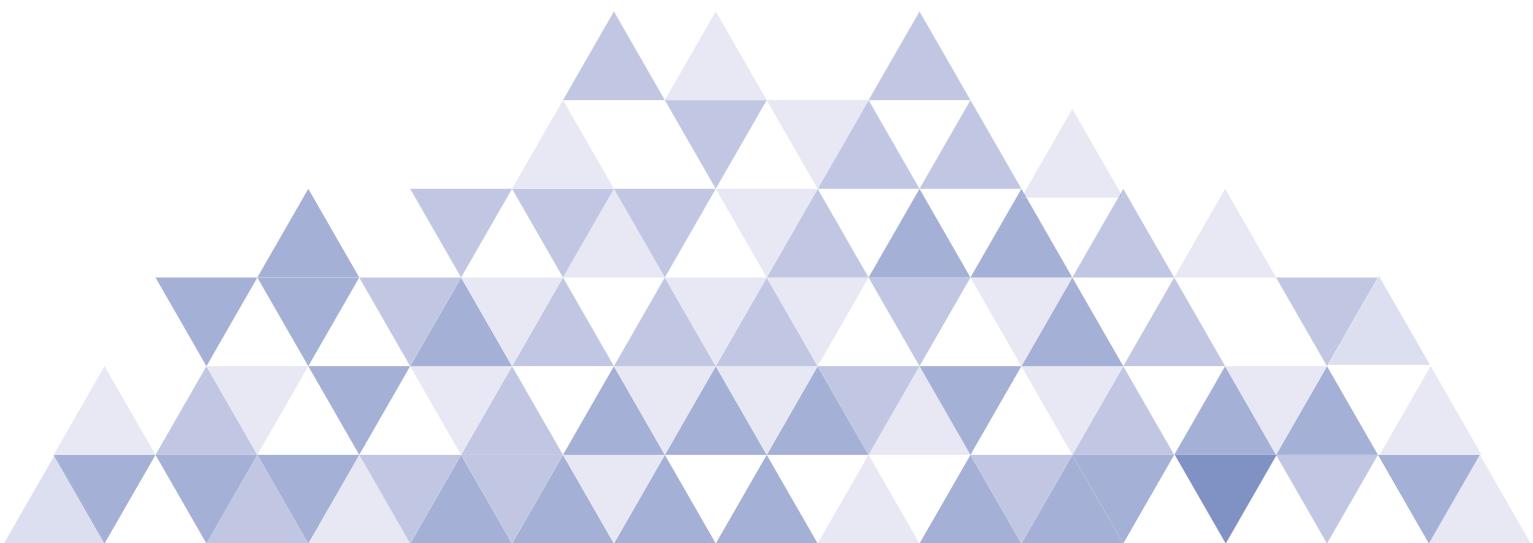


SUMA Y SIGUE MATEMÁTICA EN LÍNEA

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

FICHAS TALLER 2:
RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN EL ESPACIO 3D



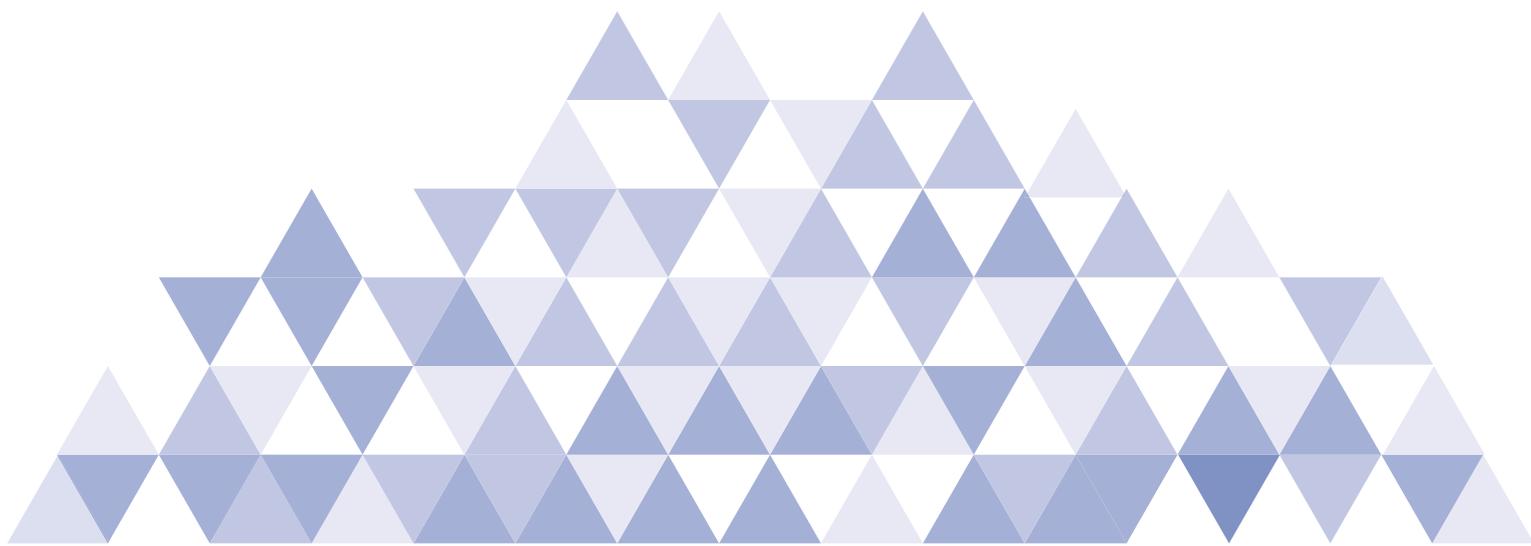
INTRODUCCIÓN

Comenzamos este taller estudiando las posiciones relativas de planos y rectas en el espacio con énfasis en la demostración de propiedades geométricas a partir de axiomas y en la visualización a través de recursos interactivos.

Posteriormente, vimos que figuras como el cono, el cilindro y la esfera pueden obtenerse al rotar determinadas figuras en el espacio. Así, continuamos el estudio de cuerpos y superficies obtenidas por rotación de figuras, abordando sus propiedades y definiendo sus dimensiones.

Las fichas que conforman este apartado contemplan los siguientes contenidos:

- Punto, recta, plano y espacio como conceptos primitivos
- Axiomas
- Posiciones relativas entre rectas
- Posiciones relativas entre planos
- Posiciones relativas entre una recta y un plano
- Perpendicularidad
- Sólidos de revolución
- Superficies de revolución



TALLER: RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN EL ESPACIO 3D



1. Punto, recta, plano y espacio son conceptos primitivos

En la geometría euclidiana clásica, los conceptos de punto, recta, plano y espacio son llamados conceptos primitivos, es decir, no se definen formalmente, sino que se describen de manera intuitiva. Debido a esto, es imprescindible desarrollar la visualización para comprender cómo se relacionan. Para ello, es recomendable representar estos conceptos, siempre que sea posible, a través de objetos cotidianos.



Comentarios

- Si bien el estudio de los conceptos de punto, recta y plano y sus propiedades geométricas suele abordarse con un tratamiento geométrico formal, es importante desarrollar la intuición sobre estos conceptos y sus relaciones.



Ubicación

Taller: Razonamiento geométrico en el espacio 3D
Actividad: Planos y rectas en el espacio

TALLER: RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN EL ESPACIO 3D



2. Axiomas

Para construir el conocimiento geométrico, además de los conceptos primitivos que hemos visto de punto, recta y plano, se requiere de axiomas. Estos corresponden a ideas geométricas fundamentales que se suponen ciertas sin necesidad de ser demostradas.

Euclides, alrededor del año 300 a. C, en su tratado Los elementos, fue el primero en axiomatizar la geometría de puntos, rectas y planos en el espacio. En 1899, Hilbert reformula y completa los axiomas de Euclides estableciendo una nueva colección de axiomas.

En la literatura se pueden encontrar pequeñas variaciones de estos axiomas. En esta actividad usaremos la siguiente versión de los primeros axiomas, traducidos por E. J. Townsend, PH. D, de la Universidad de Illinois:

- Axioma 1: Dos puntos distintos determinan una única recta.
- Axioma 2: Dos puntos cualesquiera de una recta determinan la misma recta.
- Axioma 3: Tres puntos que no están en una misma recta determinan un único plano.
- Axioma 4: Tres puntos cualesquiera de un plano determinan el mismo plano.
- Axioma 5: Si dos puntos de una recta están en un plano, entonces todo punto de la recta también está contenido en el plano.
- Axioma 6: Si dos planos tienen un punto en común, entonces tienen por lo menos dos puntos en común.
- Axioma 7: En cada recta existen al menos dos puntos; en cada plano hay al menos tres puntos que no pertenecen a una misma recta, y en el espacio existen al menos cuatro puntos que no pertenecen a un mismo plano.



Comentarios

- Para conocer más sobre los axiomas, revisa la siguiente referencia:

Hilbert, David (1902), The Open Court Publishing Company, ed., The Foundations of Geometry (en inglés) (publicado el 1950).



Ubicación

Taller: Razonamiento geométrico en el espacio 3D
Actividad: Planos y rectas en el espacio

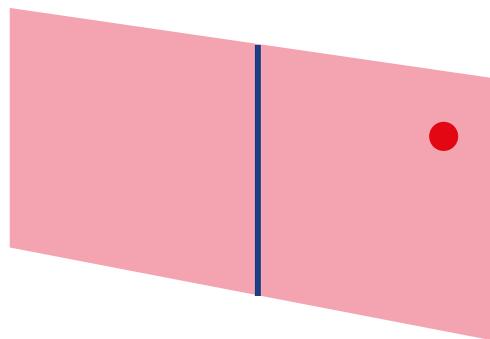
TALLER: RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN EL ESPACIO 3D



3. Los axiomas son la base de la construcción de las propiedades geométricas

Los axiomas son la base a partir de la cual se derivan otras propiedades geométricas. Por ejemplo, en la demostración de la propiedad que señala que por una recta en el espacio y un punto exterior a ella pasa un único plano usamos los axiomas siguientes:

- Dos puntos cualesquiera de una recta determinan la misma recta.
- Por tres puntos que no están en una misma recta pasa un único plano.
- Dados dos puntos en un plano, la recta que pasa por ellos está contenida en el mismo plano.



Comentarios

- Cuando se inicia el estudio de la geometría clásica, es importante hacerse conscientes de cómo y cuándo utilizar los axiomas para justificar propiedades geométricas. Esto permite realizar construcciones o demostraciones más avanzadas a medida que se progresa en el estudio y se va contando con más propiedades previamente establecidas.
- Si bien los axiomas son lógicamente correctos, su estudio y el de las propiedades derivadas tienden a opacar la intuición, por lo cual el desarrollo de la visualización se vuelve indispensable.



Ubicación

Taller: Razonamiento geométrico en el espacio 3D
Actividad: Planos y rectas en el espacio

TALLER: RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN EL ESPACIO 3D



4. Rectas paralelas

Diremos que dos rectas distintas en el espacio son paralelas si están contenidas en el mismo plano y no se intersectan.

Por motivos técnicos, diremos que una recta es paralela a sí misma.

Notemos que el plano que queda definido por dos rectas paralelas en el espacio es único. Esto se debe a que con dos rectas tenemos por lo menos tres puntos no alineados, y estos definen un único plano.



Comentarios

- En determinados momentos de la escolaridad se espera que los estudiantes vayan adquiriendo ideas y conceptos geométricos, particularmente en dos dimensiones. Sin embargo, se debe resguardar que estas ideas se adapten apropiadamente al espacio, pues de lo contrario pueden llevar a errores conceptuales. Por ejemplo, no es correcto extender al espacio la definición de rectas paralelas como aquellas que no tienen intersección, ya que esta definición incluiría casos como el que se representa en el siguiente esquema de unas carreteras:



- Una manera de ayudar a los estudiantes a vislumbrar que los conceptos de la geometría plana requieren ser adaptados al espacio es complementar la enseñanza con el constante desarrollo de la visualización espacial.



Ubicación

Taller: Razonamiento geométrico en el espacio 3D

Actividad: Planos y rectas en el espacio

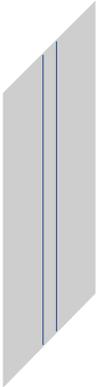
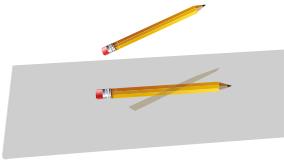
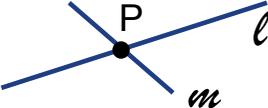
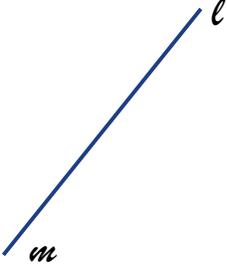
TALLER: RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN EL ESPACIO 3D



5. Posiciones relativas entre rectas

Dadas dos rectas en el espacio, puede ocurrir que:

- no se intersectan. Se distinguen dos situaciones dependiendo de si hay un plano que las contenga o no:
 - si están contenidas en un mismo plano, decimos que las rectas son paralelas.
 - si están contenidas en planos distintos, decimos que las rectas “se cruzan” o que “son alabeadas”.
- se intersectan en un punto, en cuyo caso decimos que las rectas son secantes.
- se intersectan en una recta, en cuyo caso decimos que las rectas son coincidentes.

Rectas paralelas	Rectas que se cruzan	Rectas secantes	Rectas coincidentes
			



Ubicación

Taller: Razonamiento geométrico en el espacio 3D
Actividad: Planos y rectas en el espacio

TALLER: RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN EL ESPACIO 3D

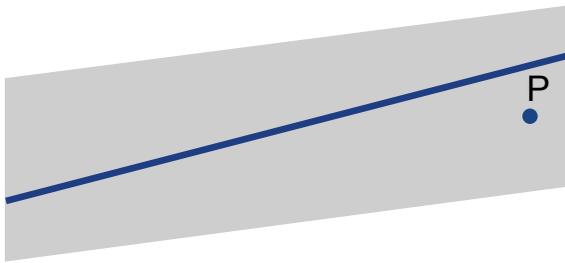


6. Posiciones relativas entre rectas

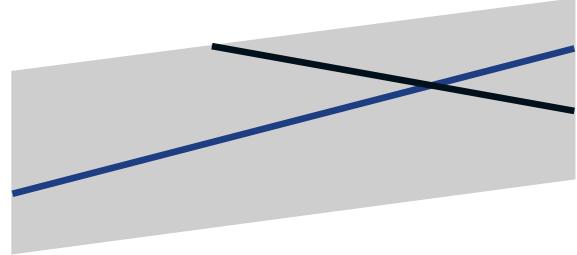
Un plano en el espacio queda determinado de forma única por:

- una recta y un punto exterior a ella
- dos rectas secantes
- dos rectas distintas que son paralelas, o bien
- tres puntos no alineados

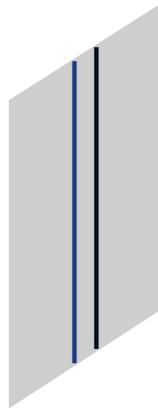
Una recta y un punto exterior a ella



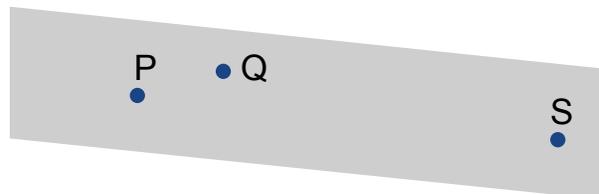
Dos rectas secantes



Dos rectas distintas que son paralelas



Tres puntos no alineados



Ubicación

Taller: Razonamiento geométrico en el espacio 3D
Actividad: Planos y rectas en el espacio

TALLER: RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN EL ESPACIO 3D



7. Posiciones relativas entre planos

Uno de los axiomas señala que si dos planos distintos se cortan y hay un punto en la intersección, entonces hay por lo menos otro punto en dicha intersección. Por lo tanto, si dos planos distintos se intersectan, lo hacen en una recta.

Dados dos planos en el espacio, puede ocurrir que:

- no tengan intersección, en cuyo caso decimos que los planos son paralelos.
- la intersección sea una recta, en cuyo caso decimos que los planos son secantes.
- la intersección sea un plano, en cuyo caso ambos planos son iguales. En este caso también se habla de planos coincidentes.

Planos paralelos	Planos secantes	Planos coincidentes



Comentarios

- De igual modo que para el caso de las rectas, diremos que un plano es paralelo a sí mismo.



Ubicación

Taller: Razonamiento geométrico en el espacio 3D
Actividad: Planos y rectas en el espacio

TALLER: RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN EL ESPACIO 3D



8. Posiciones relativas entre planos

Dados una recta y un plano en el espacio, puede ocurrir que:

- no se intersectan, en cuyo caso decimos que la recta es paralela al plano.
- la intersección sea un punto, en cuyo caso decimos que la recta es secante al plano.
- la intersección sea la misma recta, en cuyo caso la recta está contenida en el plano.

Recta paralela al plano	Recta secante al plano	Recta contenida en el plano
<p>A 3D diagram showing a pink line labeled r positioned above a gray parallelogram representing a plane labeled α. The line r is parallel to the plane and does not intersect it.</p>	<p>A 3D diagram showing a pink line labeled r intersecting a gray parallelogram representing a plane labeled α at a single point labeled P.</p>	<p>A 3D diagram showing a pink line labeled r lying entirely within a gray parallelogram representing a plane labeled α.</p>



Comentarios

- Al igual que antes, cuando una recta está contenida en un plano, decimos que es paralela a él.



Ubicación

Taller: Razonamiento geométrico en el espacio 3D
Actividad: Planos y rectas en el espacio

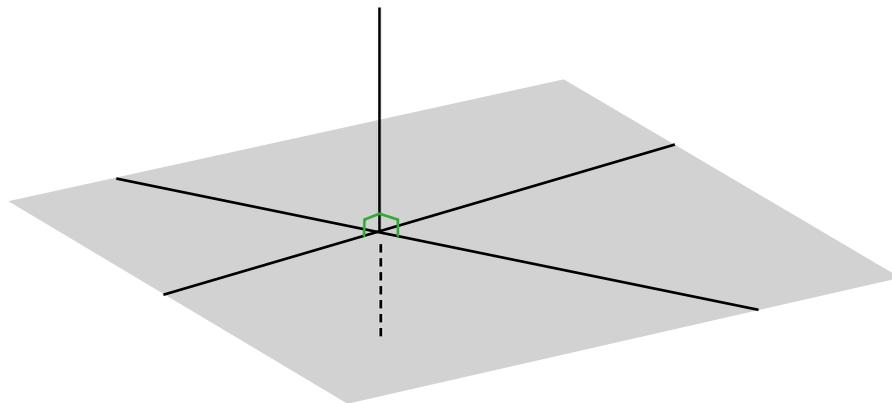
TALLER: RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN EL ESPACIO 3D



9. Recta perpendicular en un plano

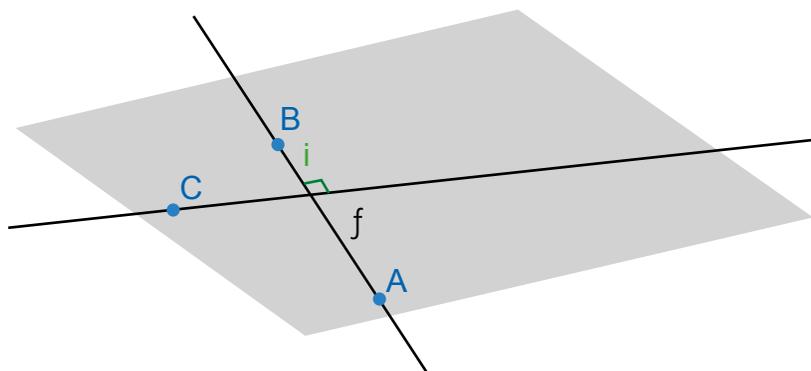
Decimos que una recta que intersecta a un plano es perpendicular a este si es perpendicular a todas las rectas del plano que pasan por la intersección.

Se puede demostrar que para garantizar que una recta es perpendicular a un plano, basta verificar que es perpendicular a dos rectas del plano que pasan por su intersección.



Comentarios

- Notemos que para visualizar cuándo una recta es perpendicular a un plano se requiere comprender la perpendicularidad entre rectas. Recordemos que dos rectas que se intersectan determinan un plano, por lo tanto al intersectarse forman cuatro ángulos en el plano que definen. Cuando estos ángulos son iguales, decimos que las rectas son perpendiculares.



Ubicación

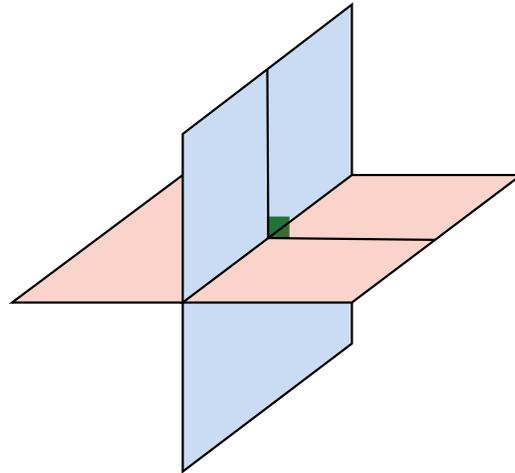
Taller: Razonamiento geométrico en el espacio 3D
Actividad: Planos y rectas en el espacio

TALLER: RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN EL ESPACIO 3D



10. Planos perpendiculares

Dos planos son perpendiculares si uno de ellos contiene al menos una recta perpendicular al otro plano.



Ubicación

Taller: Razonamiento geométrico en el espacio 3D
Actividad: Planos y rectas en el espacio

TALLER: RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN EL ESPACIO 3D



11. Aprendizaje respecto de planos y rectas en el espacio

Para consolidar el aprendizaje respecto de rectas y planos en el espacio, se requiere acompañar el estudio con la indagación y la visualización de los conceptos y las propiedades geométricas. Es por esto que es recomendable que el docente genere instancias para que sus estudiantes puedan explorar ideas y conceptos a través de recursos tecnológicos o de representaciones con material concreto, de manera que visualicen e incluso conjeturen hasta convencerse de la veracidad de ideas geométricas que podrían resultar difíciles de justificar formalmente.



Ubicación

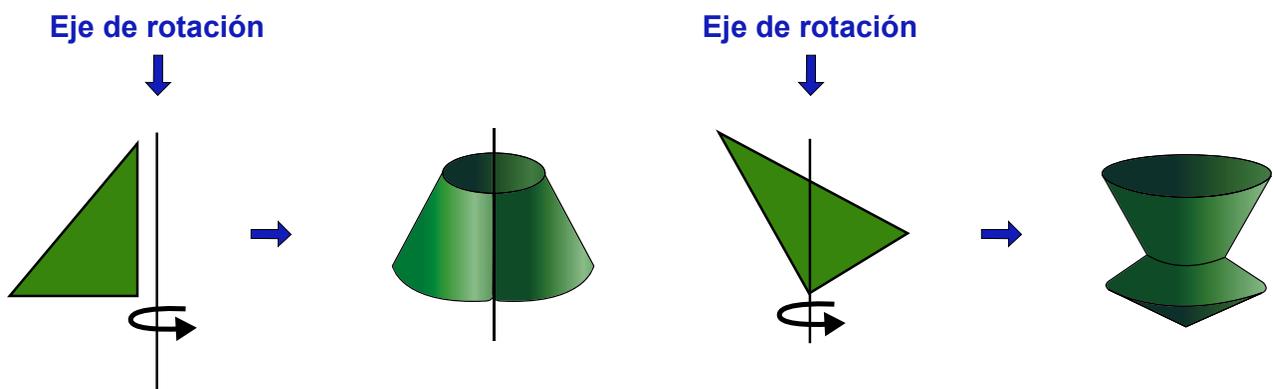
Taller: Razonamiento geométrico en el espacio 3D
 Actividad: Planos y rectas en el espacio

TALLER: RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN EL ESPACIO 3D



12. Sólidos de revolución

Se denomina sólido de revolución a aquel que se obtiene al girar una figura plana en torno a una recta llamada eje de rotación. La recta puede pasar por la figura o ser exterior a ella.



Ubicación

Taller: Razonamiento geométrico en el espacio 3D
Actividad: Revolucionando figuras geométricas

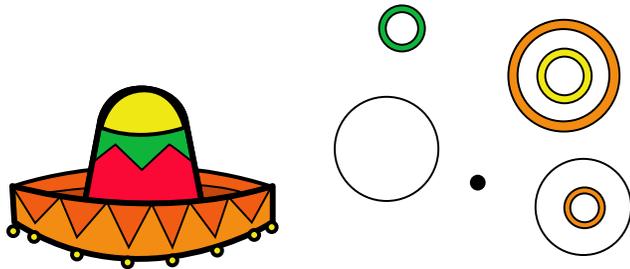
TALLER: RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN EL ESPACIO 3D



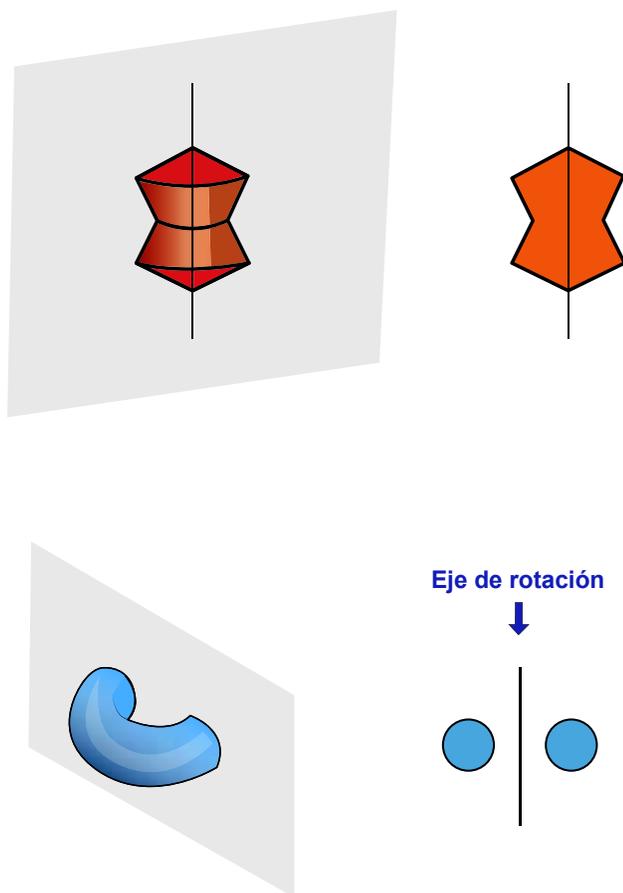
13. Propiedades de los sólidos de revolución

Al ser generados por la rotación de una figura plana, los sólidos de revolución tienen las siguientes propiedades:

Al cortarlo con cualquier plano perpendicular al eje de rotación, se pueden obtener círculos o anillos concéntricos. En casos extremos, puntos y circunferencias.



Al cortarlo con planos que contienen al eje de rotación, se obtiene siempre la misma figura, en la cual se observa simetría axial.



Ubicación

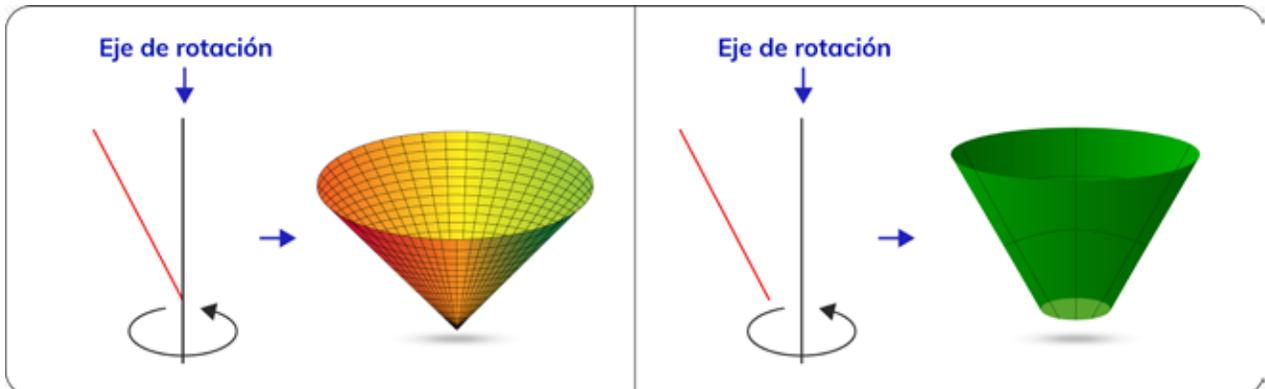
Taller: Razonamiento geométrico en el espacio 3D
Actividad: Revolucionando figuras geométricas

TALLER: RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN EL ESPACIO 3D



14. Superficies de revolución

Llamamos **superficie de revolución** a una superficie en el espacio que se obtiene al rotar una curva en torno a una recta llamada **eje de rotación**. Este eje puede intersectar o no a la curva.



Ubicación

Taller: Razonamiento geométrico en el espacio 3D
Actividad: Revolucionando figuras geométricas

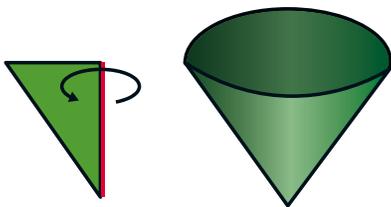
TALLER: RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN EL ESPACIO 3D



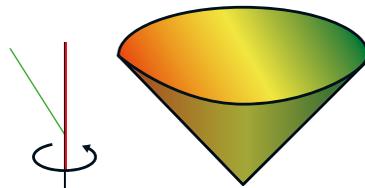
15. Cono, cilindro y esfera

El cono, el cilindro y la esfera pueden obtenerse a partir de la rotación de determinadas figuras. Si bien es común encontrar que estos conceptos se mencionan indistintamente como sólidos y como superficies de revolución, es importante tener claridad de que se originan a partir de diferentes figuras.

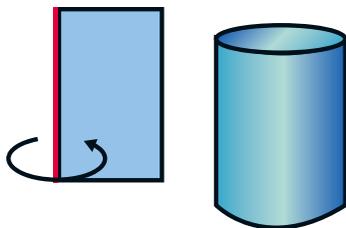
Un **cono como sólido de revolución** se obtiene rotando un triángulo rectángulo en torno a uno de sus catetos.



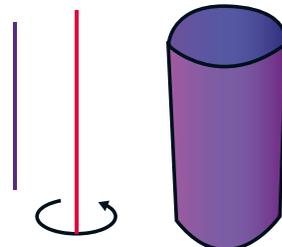
Un **cono como superficie de revolución** se obtiene rotando un segmento de recta que corta al eje de rotación.



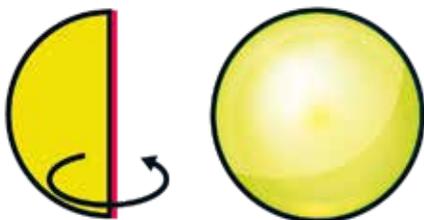
Un **cilindro como sólido de revolución** se obtiene rotando un rectángulo en torno a uno de sus lados.



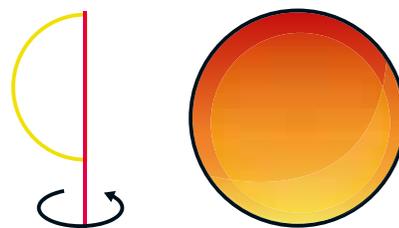
Un **cilindro como superficie de revolución** se obtiene rotando un segmento de recta paralelo al eje de rotación.



Un **cilindro como sólido de revolución** se obtiene rotando un rectángulo en torno a uno de sus lados.



Un **cilindro como superficie de revolución** se obtiene rotando un segmento de recta paralelo al eje de rotación.

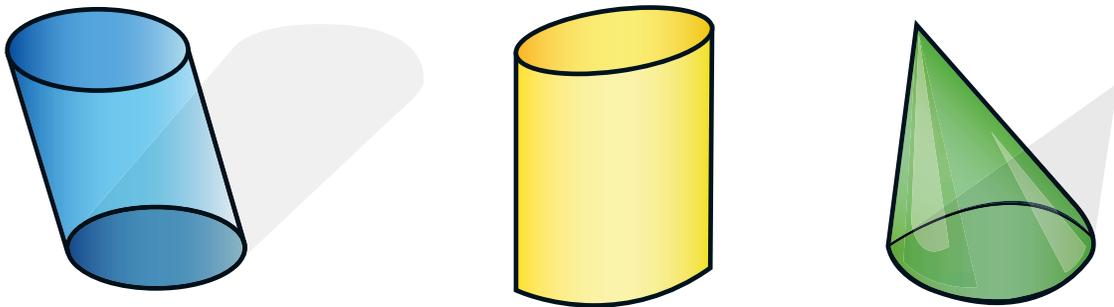


TALLER: RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN EL ESPACIO 3D



Comentarios

- El cono y el cilindro obtenidos de esta forma se denominan, respectivamente, cono circular recto y cilindro circular recto para diferenciarlos de otros tipos de conos y cilindros que no son de revolución.



Ubicación

Taller: Razonamiento geométrico en el espacio 3D
Actividad: Revolucionando figuras geométricas

TALLER: RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN EL ESPACIO 3D



16. Dimensión

Notemos que hemos llamado figura a un conjunto de puntos sobre el cual hemos enfocado nuestra atención. Las figuras pueden ser clasificadas según sus dimensiones:

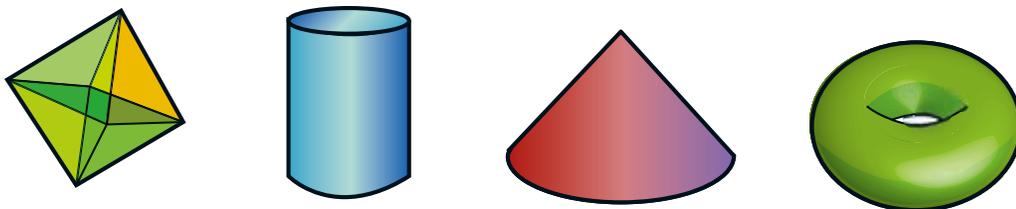
- Dimensión 0: un punto es un ejemplo de una figura de dimensión cero; no tiene *alto*, *ancho* ni *espesor*.
- Dimensión 1: Las figuras de una dimensión son aquellas que solo tienen *largo*, como los segmentos, las líneas rectas o curvas.



- Dimensión 2: Las figuras de dos dimensiones o, simplemente, figuras 2D son conjuntos de puntos en los que distinguimos *largo* y *ancho*, pero no *espesor* o *altura*. Por ejemplo, puntos del plano delimitados por líneas rectas o curvas. También el plano se considera una figura 2D.



- Dimensión 3: Las figuras de tres dimensiones o, simplemente, figuras 3D son conjuntos de puntos en el espacio en los que distinguimos *largo*, *ancho* y *alto*. Pueden estar delimitados por figuras 2D. Son las figuras que habitualmente percibimos en nuestro entorno.



Ubicación

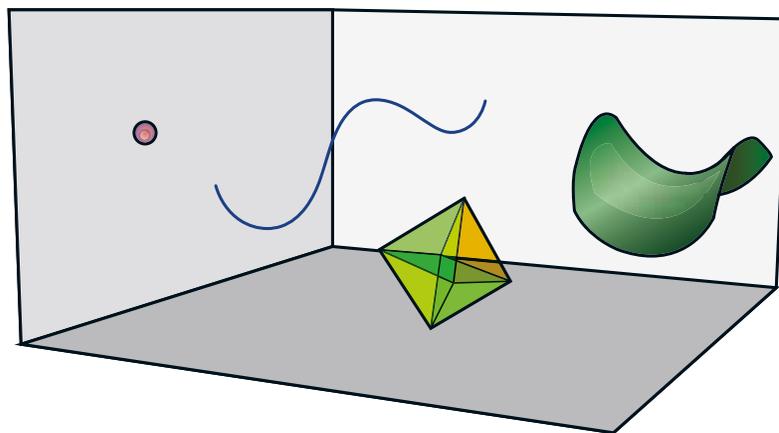
Taller: Razonamiento geométrico en el espacio 3D
Actividad: Revolucionando figuras geométricas

TALLER: RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN EL ESPACIO 3D



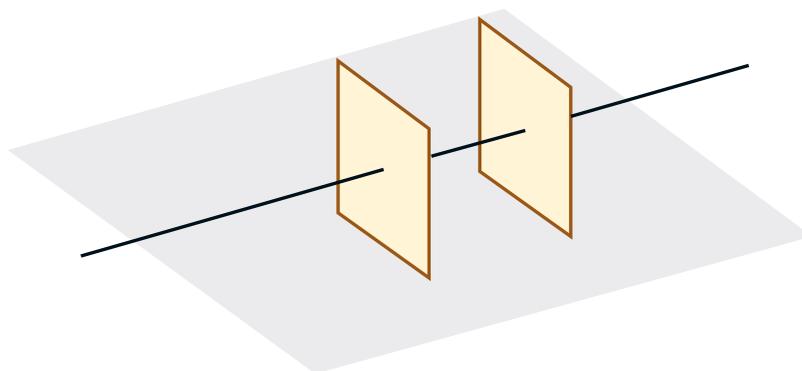
17. Cono, cilindro y esfera

Debemos distinguir entre la dimensión de la figura y la del entorno en la que esta “vive” o se considera. Por ejemplo, a continuación se muestran un punto, una curva, una superficie (2D) y un cuerpo (3D) situados en el espacio (3D).



Comentarios

- En el estudio de la geometría es usual representar objetos 2D usando exclusivamente figuras planas, lo cual podría llevar a los estudiantes a pensar que los objetos bidimensionales se reducen a aquellos que están contenidos en un plano. Por esto, es importante que el docente maneje una variedad de ejemplos y haga énfasis en la distinción entre la dimensión de una figura y la del entorno en la que se ubica.
- Sin embargo, se debe tener cuidado, ya que en algunos casos podrían convivir dimensiones en una misma figura, como en la siguiente:



Ubicación

Taller: Razonamiento geométrico en el espacio 3D
Actividad: Revolucionando figuras geométricas

TALLER: RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN EL ESPACIO 3D



18. Uso de recursos tecnológicos

Es importante que los estudiantes tengan oportunidades de interactuar con recursos tecnológicos que les permitan visualizar los sólidos o superficies que se obtienen al rotar figuras en torno a un eje. En particular, GeoGebra resulta un recurso útil para la labor docente debido a que ofrece herramientas que permiten diseñar applets personalizados que cumplan determinados propósitos y herramientas de realidad aumentada que pueden actuar como gatillantes para motivar el estudio de la geometría en los estudiantes.



Ubicación

Taller: Razonamiento geométrico en el espacio 3D
Actividad: Revolucionando figuras geométricas