SUMA Y SIGUE

MATEMÁTICA EN LÍNEA

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

fcfm FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

CMM Centro de Modelamiento Matemático

Ministerio de Educación Gobierno de Chile

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

FICHAS TALLER 4:
PROBABILIDAD CONDICIONAL

INTRODUCCIÓN

En este taller se abordó el concepto matemático de probabilidad condicional e independencia y se estudiaron sus propiedades. Además, se utilizaron representaciones de diagrama de árbol y tabla de contingencia para organizar los datos en problemas de probabilidad condicional y facilitar su resolución y construcción. Por otro lado, a lo largo del taller se destacaron algunos aspectos pedagógicos que contribuyen a la enseñanza de la probabilidad condicional. En el material que se presenta a continuación podrás encontrar fichas que contemplan los siguientes contenidos:

- Conflicto cognitivo para promover el aprendizaje en el aula.
- Nociones de probabilidad condicional.
- Probabilidad de A condicionada a B.
- Propiedades de la probabilidad condicional.
- Independencia de eventos.
- Análisis y construcción de problemas de probabilidad condicional.

TALLER 4:
PROBABILIDAD CONDICIONAL

1. Conflicto cognitivo para promover el aprendizaje en el aula

En la literatura se habla de conflicto cognitivo cuando un individuo se ve enfrentado a una situación que no encaja con sus ideas preconcebidas y su balance mental se desequilibra (Zohar, 2005). Este desequilibrio se convierte en un impulsor en el desarrollo de nuevas concepciones que pueden restaurar el equilibrio (Astolfi, 2008).

En probabilidad es frecuente que aparezcan resultados que son contraintuitivos, los que pueden ser utilizados como una estrategia para provocar conflictos cognitivos. En este taller comenzamos el estudio de la probabilidad condicional con el caso de la profesora Dominga, en el que ella buscó un problema (el Juego de las tarjetas) que, debido a sus características, generó un conflicto cognitivo en sus estudiantes, y durante el transcurso de este taller se presentaron problemas similares, cuya resolución no era trivial, con el fin de intencionar la profundización en el conocimiento matemático de la probabilidad condicional y su enseñanza.

Comentarios

- Para profundizar en este tema puedes revisar las siguientes referencias en otros idiomas:

Astolfi, J., Darot, É., Ginsburger-Vogel, Y., & Toussaint, J. (2008). Capítulo 3. Conflit cognitif, conflit socio-cognitif. En: , J. Astolfi, É. Darot, Y. Ginsburger-Vogel & J. Toussaint (Dir), *Mots-clés de la didactique des sciences: Repère, définitions, bibliographies* (pp.35-48). Louvain-la-Neuve, Bélgica: De Boeck Supérieur.

Zohar, A., & Aharon-Kravetsky, S. (2005). Exploring the effects of cognitive conflict and direct teaching for students of different academic levels. *Journal of Research in Science Teaching*, 42(7), 829 - 855.

Ubicación: Módulo 2

Taller 4 : Probabilidad condicional
Actividad: El juego de las tarjetas

TALLER 4:
PROBABILIDAD CONDICIONAL

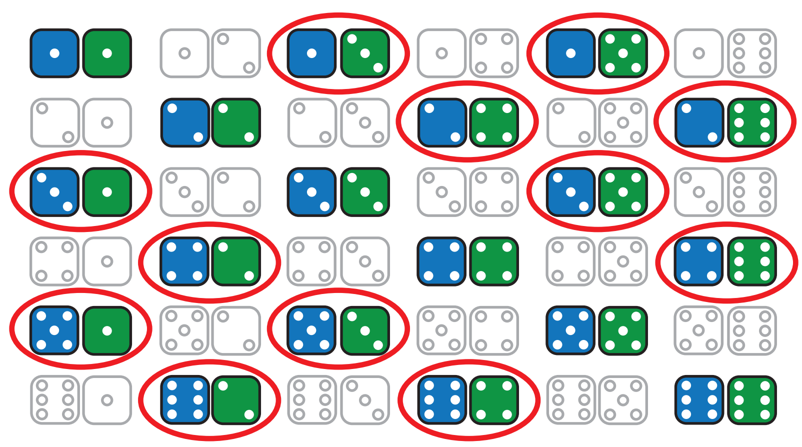
2. Nociones de probabilidad condicional

Iniciamos el estudio de probabilidad condicional abordando algunas nociones fundamentales a través de experimentos aleatorios sencillos. Por ejemplo, para el experimento de lanzar dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que en los dados hayan salido valores distintos si se sabe que la suma es un número par?

Definimos los eventos:
A = "obtener distintos valores en los dados".
B = "la suma de los dados es un número par".

Para calcular la probabilidad del evento A cuando ocurre B usamos un espacio muestral reducido a los elementos que componen el evento B. Dicho de otro modo, utilizamos la regla de Laplace aplicada en el espacio reducido, donde los casos favorables son aquellos que pertenecen tanto a A como a B, es decir:

$$\frac{\textit{casos favorables al evento } A \cap B}{\textit{casos posibles del evento } B}$$



Los casos favorables aparecen encerrados en óvalos rojos.

Comentarios

- Cuando el espacio muestral original es equiprobable, se tiene que el espacio reducido también lo es debido a que no hay razones que privilegien la ocurrencia de algunos resultados por sobre otros.

Ubicación: Módulo 2

Taller 4 : Probabilidad condicional
Actividad: Condicionando la probabilidad

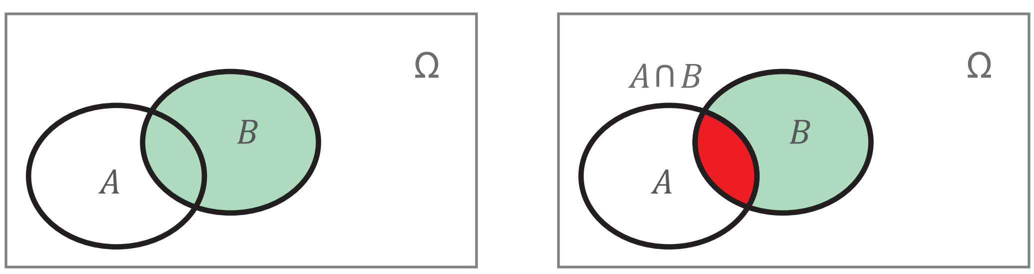
TALLER 4:
PROBABILIDAD CONDICIONAL

3. Probabilidad de A condicionada a B

Dados dos eventos A y B, si sabemos que ocurrió B, la probabilidad de A representa una nueva probabilidad que incorpora la información de B, y se conoce como **probabilidad de A condicionada a B**. Se denota por $P(A|B)$ y se lee como la probabilidad de A dado B. Usualmente al evento B se le llama condición.

$P(A|B)$ se define como $P(A|B) = \dfrac{P\,(A \cap B)}{P(B)}$

Para que esta expresión tenga sentido para cualquier evento A de Ω , se necesita que $\mathrm{P}\,(\mathrm{B}) > 0$.



Comentarios

- En la definición $P(A|B) = \dfrac{P\,(A \cap B)}{P(B)}$ interviene un evento A del espacio Ω, que no necesariamente está incluido en B.

- Cabe destacar que al condicionar por un evento B, el valor de $P(A)$ puede ser distinto a $P(A|B)$. Esta es una idea fundamental que se debe tener en cuenta cuando se calculan probabilidades condicionales.

- La definición $P(A|B) = \dfrac{P\,(A \cap B)}{P(B)}$ es válida para cualquier espacio muestral.

Ubicación: Módulo 2

Taller 4 : Probabilidad condicional
Actividad: Condicionando la probabilidad

TALLER 4:
PROBABILIDAD CONDICIONAL

4. Propiedades de la probabilidad condicional

Dado un evento B cualquiera del espacio muestral Ω , la probabilidad condicionada a B satisface los axiomas de la probabilidad. Esto es:

- $P(\Omega \mid B) = 1$
- $P(E \mid B) \geq 0$ para cualquier evento E.
- $P(E \cup F \mid B) = P(E \mid B) + P(F \mid B)$ cuando E y F son eventos mutuamente excluyentes.

Es importante destacar que si bien tanto $P(E)$ como $P(E \mid B)$ se definen para un evento E de Ω, estas son medidas distintas de probabilidad para E.

Ubicación: Módulo 2

Taller 4 : Probabilidad condicional
Actividad: Condicionando la probabilidad

5. Problemas que pueden interpretarse en términos de probabilidades

Existen problemas cuyos datos no se expresan explícitamente como probabilidades, pero que se pueden interpretar como tales. Ejemplos son aquellos problemas cuyos datos se enuncian como porcentajes, tasas o como frecuencias relativas. Por ejemplo, en el problema del sobrepeso e hipertensión 1 los datos están expresados como porcentajes, por lo que podría resolverse de forma aritmética, sin embargo también puede formularse como un problema de probabilidad (sobrepeso e hipertensión 2).

Sobrepeso e hipertensión 1	Sobrepeso e hipertensión 2
Suponga que la población de cierta localidad es de 10.500 habitantes y que el 37% de ellos tienen sobrepeso. Además, se ha comprobado que de los habitantes con sobrepeso un 46% sufren de hipertensión. ¿Qué porcentaje de los habitantes padecen hipertensión y sobrepeso?	Suponga que la población de cierta localidad es de 10.500 habitantes y que la probabilidad de escoger una persona al azar que tenga sobrepeso es de 0,37. Además, suponga que si se elige una persona al azar una persona dentro de las que tienen sobrepeso, la probabilidad de que tenga hipertensión es 0,46. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar un habitante de esta localidad que tenga hipertensión y sobrepeso?

Hay estudios que muestran que los estudiantes resuelven problemas formulados en términos porcentuales usando un razonamiento numérico y no necesariamente uno probabilístico. Para la enseñanza, es importante que el docente conozca la interpretación probabilística de estos argumentos aritméticos, de manera de promover el tránsito de los estudiantes de un razonamiento a otro.

Ubicación: Módulo 2

Taller 4 : Probabilidad condicional
Actividad: Condicionando la probabilidad

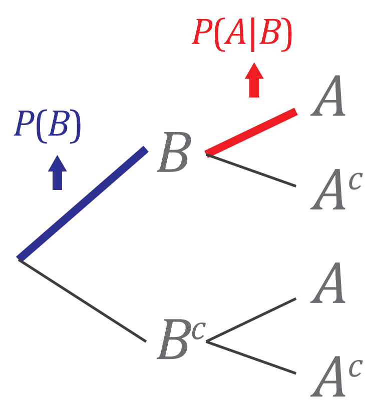
TALLER 4:
PROBABILIDAD CONDICIONAL

6. Relación P (A ∩ B) = P(B) · P(A|B)

Dados un evento A y un evento B que puede condicionar a A, la probabilidad de que ocurran A y B se expresa de la siguiente manera:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Una forma de representar esta expresión es a través de un diagrama de árbol como el siguiente:



P(B) • P(A|B) = P(A ∩ B)

Comentarios

- Observemos que el diagrama de árbol se ha construido de manera que en las primeras ramas aparezcan los eventos asociados a la condición, es decir, B y B^c. Invertir las etapas generará un árbol distinto, en el cual el análisis de las probabilidades podría resultar complejo.

Ubicación: Módulo 2

Taller 4 : Probabilidad condicional
Actividad: Condicionando la probabilidad

TALLER 4:
PROBABILIDAD CONDICIONAL

7. Independencia de eventos

Dos eventos A y B son **independientes** si se cumple que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Cuando tenemos dos eventos A y B tal que $\mathrm{P(B)} > 0$, la noción de independencia nos dice que la ocurrencia de B no afecta la probabilidad de A. Dicho de otro modo, $\mathrm{P(A|B) = P(A)}$.

Dos eventos que no son independientes se dicen dependientes.

Ubicación: Módulo 2

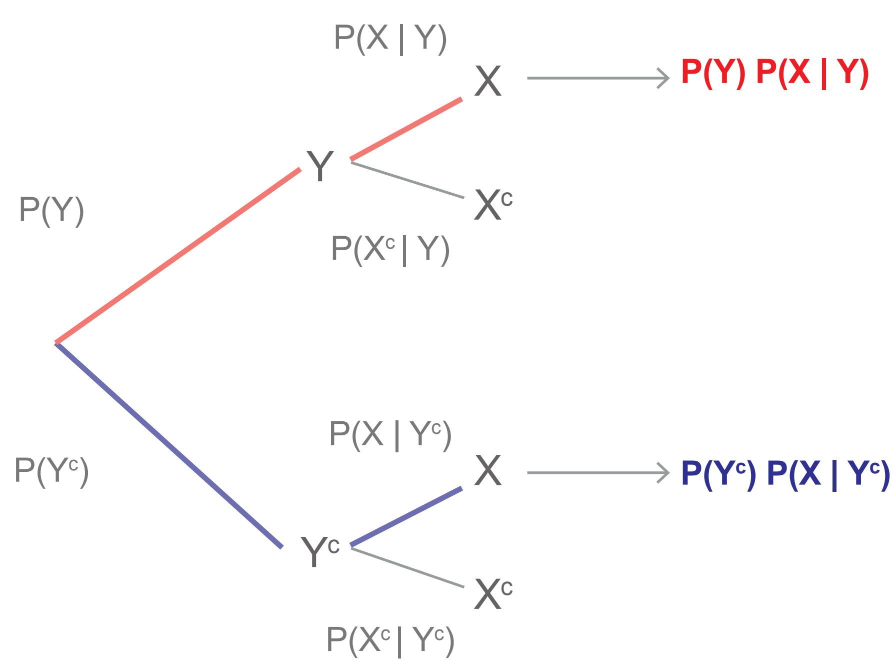
Taller 4 : Probabilidad condicional
Actividad: Condicionando la probabilidad

8. Noción de la probabilidad total

Dados dos eventos X e Y de un mismo espacio muestral, siempre se tiene la siguiente propiedad:

$$P(X) = P(Y) \,.\, P(X|Y) + P(Y^c) \,.\, P(X|Y^c)$$

Notemos que P(X) corresponde a la suma de los valores obtenidos en las dos ramas del siguiente diagrama de árbol:



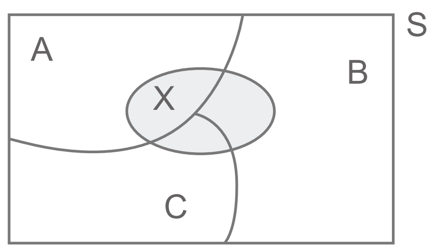
Ubicación: Módulo 2

Taller 4 : Probabilidad condicional
Actividad: Probabilidades totales y teorema de Bayes

TALLER 4:
PROBABILIDAD CONDICIONAL

9. Teorema de la probabilidad total

Sean A, B y C tres eventos mutuamente excluyentes que forman el espacio muestral S. En otras palabras, A, B y C corresponden a una partición de S. Consideremos además otro evento X del espacio muestral. En el siguiente diagrama se representan estos eventos:



La probabilidad de X se puede determinar a través de la siguiente expresión:

$$P(X) = P(A \cap X) + P(B \cap X) + P(C \cap X)$$

Lo que es igual a:

$$P(X) = P(A) \cdot P(X|A) + P(B) \cdot P(X|B) + P(C) \cdot P(X|C)$$

Es importante notar que puede ocurrir que la intersección de X con alguno de los conjuntos A, B o C sea vacía, en cuyo caso la expresión anterior quedará solo con dos sumandos.

Esta propiedad se puede generalizar al caso en que hay una mayor cantidad de eventos que particionan el espacio muestral, es decir, los eventos deben ser mutuamente excluyentes, y su unión debe ser el espacio muestral.

Este resultado se conoce como el **teorema de la probabilidad total**.

Comentarios

- Recordemos que la probabilidad de la intersección de dos eventos es el producto de las probabilidades si los eventos son independientes. En caso de que no lo sean, hay dos maneras de determinar la probabilidad de la intersección de dos eventos A y B usando probabilidad condicional:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$
$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

Ubicación: Módulo 2

Taller 4 : Probabilidad condicional
Actividad: Probabilidades totales y teorema de Bayes

10. Teorema de Bayes

Dados dos eventos A y B, la probabilidad de A dado B se puede calcular por:

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$$

Este resultado se conoce como **teorema de Bayes**.

Una aplicación común de este teorema se obtiene al utilizarlo en conjunto con el de la probabilidad total para calcular P(B):

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(A^c) \cdot P(B|A^c)}$$

Ubicación: Módulo 2

Taller 4 : Probabilidad condicional
Actividad: Probabilidades totales y teorema de Bayes

TALLER 4:
PROBABILIDAD CONDICIONAL

11. Tabla de contingencia

Una forma alternativa para ordenar y visualizar la información de problemas que involucran probabilidad condicional es la **tabla de doble entrada**, también llamada **tabla de contingencia**, que se construye de la siguiente manera:

Eventos	Y	Y^c	Total
X	$P(X \cap Y)$	$P(X \cap Y^C)$	$P(X)$
X^C	$P(X^C \cap Y)$	$P(X^C \cap Y^C)$	$P(X^C)$
Total	$P(Y)$	$P(Y^C)$	1

A diferencia del diagrama de árbol, esta tabla no incluye las probabilidades condicionales, sino que las probabilidades de intersecciones de los eventos de interés.

Una ventaja que tiene esta tabla es que puede usarse directamente para calcular todas las probabilidades condicionales usando la definición. Por ejemplo,

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} \quad \text{y} \quad P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} .$$

Comentarios

- Las tablas de contingencia son útiles para ordenar la información de problemas de probabilidades, ya que permiten visualizar de forma rápida las probabilidades de la intersección de eventos y sus probabilidades totales, además del cálculo de las probabilidades condicionales.
- Cuando se enseña probabilidad condicional es importante que los estudiantes se familiaricen con distintas representaciones (diagrama de árbol y tabla de contingencia), ya que fomentan la comprensión de algunos conceptos y sus propiedades.

Ubicación: Módulo 2

Taller 4 : Probabilidad condicional
Actividad: Probabilidades totales y teorema de Bayes

TALLER 4:
PROBABILIDAD CONDICIONAL

12. Implicancias de los falsos positivos y falsos negativos

Una de las aplicaciones más usuales de la probabilidad condicional se relaciona con pruebas o test, en los que aparecen dos conceptos que podemos definir y que tienen una interpretación específica en cada contexto:

- ***Falso positivo:*** Corresponde a la situación de que un test dé positivo cuando lo que detecta no está presente.

- ***Falso negativo:*** Corresponde a la situación de que un test dé negativo cuando lo que detecta sí está presente.

Dependiendo de la situación que se esté analizando, la implicancia de cada uno de estos términos es distinta. Por ejemplo, si se estudia la presencia de una bacteria en el agua, el caso de falso negativo puede ser letal si el agua contaminada es consumida, mientras que un falso positivo podría implicar el desperdicio del recurso hídrico.

Otro caso, se podría presentar en el contexto de una enfermedad: un falso positivo puede implicar un estrés innecesario en el paciente o que reciba un tratamiento que no es necesario, mientras que un falso negativo puede ser letal, ya que implica que el paciente no sea tratado.

Comentarios

- El hecho de que la probabilidad de los falsos positivos y los falsos negativos sean bajas, no necesariamente asegura obtener resultados confiables en el test.

- Cuando la probabilidad del evento que detecta el test es baja, ocurre una situación particular con los falsos negativos. Por ejemplo, si la probabilidad de presentar una enfermedad disminuye, ocurre que la probabilidad de un falso negativo aumenta.

Ubicación: Módulo 2

Taller 4 : Probabilidad condicional
Actividad: Probabilidades totales y teorema de Bayes

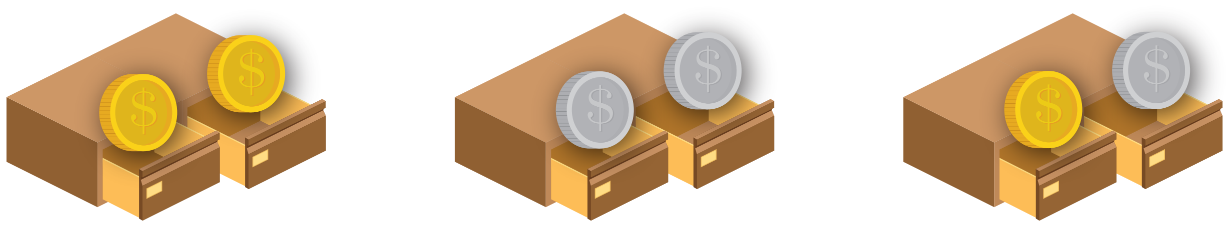
TALLER 4:
PROBABILIDAD CONDICIONAL

13. Paradoja de la caja de Bertrand

Los problemas que se expusieron en este taller, como el "Juego de las tarjetas" y las variantes de "Los hijos de Joaquín", son distintas versiones de un problema formulado en el año 1888, conocido como la "Paradoja de la caja de Bertrand".

Paradoja de la caja de Bertrand

Tenemos tres cajas y cada caja cuenta con dos compartimentos con una moneda cada uno: una caja contiene dos monedas de oro, otra caja dos monedas de plata, y la caja final una de cada tipo. Después de elegir una caja al azar se abre un compartimento al azar, y resulta que contiene una moneda de oro. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra también sea una moneda de oro?



Bertrand, J. (1888). Calcul des probabilités. Paris (Francia): Gauthier Villars.

En la literatura, el estudio de este tipo de problemas en contextos de enseñanza ha sido ampliamente investigado, ya que ayudan a construir un aprendizaje profundo de la probabilidad a partir de creencias previas (Lesser, 1998). Además, permiten motivar y reflexionar sobre la presencia del azar en su vida cotidiana (Batanero et al., 2012).

Sin embargo, es importante considerar que su implementación en el aula debe ser planificada pensando en el nivel de dificultad de los contenidos que se quieren enseñar para así crear una secuencia de aprendizajes coherente, en la que los estudiantes se enfrenten a distintos tipos de situaciones de manera progresiva.

Comentarios

- Para profundizar en este tema puedes visitar las siguientes referencias en español:
  Batanero, Carmen & Contreras, Miguel & Cañadas, Gustavo & Gea, Maria. (2012). Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de probabilidad. Novedades educativas. 261. 78-84.
  https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Novedades_Batanero.pdf

- Referencias en otros idiomas:
  Lesser, Larry. (1998). Countering Indifference Using Counterintuitive Examples. Teaching Statistics. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/j.1467-9639.1998.tb00750.x

Ubicación: Módulo 2

Taller 4 : Probabilidad condicional
Actividad: Modificando y formulando problemas para el aula

TALLER 4:
PROBABILIDAD CONDICIONAL

14. Tabla de contingencia en la construcción de problemas

Construir una tabla de contingencia contribuye a organizar los datos entregados en un problema de probabilidad condicional. También propicia comprender e identificar qué tipo de preguntas podemos formular a partir de cierta información. Por ejemplo, la siguiente tabla de contingencia muestra la información que se extrae del siguiente enunciado: “El 25% de los estudiantes de un establecimiento no poseen cuenta de Facebook ni de Instagram, mientras que el 60% de los estudiantes tienen cuenta de Instagram”.

	Tener cuenta de Facebook	No tener cuenta de Facebook	
Tener cuenta de Instagram	---	---	60%
No tener cuenta de Instagram	15%	25%	40%
	---	---	100%

A partir de la tabla de contingencia podemos ver que no se puede pedir a los estudiantes que calculen probabilidades condicionadas a los eventos “No tener cuenta de de Facebook” o “Tener cuenta de Facebook”, ya que no se cuenta con información sobre ellos. Por ejemplo, una pregunta que no puede ser respondida con los datos del enunciado es *“¿cuál es la probabilidad de que un estudiante posea cuenta de Instagram dado que no tiene cuenta de Facebook?”*.

Ubicación: Módulo 2

Taller 4 : Probabilidad condicional
Actividad: Modificando y formulando problemas para el aula

TALLER 4:
PROBABILIDAD CONDICIONAL

15. Criterio para formular problemas

Formular problemas es una tarea compleja que requiere no solo un conocimiento matemático profundo, sino que también establecer criterios para graduar su nivel de dificultad.

Una manera de evaluar el nivel de dificultad en los problemas de probabilidad condicional es representar los eventos en un diagrama de árbol o tabla y escoger qué probabilidades serán entregadas como datos. Esto es:

- Si los datos proporcionados permiten completar la tabla de contingencia o las ramas del diagrama de árbol, los cálculos de las probabilidades involucradas serán realizados de manera directa.

- En cambio, si no es posible completar la información de la tabla de contingencia o el diagrama de árbol, se necesitarán datos adicionales para que el problema tenga solución. Esto hará que los cálculos sean menos directos y que, incluso, puedan requerir del uso de propiedades como Bayes o probabilidades totales, o manejo algebraico.

Ubicación: Módulo 2

Taller 4 : Probabilidad condicional
Actividad: Modificando y formulando problemas para el aula