

# SUMA Y SIGUE MATEMÁTICA EN LÍNEA



# INNOVANDO EN LA ENSEÑANZA DE LAS PROBABILIDADES

## | BIENVENIDA

¡Bienvenidos y bienvenidas al taller online 1 del curso ***Innovando en la enseñanza de las probabilidades*** del Programa Suma y Sigue!

Relator: Ricardo Salinas

Tutora: Ximena Herrera



## | SESIÓN SINCRÓNICA

- Recuerdo Taller 1
- Preguntas tipo control
- Recomendaciones para rendir el control 1.

## | ASISTENCIA

Para registrar su asistencia, escriba su nombre completo en el chat.

Si no sabe utilizar el chat, a continuación revisaremos cómo hacerlo.

# | ¿CÓMO PARTICIPAR EN ZOOM?

## PANTALLA INICIAL

Aquí verás al relator o su pantalla compartida

**Nombre Apellido**

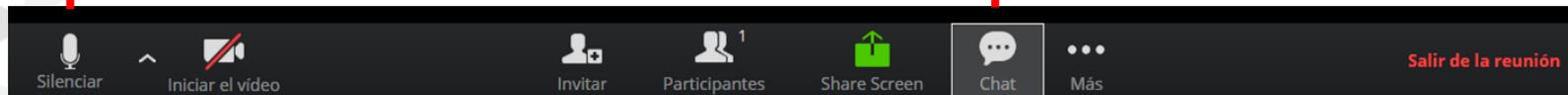
Todo lo que necesitas para participar en la reunión está aquí



## PRINCIPALES ÍCONOS

Activa o desactiva  
tu micrófono

Abre la ventana del  
chat



Activa o desactiva  
la cámara de tu  
dispositivo

Al terminar la  
reunión, pincha  
aquí

# CHAT



# CHAT

Chat de grupo de Zoom

De mí para Todos: 05:32 PM  
Hola como están?

De Caro para Todos: 05:32 PM  
Hola

Enviar a: Todos ▾

Escribir mensaje aquí...

Archivo ...

Aquí puedes definir si envías un mensaje para todos o para una persona

# LEVANTAR LA MANO

Participantes (2)

TE THOMAS EDWARD PEET MORAGA (Yo)

C Caro (Anfitrión)

**Levantarme** (circled in red)

Mudo Me Reclamar el rol de hospedador Merge to Meeting Window

Participantes (1)

Nombre Apellido(Yo)

Silenciar **Levantarme** (circled in red)

Chat de grupo de Zoom

Participantes (1)

Nombre Apellido(Yo)

Silenciar **Bajar la mano** (circled in red)

Chat de grupo de Zoom

Para: Todos  
Escriba su mensaje aquí...

## | OBJETIVO DEL CURSO

Fortalecer los conocimientos y habilidades para la enseñanza de la probabilidad, con énfasis en la comprensión de conceptos probabilísticos fundamentales, en el desarrollo de estrategias de cálculo y en el uso de simulaciones de experimentos aleatorios

# RECUERDO TALLER 1

## TALLER 1: NOCIONES DE PROBABILIDAD



- Análisis del caso del profesor Juan y la enseñanza de algunas nociones de probabilidad
- Enfoque empírico de la probabilidad
- Enfoque clásico de la probabilidad
- Propiedades fundamentales de la probabilidad
- Sesgo de equiprobabilidad en la enseñanza

# | PREGUNTAS TIPO CONTROL

## | VERDADERO O FALSO

En una carrera de 100 m planos compiten tres atletas: Andrea, Bruno y Carla. La probabilidad de que gane Andrea es 0,46 y la probabilidad de que gane Bruno es la mitad de la de Andrea. En esta carrera no se consideran empates.

**Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.**

	V	F
La probabilidad de que gane Andrea o Bruno es 0,69.		
Con la información disponible no se puede determinar la probabilidad de que gane Carla.		
La probabilidad de que no gane ninguno de los tres competidores es 0.		

## VERDADERO O FALSO

|

A: gana Andrea    B: gana Bruno    C: gana Carla

$$P(A) = 0,46 \text{ y } P(B) = P(A)/2 = 0,23$$

En esta carrera no se consideran empates -> ¿Qué implica esta condición en términos de los eventos y sus probabilidades?

## | VERDADERO O FALSO

A: gana Andrea    B: gana Bruno    C: gana Carla

$$P(A) = 0,46 \text{ y } P(B) = P(A)/2 = 0,23$$

En esta carrera no se consideran empates -> ¿Qué implica esta condición en términos de los eventos y sus probabilidades?

1. Implica que los eventos A, B y C no pueden ocurrir al mismo tiempo, es decir que son **mutuamente excluyentes**. Esto implica que  $A \cap B = \phi$ ,  $A \cap C = \phi$ ,  $B \cap C = \phi$  y  $A \cap B \cap C = \phi$ , por lo que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{y} \quad P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

2. Implica que uno de los 3 debe ganar, es decir que  $A \cup B \cup C$  es un **evento seguro**, por tanto

$$P(A \cup B \cup C) = 1$$

## | VERDADERO O FALSO

a)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,46 + 0,23 = 0,69$

b)  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 1 \Rightarrow 0,69 + P(C) = 1 \Rightarrow P(C) = 0,31$

c)  $P(\text{No gane ninguno de los tres}) = 1 - P[(\text{No gane ninguno de los tres})^c] =$   
 $= 1 - P(\text{Gane al menos uno})$   
 $= 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - 1 = 0$

	V	F
La probabilidad de que gane Andrea o Bruno es 0,69.	X	
Con la información disponible no se puede determinar la probabilidad de que gane Carla.		X
La probabilidad de que no gane ninguno de los tres competidores es 0.	X	

## | PREGUNTA ABIERTA

Un profesor propone a sus estudiantes que lancen un par de dados y multipliquen los dos números obtenidos. El objetivo es determinar la **probabilidad de obtener como producto un número impar**.

Sus estudiantes anticipan algunas respuestas:

## | PREGUNTA ABIERTA

**Miguel:**

Nosotros lanzamos los dados y obtuvimos 6, 1, 15, 8, 30, 12, 4, 10, 9, 18, 24 y 6. Entonces, la probabilidad buscada es  $\frac{1}{4}$ , porque la ley de los grandes números dice que la probabilidad es igual a la frecuencia relativa de dicho evento en varios lanzamientos.



**Bárbara:**

En cada dado hay tantos números pares como impares, por lo que la probabilidad de que el producto resulte impar es  $\frac{1}{2}$ .

**Tamara:**

El producto de los valores puede dar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36. Como de estos 18 valores, hay 6 que son números impares, la probabilidad de que el producto sea impar es  $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ .



**Determina si los argumentos de Miguel, Bárbara y Tamara son correctos y justifica.**

## | PREGUNTA ABIERTA



**Bárbara:**

En cada dado hay tantos números pares como impares, por lo que la probabilidad de que el producto resulte impar es  $\frac{1}{2}$ .

**¿Es correcto el argumento de Bárbara? Justifica**

## | PREGUNTA ABIERTA



**Miguel:**

Nosotros lanzamos los dados y obtuvimos 6, 1, 15, 8, 30, 12, 4, 10, 9, 18, 24 y 6. Entonces, la probabilidad buscada es  $\frac{1}{4}$ , porque la ley de los grandes números dice que la probabilidad es igual a la frecuencia relativa de dicho evento en varios lanzamientos.

**¿Es correcto el argumento de Miguel? Justifica**

## | PREGUNTA ABIERTA



**Tamara:**

El producto de los valores puede dar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36. Como de estos 18 valores, hay 6 que son números impares, la probabilidad de que el producto sea impar es  $6/18 = 1/3$ .

**¿Es correcto el argumento de Tamara? Justifica**

## | PREGUNTA ABIERTA



**Tamara:**

El producto de los valores puede dar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36. Como de estos 18 valores, hay 6 que son números impares, la probabilidad de que el producto sea impar es  $6/18 = 1/3$ .

Espacio muestral de Tamara  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$

**No es equiprobable:**

- El resultado 1 se puede obtener solo de una manera posible: (1,1)
- El resultado 6 se puede obtener de 4 maneras posibles: (1,6), (6,1), (2,3) y (3,2)

## | PREGUNTA ABIERTA



**Tamara:**

El producto de los valores puede dar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36. Como de estos 18 valores, hay 6 que son números impares, la probabilidad de que el producto sea impar es  $6/18 = 1/3$ .

Espacio equiprobable: todos los pares de dados

$\Omega =$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

¿Cuáles son los resultados favorables al evento “El producto es un impar”?

## | PREGUNTA ABIERTA



**Tamara:**

El producto de los valores puede dar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36. Como de estos 18 valores, hay 6 que son números impares, la probabilidad de que el producto sea impar es  $6/18 = 1/3$ .

Espacio equiprobable: todos los pares de dados

$\Omega =$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

¿Cuáles son los resultados favorables al evento “El producto es un impar”?

El producto de dos números es impar si y solo si ambos números son impares.

$$P(\text{Producto Impar}) = 9 / 36 = 1/4$$

## | EJEMPLO RESPUESTA PREGUNTA ABIERTA

**Determina si los argumentos de Miguel, Bárbara y Tamara son correctos y justifica.**

**Solución:** Los argumentos de los 3 estudiantes son incorrectos.

- Miguel está aplicando la ley de los grandes números con una cantidad pequeña de lanzamientos. Como no se dispone de un número suficientemente grande de lanzamientos es imposible estimar de esta forma la probabilidad. Esto independiente que justo le haya obtenido la probabilidad correcta.
- Bárbara presenta un error en su razonamiento que se debe a que está considerando la paridad de cada dado, pero no la del producto.
- Tamara aplica la regla de Laplace usando un espacio muestral que asume que es equiprobable, pero que no lo es.

## | PREGUNTA ABIERTA

<b>Nivel básico</b>	<b>Nivel intermedio</b>	<b>Nivel bueno</b>
Indica que los tres argumentos son incorrectos, pero no justifica por qué.	Indica que los argumentos son incorrectos, pero entrega una justificación incompleta.	Indica que los argumentos son incorrectos y justifica cada uno de ellos.

## | SELECCIÓN MÚLTIPLE

Thomas y Jorge quieren decidir cuál de ellos se queda con la última manzana del cajón. Para ello, deciden cada uno lanzar un dado: si el mayor valor entre los dos dados lanzados es 1, 2, 3 ó 4, Thomas se quedará con la manzana, mientras que si el mayor valor es 5 ó 6, Jorge se queda con la manzana.

**¿Qué probabilidad tiene Jorge de quedarse con la manzana?**

- a)  $1/3$
- b)  $5/9$
- c)  $1/2$
- d)  $4/5$

## | SELECCIÓN MÚLTIPLE

Thomas y Jorge quieren decidir cuál de ellos se queda con la última manzana del cajón. Para ello, deciden cada uno lanzar un dado: si el mayor valor entre los dos dados lanzados es 1, 2, 3 ó 4, Thomas se quedará con la manzana, mientras que si el mayor valor es 5 ó 6, Jorge se queda con la manzana.

**¿Qué probabilidad tiene Jorge de quedarse con la manzana?**

a)  $1/3$

b)  $5/9$

c)  $1/2$

d)  $4/5$

## | IDEAS FUNDAMENTALES

- No todos los procedimientos que involucran el azar son experimentos aleatorios.
- Un espacio muestral modela los resultados de un experimento aleatorio, y puede haber más de uno.
- La regla de Laplace requiere de un espacio muestral equiprobable.
- Una estrategia para encontrar un espacio equiprobable a veces es distinguir los objetos.
- Los enfoques empíricos y clásico de la probabilidad son complementarios.
- La ley de los grandes números nos dice que a medida que aumentamos el número de repeticiones del experimento, la probabilidad de que la frecuencia relativa se aleje sustancialmente de la probabilidad teórica se hace más y más pequeña.
- En el estudio de la probabilidad un fenómeno importante que se debe abordar es el *sesgo de equiprobabilidad*.

# **INFORMACIÓN Y RECOMENDACIONES PARA EL CONTROL**

## | INFORMACIÓN RELEVANTE

- Se dispone de 1 hora y 30 minutos para rendirlo.
- Se debe responder 7 preguntas:
  - 4 de selección múltiple,
  - 2 de verdadero o falso y
  - 1 pregunta abierta.
- No se puede omitir ninguna pregunta.
- En caso de urgencia o problema mayor hay que comunicarse cuanto antes con la tutora.
- Inicio: Desde hoy
- Fin: **Domingo 31 de Mayo**

## | RECOMENDACIONES

- Terminar el taller correspondiente.
- Imprimir las fichas del material complementario.
- Asegurarte de tener buena conexión a internet.
- Verificar que la batería tenga carga suficiente o tener a mano el cargador en caso de que tu computador sea portátil.
- Programar tu tiempo para rendir el control. No lo dejes para último minuto.
- Comprobar que hayas respondido todas preguntas antes de presionar el botón “Terminar mi examen”.

Luego de que la tutora revise las preguntas abiertas, tendrás acceso a una retroalimentación sobre el control.

## | REQUISITOS DE APROBACIÓN

Para aprobar un curso Suma y Sigue, los siguientes requisitos deben cumplirse por separado:

- Tener un promedio de evaluaciones (controles y tarea) mayor o igual a 4,0.
- Avanzar como mínimo el 80% de las actividades virtuales.
- Participación en los talleres online 1, 2 y 3 (en caso de no poder participar en alguna de estas instancias se debe enviar un justificativo vía correo electrónico al tutor/a virtual de su curso).

I

Agradecemos su participación en el taller online 1.

Agradecemos también su disposición y adaptación a los cambios sufridos producto de la contingencia.

Los invitamos a contestar una **encuesta sobre este taller online** en plataforma.

¡Que tengan una excelente experiencia de aprendizaje en este curso!



**CMM**  
Centro de  
Modelamiento  
Matemático



**SUMA  
Y SIGUE**  
MATEMÁTICA EN LÍNEA