SUMA Y SIGUE

MATEMÁTICA EN LÍNEA

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

fcfm
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

CMM
Centro de Modelamiento Matemático

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

FICHAS TALLER 1:
NOCIONES DE PROBABILIDAD

INTRODUCCIÓN

En este taller se buscó abordar conceptos esenciales para el trabajo con la probabilidad, tanto desde el enfoque frecuentista como desde el enfoque clásico. Para este último, se tomó como base el conocimiento de la regla de Laplace.

Las fichas que conforman este apartado contemplan los siguientes contenidos disciplinares:

- Experimento aleatorio
- Estimación de la probabilidad
- Ley de los grandes números
- Espacio muestral equiprobable y no equiprobable
- Evento $A \cup B$ y evento $A \cap B$
- Complemento de un evento
- Axiomas de la probabilidad
- Relación entre la frecuencia relativa y axiomas de probabilidad
- Propiedad de la probabilidad del complemento
- Propiedad de la probabilidad del evento $A \cup B$
- Evento $E \setminus F$
- Propiedad de la probabilidad del evento $A \cap B$
- Probabilidad de una región en el plano
- Sesgo de equiprobabilidad

Por otro lado, a lo largo del taller destacamos algunos aspectos pedagógicos que permitirán mejorar la enseñanza de las nociones básicas de la probabilidad. En este material también encontrarás fichas que contemplan dichos aspectos.

TALLER 1:
NOCIONES DE PROBABILIDAD

1. Experimento aleatorio

Cuando hablamos de **experimento aleatorio**, nos referimos a cualquier situación o proceso que tiene como fin registrar observaciones sobre algún fenómeno de interés que, al ser repetido bajo las mismas condiciones, puede producir resultados distintos. Dicho de otra forma, no hay manera de predecir qué resultado se obtendrá.

Un experimento aleatorio generalmente se asocia solo a la situación o proceso que genera estos resultados, pero suele involucrar otros dos componentes: lo que se quiere observar y registrar al concluir el experimento, y los fenómenos cuya probabilidad nos interesa. Por ejemplo:

Experimento	Observación registrada	Fenómeno de interés
Lanzar dos dados.	La suma de los dos valores de los dados.	Ganar en un juego de dados sacando una suma superior a siete.
Recorrer cierto trayecto en transporte público.	El tiempo que me demoro en el trayecto.	Llegar puntualmente a clases.

Comentarios

- Hay experimentos aleatorios en los cuales es complejo asegurar que se mantendrán las mismas condiciones cuando se repita. Si los cambios afectan esencialmente las probabilidades de sus resultados, entonces la repetición del experimento aleatorio no es válida.
- En general, en los experimentos relacionados con dados, monedas, bolitas, etc., es sencillo reproducir las mismas condiciones en las diferentes repeticiones, por lo que los estudiantes podrían repetir muchas veces el experimento y analizar las frecuencias de sus resultados.

Ubicación: Módulo 1

Taller: Nociones de la probabilidad
Actividad: 2. Realizando un experimento aleatorio

2. Ley de los grandes números

Apoyándonos en la ley de los grandes números, es posible estimar la probabilidad p de un evento de un experimento aleatorio repitiéndolo muchas veces y considerando las frecuencias relativas de este evento.

En palabras sencillas, esta ley nos dice que a medida que aumentamos el número de repeticiones del experimento, la probabilidad de que la frecuencia relativa se aleje sustancialmente de p se hace más y más pequeña.

Comentarios

- Es una creencia habitual entre estudiantes asumir que el valor de la probabilidad del evento se debe ver reflejado en las frecuencias de los resultados en cualquier número de repeticiones porque no tienen en cuenta que la variabilidad es más alta en muestras pequeñas.
- Cuando se estima la probabilidad usando frecuencias relativas, es importante generar instancias en las que los estudiantes puedan darse cuenta de esta idea errada.

Ubicación: Módulo 1

Taller: Nociones de la probabilidad
Actividad: 2. Realizando un experimento aleatorio

TALLER 1:
NOCIONES DE PROBABILIDAD

3. Espacio muestral

Un **espacio muestral** asociado a un experimento aleatorio es el conjunto de todos los resultados que se podrían obtener según la observación de interés.

Por ejemplo:
- Al experimento de lanzar una moneda le podemos asociar el espacio muestral {cara, sello}.
- Al experimento de lanzar un dado le podemos asociar el espacio muestral {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

A un conjunto cualquiera de resultados posibles de un experimento aleatorio le llamaremos **evento** o suceso. Dicho de otra forma, un evento es cualquier subconjunto del espacio muestral. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado son eventos los siguientes subconjuntos:
- {5}, que corresponde a “obtener un 5”.
- {2, 4, 6}, que corresponde a “obtener un par”.
- {5, 6}, que corresponde a “obtener un número mayor que 4”.
- {1,2,3,4,5,6} que corresponde a “obtener un número del dado al lanzarlo”, es decir, corresponde a la colección de todos los resultados posibles.

Al realizar un experimento aleatorio, decimos que un evento A **ocurre** cuando el resultado obtenido es un elemento de A.

Comentarios

- El conjunto ø = { }, que corresponde a un conjunto sin elementos, también es un evento. Este evento no se asocia a la ocurrencia de algún resultado posible de un experimento aleatorio, sino que más bien se define como evento porque es un subconjunto posible del espacio muestral.

Ubicación: Módulo 1

Taller: Nociones de la probabilidad
Actividad: 3. Enfoque clásico

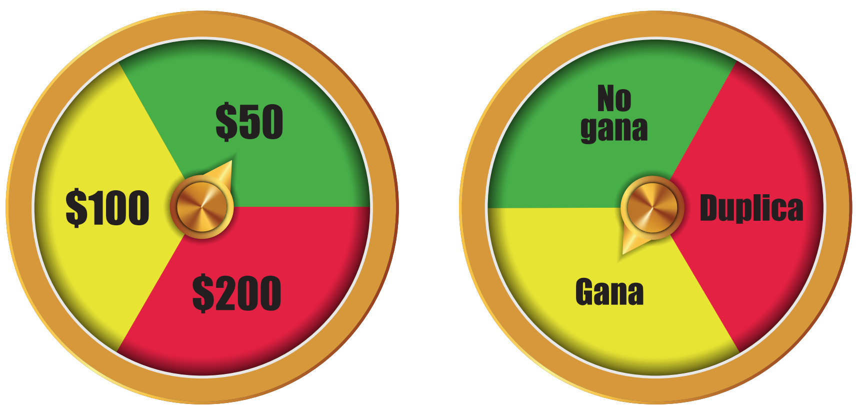
TALLER 1:
NOCIONES DE PROBABILIDAD

4. Observaciones de un fenómeno

Al estudiar un fenómeno asociado a un experimento aleatorio, debemos elegir una observación que sea pertinente a él. En algunos casos, es posible que haya más de una, por lo que también habrá más de un espacio muestral asociado al experimento.

Por ejemplo, en el juego en el que se giran dos ruletas de manera consecutiva, donde:

- la primera ruleta indica el monto de dinero que se pondrá en juego.
- la segunda ruleta decide si la persona se lleva ese monto (Gana), recibe el doble de dinero (Duplica) o no recibe ningún monto (No gana).



Se pueden realizar distintas observaciones, como las siguientes:

- Registrar los montos finales que se pueden alcanzar, cuyo espacio muestral asociado es

  {$0, $50, $100, $200, $400},

- Registrar el resultado de ambas ruletas al mismo tiempo, cuyo espacio muestral generado sería

  {$50-No gana, $50-Gana, $50-Duplica, $100-No gana, $100-Gana, $100-Duplica, $200-No gana, $200-Gana, $200-Duplica}.

Se debe notar que ambos espacios muestrales nos permiten conocer el premio que se obtendrá después de girar las ruletas.

Ubicación: Módulo 1

Taller: Nociones de la probabilidad
Actividad: 3. Enfoque clásico

5. Espacio muestral equiprobable

Decimos que un espacio muestral es **equiprobable** cuando todos los resultados que lo conforman tienen la misma probabilidad de ocurrir. El hecho de que un espacio muestral sea equiprobable generalmente proviene de observar que no hay factores que privilegien la ocurrencia de unos resultados por sobre otros.

Ejemplos típicos de espacios muestrales equiprobables son el conjunto {1,2,3,4,5,6} en el lanzamiento de un dado y el conjunto {cara, sello} en el lanzamiento de una moneda.

Por otro lado, en el experimento aleatorio de extraer una bolita al azar de una bolsa que contiene 3 negras y 5 rojas, en el que interesa el color de la bolita extraída, el espacio muestral {negra, roja} no es equiprobable.

Ubicación: Módulo 1

Taller: Nociones de la probabilidad
Actividad: 3. Enfoque clásico

6. Espacio muestral equiprobable en el aula

Al trabajar el concepto de espacio muestral con los estudiantes, es importante que ellos:

- reconozcan distintos espacios muestrales a partir de diversas observaciones de un mismo experimento aleatorio.

- identifiquen espacios muestrales equiprobables y no equiprobables.

Este trabajo les ayudará desarrollar la intuición para distinguir situaciones en las que es y no es aplicable la regla de Laplace.

Para visualizar en el aula un espacio muestral no equiprobable, se puede trabajar con una simulación del experimento y observar la frecuencia relativa de sus resultados después de varias repeticiones. Esto permitirá que los estudiantes tengan evidencia de que el espacio muestral no es equiprobable al observar claras disparidades entre las frecuencias.

Por el contrario, para visualizar que un espacio muestral es equiprobable, no basta con utilizar una simulación, ya que esta solo entrega aproximaciones de la probabilidad asociada a cada uno de los resultados. Por esta razón, si al realizar la simulación se obtienen frecuencias relativas muy cercanas, esto no es una evidencia suficiente para asegurar que el espacio muestral es equiprobable.

Comentarios

- Los espacios muestrales se suelen construir a partir del contexto del experimento que considera, por lo que su equiprobabilidad, en general, se justifica mediante argumentos provenientes de dicho contexto, tales como simetrías presentes.

Ubicación: Módulo 1

Taller: Nociones de la probabilidad
Actividad: 3. Enfoque clásico

TALLER 1:
NOCIONES DE PROBABILIDAD

7. Regla de Laplace

Cuando se tiene un **espacio muestral equiprobable** con n resultados, la regla de Laplace nos dice que la probabilidad de un evento que tiene asociado k resultados favorables es igual a $\frac{k}{n}$.

Comúnmente, vemos lo anterior formulado de la siguiente manera:

$$\textbf{Probabilidad del evento} = \frac{\textbf{Número de resultados favorables al evento}}{\textbf{Número de resultados posibles}}$$

Comentarios

- A cada resultado posible de un experimento aleatorio también se le llama caso, por lo que en algunas ocasiones, la regla de Laplace se puede enunciar usando esta palabra.

Ubicación: Módulo 1

Taller: Nociones de la probabilidad
Actividad: 3. Enfoque clásico

8. Diferenciación de objetos indistinguibles de un mismo experimento

Diferenciar objetos indistinguibles en un mismo experimento **facilita el análisis de los resultados** del espacio muestral y, además, permite encontrar espacios muestrales equiprobables que son necesarios para usar la regla de Laplace.

Por ejemplo, si se tiene una bolsa con dos bolitas rojas y una bolita azul e interesa observar el color de dos bolitas extraídas al azar, se puede definir el espacio muestral {●●, ●●}, el cual no es equiprobable.

Por otro lado, al distinguir cada una de las bolitas rojas, se puede encontrar el espacio muestral {R1 ●, R2 ●, R1 R2}, el cual es equiprobable.

Comentarios

- Se debe notar que para un mismo experimento puede haber distintos espacios muestrales, siendo algunos de ellos equiprobables y otros no.

Ubicación: Módulo 1

Taller: Nociones de la probabilidad
Actividad: 3. Enfoque clásico

9. Evento AUB

Dado el evento A y el evento B, decimos que ocurre el **evento A U B** cuando sucede al menos uno de ellos, esto es, solo A, solo B, o bien, ambos a la vez.

Por ejemplo, consideremos el experimento de girar la ruleta y ganar con amarillo o azul.

A = “Obtener azul”
B = “Obtener amarillo”

Luego, el evento “Ganar” corresponde a A U B.

Observemos que en este ejemplo en particular, los eventos A y B no pueden ocurrir simultáneamente. Veamos un ejemplo distinto: si consideramos el experimento de lanzar un dado y definimos A como el evento “Obtener un número par” y B como el evento “Obtener un número mayor que 3”, entonces el evento A U B ocurre si se obtiene un 2, un 4, un 5 o un 6. En este ejemplo, A y B pueden ocurrir simultáneamente si se obtiene un 4 o un 6.

Comentarios

- Observemos que A U B es efectivamente un evento, ya que es un conjunto de los resultados posibles del experimento.

Ubicación: Módulo 1

Taller: Nociones de la probabilidad
Actividad: 4. Axiomas y propiedades de la probabilidad

TALLER 1:
NOCIONES DE PROBABILIDAD

10. Evento A∩B

Dado el evento A y el evento B, decimos que ocurre el **evento A ∩ B** cuando suceden A y B simultáneamente.

Por ejemplo, consideremos el experimento de lanzar dos dados y definamos el evento A como "Obtener una suma múltiplo de 5" y el evento B como "Obtener una suma par". En este caso, el evento A∩B corresponde a "La suma es 10".

Por otra parte, diremos que el evento A y el evento B son mutuamente excluyentes cuando no pueden ocurrir simultáneamente. En otras palabras, estos eventos no tienen resultados en común, por lo que A∩B corresponde al conjunto vacío, lo que se denota como A ∩ B = ø.

En el ejemplo anterior del experimento de lanzar dos dados, el evento A y el evento B definidos no son mutuamente excluyentes. En cambio, en el juego de la ruleta, los eventos A = "Obtener azul" y B = "Obtener amarillo" son mutuamente excluyentes.

Comentarios

- Observemos que A∩B es un evento, ya que corresponde a un conjunto de resultados.

Ubicación: Módulo 1

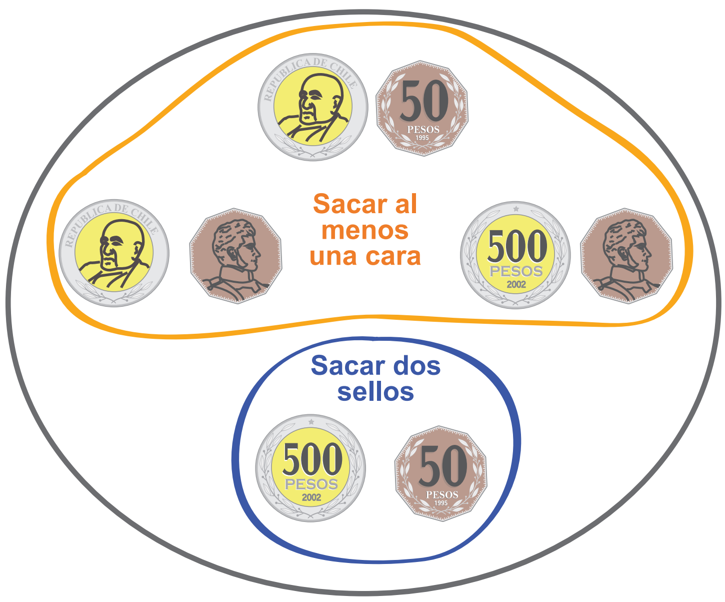
Taller: Nociones de la probabilidad
Actividad: 4. Axiomas y propiedades de la probabilidad

TALLER 1:
NOCIONES DE PROBABILIDAD

11. Complemento del evento A

Dado un evento A del espacio muestral, el **complemento de A**, denotado como A^c , corresponde al evento formado por todos los elementos del espacio muestral que no pertenecen a A.

Una manera natural de interpretar el evento A^c es pensar que este ocurre exactamente cuando el evento A no ocurre. Por ejemplo, si A es el evento “Sacar dos sellos al lanzar dos monedas”, entonces A^c ocurre cuando no se obtienen dos sellos, es decir, si se obtienen una o dos caras al lanzar las monedas. De esta forma, vemos que Ac es el evento “Sacar al menos una cara al lanzar dos monedas”.



Comentarios

- Notemos que el complemento de un evento es otro evento, ya que corresponde a un conjunto de elementos del espacio muestral. Además, observemos que los eventos A y A^c son mutuamente excluyentes.

Ubicación: Módulo 1

Taller: Nociones de la probabilidad
Actividad: 4. Axiomas y propiedades de la probabilidad

12. Axiomas fundamentales de la asignación de probabilidad

La teoría de la probabilidad define tres propiedades (axiomas) fundamentales que debe satisfacer toda asignación de probabilidad que demos a los eventos. Al cumplirse los axiomas, es posible derivar otras propiedades a través de razonamiento deductivo. A continuación presentaremos una versión simplificada de ellos que es suficiente para entender las ideas fundamentales de la probabilidad y derivar otras propiedades.

Si Ω representa un espacio muestral finito o infinito, entonces cualquier asignación de probabilidades debe satisfacer:

Axioma 1: $P(\Omega) = 1$,

Axioma 2: $P(E) \geq 0$, donde E es cualquier evento.

Axioma 3: Cuando los eventos E y F son mutuamente excluyentes, deben cumplir que
$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$

Estos axiomas son consistentes con las asignaciones de probabilidad que hemos estudiado hasta ahora, esto es, la regla de Laplace y la estimación a través de la frecuencia relativa.

Comentarios

- Una de las consecuencias de los axiomas es que $P(\emptyset) = 0$.
- Se debe notar que cualquier propiedad que se derive exclusivamente de estos axiomas se puede aplicar para cualquier espacio muestral, incluso si este no es equiprobable.

Ubicación: Módulo 1

Taller: Nociones de la probabilidad
Actividad: 4. Axiomas y propiedades de la probabilidad

TALLER 1:
NOCIONES DE PROBABILIDAD

13. Frecuencia relativa y axiomas de probabilidad

La frecuencia relativa satisface los axiomas de probabilidad, es decir:

- Las frecuencias relativas de todos los resultados de un experimento aleatorio suman 1.
- La frecuencia relativa de un evento es un valor mayor o igual que 0.
- Si el evento A y el evento B son mutuamente excluyentes, entonces se cumple que: Frecuencia relativa de A U B = Frecuencia relativa de A + Frecuencia relativa de B.

Comentarios

- Se debe recordar que la frecuencia relativa de un evento es la suma de las frecuencias relativas de sus resultados.

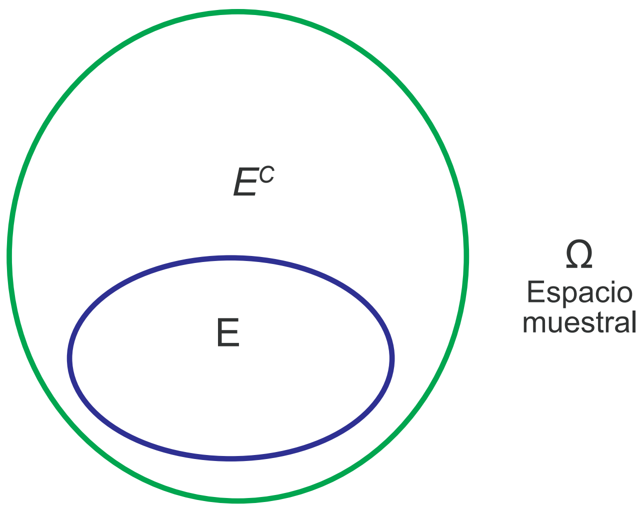
Ubicación: Módulo 1

Taller: Nociones de la probabilidad
Actividad: 4. Axiomas y propiedades de la probabilidad

14. Propiedad del complemento

Dado cualquier evento E, siempre se tiene que P(E) + P(E^c) = 1. Esta propiedad se conoce, generalmente, como propiedad del complemento.

Se deduce al observar que $E \cap E^c = \emptyset$, y que al juntarlos resultados de E y de E^c ,se obtiene todo el espacio muestral, es decir, $E \cup E^c = \Omega$.



Comentarios

- En ocasiones no es eficiente calcular la probabilidad de ocurrencia de un evento mediante la regla de Laplace, pues puede resultar engorroso encontrar todos los casos favorables. Entonces, puede ser conveniente considerar otras estrategias, como por ejemplo, calcular la probabilidad del complemento del evento de interés.

Ubicación: Módulo 1

Taller: Nociones de la probabilidad
Actividad: 4. Axiomas y propiedades de la probabilidad

15. Probabilidad del evento AUB

Para dos eventos A y B cualesquiera, se cumple la siguiente propiedad:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Esta propiedad generaliza el Axioma 3, pues no tiene como hipótesis que A y B sean mutuamente excluyentes. Pero en caso de que lo sean, $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$, por lo que recuperamos la fórmula del Axioma 3.

Comentarios

- Para demostrar matemáticamente esta propiedad se reescribe el evento $A \cup B$ en términos de otros dos eventos que sí son mutuamente excluyentes.

Ubicación: Módulo 1

Taller: Nociones de la probabilidad
Actividad: 4. Axiomas y propiedades de la probabilidad

TALLER 1:
NOCIONES DE PROBABILIDAD

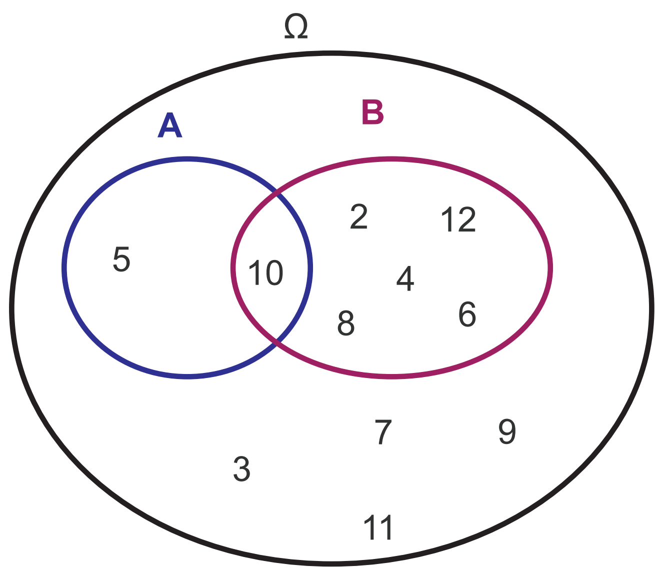
16. Evento E\F

Dados dos eventos E y F, denotamos por E\F al evento que contiene a los resultados que pertenecen a E, pero no a F. En términos de conjuntos, tenemos que $E \setminus F = E \cap F^C$.

Por ejemplo, en el experimento de lanzar dos dados, consideremos los siguientes dos eventos:

E = "Obtener una suma múltiplo de 5"
F = "Obtener una suma par"

Estos eventos tienen resultados en común, y el evento E\F corresponde a "Obtener una suma igual a 5".



Comentarios

- Observemos que para cualquier par de eventos E y F se tiene que $E \setminus F = E \cap F^C$ y efectivamente es un evento, ya que corresponde a la intersección de dos eventos.
- En ocasiones el evento E\F se denota como E - F

Ubicación: Módulo 1

Taller: Nociones de la probabilidad
Actividad: 4. Axiomas y propiedades de la probabilidad

TALLER 1:
NOCIONES DE PROBABILIDAD

17. Probabilidad de una región plana de área finita

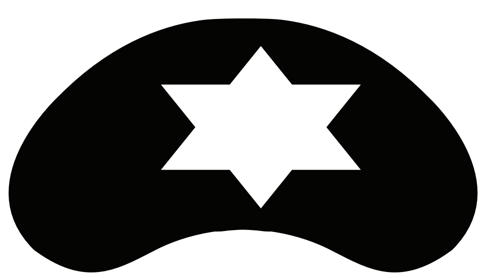
Cuando tenemos un espacio muestral dado por una región plana de área finita, los eventos correspondientes serán subregiones. Si R denota una subregión, entonces una forma de asignar probabilidad a este evento está dada por:

$$P(R) = \frac{\textit{área de R}}{\textit{área de la región plana finita}}$$

Esta es la única asignación con la propiedad de ser invariante ante traslaciones y rotaciones de la región R, es decir, si trasladamos o rotamos R, la probabilidad de la región se mantiene. En este sentido, es un análogo a un espacio equiprobable cuando hay infinitos resultados, y es conocida como probabilidad uniforme.

Comentarios

- Podemos pensar la probabilidad de una región R como la probabilidad de que un dardo caiga en una región R de un tablero. Esta probabilidad corresponde al cociente entre el área del sector favorable (región R) y el área total del tablero. Esto también puede ser aplicado a regiones con otras formas geométricas, como la siguiente:

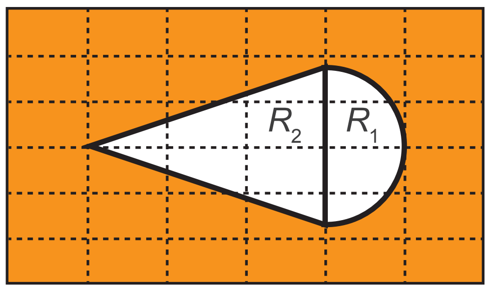


Ubicación: Módulo 1

Taller: Nociones de la probabilidad
Actividad: 4. Axiomas y propiedades de la probabilidad

18. Probabilidad de $R_1 \cup R_2$ cuando $R_1 \cap R_2$ es una línea o punto

Observemos que al juntar dos regiones R_1 y R_2, estas se podrían intersectar en una línea o en un punto, como lo que ocurre cuando se juntan las siguientes regiones R_1 y R_2:



¿Cuál es el área de la intersección entre R_1 y R_2, o de una línea en general? Podemos imaginarnos que una línea corresponde a un rectángulo de ancho igual a cero, por lo que su área también es cero. Un punto tiene área igual a cero por una razón similar.

En el ejemplo, tendríamos que $P(R_1 \cap R_2) = 0$ y por lo tanto:

$$P(R_1 \cup R_2) = P(R_1) + P(R_2) - P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) + P(R_2).$$

Ubicación: Módulo 1

Taller: Nociones de la probabilidad
Actividad: 4. Axiomas y propiedades de la probabilidad

TALLER 1:
NOCIONES DE PROBABILIDAD

19. Sesgo de equiprobabilidad

Cuando los estudiantes se enfrentan a problemas de probabilidad, es común que tiendan a responder basados en ideas intuitivas que de manera natural han desarrollado sobre la incerteza y la aleatoriedad.

Algunas de estas intuiciones inducen a creencias erróneas sobre la probabilidad. Una de ellas es la que se conoce en la literatura especializada como "sesgo de equiprobabilidad" (Lecoutre 1992; Cardeñozo *et al.*, 2017), que se caracteriza por asumir que en cualquier experimento aleatorio, todos los sucesos asociados con él tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Comentarios

Para profundizar en este tema puedes visitar las siguientes referencias en español:

- https://www.aiem.es/index.php/aiem/article/view/185
- https://www.researchgate.net/publication/282281111_Influencia_de_la_Edad_y_Rendimiento_Matematico_Sobre_el_Sesgo_de_Equiprobabilidad_Influence_of_Age_and_Mathematical_Achievement_on_Equiprobability_Bias_p_99-118

Para referencias en otros idiomas, puedes visitar:

- https://www.researchgate.net/profile/Marie-Paule_Lecoutre/publication/226075396_Cognitive_models_and_problem_spaces_in_purely_random_situations/links/540358160cf2c48563b02c73/Cognitive-models-and-problem-spaces-in-purely-random-situations.pdf

Ubicación: Módulo 1

Taller: Nociones de la probabilidad
Actividad: Sesgo de equiprobabilidad

TALLER 1:
NOCIONES DE PROBABILIDAD

20. Manifestaciones del sesgo de equiprobabilidad

Una de las intuiciones que originan el sesgo de equiprobabilidad consiste en asociar indebidamente la noción de aleatoriedad con la de equiprobabilidad (Batanero, 2009). Esto es, asumir que la equiprobabilidad es una característica inherente a todo fenómeno aleatorio.

Esto se manifiesta en argumentos del tipo “Da lo mismo, es el azar a fin de cuentas” o “Aunque la bolsa tenga más bolitas rojas que negras, es la suerte la que decide la que saldrá”.

Comentarios

- El sesgo de equiprobabilidad dificulta la comprensión de los fenómenos aleatorios, así como también la cuantificación de la probabilidad. Si esta idea persiste, entonces puede impedir el avance de los estudiantes en el aprendizaje en otros ámbitos de la probabilidad. Por lo tanto, es importante abordar y corregir esta creencia en el aula.

Para profundizar en este tema puedes visitar:

- https://www.researchgate.net/publication/282281111_Influencia_de_la_Edad_y_Rendimiento_Matematico_Sobre_el_Sesgo_de_Equiprobabilidad_Influence_of_Age_and_Mathematical_Achievement_on_Equiprobability_Bias_p_99-118

Ubicación: Módulo 1

Taller: Nociones de la probabilidad
Actividad: Sesgo de equiprobabilidad

21. Sesgo de equiprobabilidad en el aula

Una de las causas que podrían provocar que los estudiantes no sean conscientes del sesgo de equiprobabilidad, tiene relación con la limitada exposición a situaciones aleatorias diversas que les ayudarían a contrastar y corregir sus ideas erróneas. Esto a diferencia de lo que ocurre con otras áreas de la matemática, como la Geometría o la Aritmética, en las que existen experiencias cotidianas que ayudan a desarrollar intuiciones correctas sobre los conceptos matemáticos. En cambio, en probabilidad, el sesgo de equiprobabilidad se manifiesta desde que se inicia el estudio de esta área.

Si las experiencias que tienen en la escolaridad se relacionan exclusivamente con experimentos aleatorios en los que se obtienen resultados equiprobables (lanzamiento de una moneda o de un dado), se refuerza la idea errónea de que lo equiprobable es inherente a lo aleatorio.

Sumado a lo anterior, la enseñanza de la regla de Laplace explicada como una “receta” (número de casos favorables dividido por número de casos posibles), no enfatiza la necesidad de evaluar si el espacio muestral utilizado es equiprobable, lo que constituye un obstáculo para el análisis de los estudiantes respecto de sucesos no equiprobables.

Ubicación: Módulo 1

Taller: Nociones de la probabilidad
Actividad: Sesgo de equiprobabilidad

22. Orientaciones para trabajar el sesgo de equiprobabilidad en el aula

Abordar y superar creencias sobre la probabilidad, en particular la del sesgo de equiprobabilidad, requiere la elección de tareas matemáticas adecuadas y de una gestión eficaz. Una posible secuencia didáctica para trabajar el sesgo de equiprobabilidad es la siguiente:

1°	**Seleccionar** una tarea matemática que permita hacer explícitas las distintas ideas de los estudiantes para reconocer los errores que se deben abordar.
2°	Indagar en el pensamiento de los estudiantes para **identificar** las ideas erróneas y sus posibles causas.
3°	Asegurarse de que los estudiantes con ideas erradas **cuestionen** su comprensión sobre el concepto a partir del contraste con otras ideas.
4°	Proporcionar un medio de **experimentación**, por ejemplo, una simulación, que permita a los estudiantes reconocer que sus ideas son erróneas, para avanzar hacia una comprensión correcta.

Ubicación: Módulo 1

Taller: Nociones de la probabilidad
Actividad: Sesgo de equiprobabilidad

TALLER 1:
NOCIONES DE PROBABILIDAD

23. Reflexión sobre la práctica docente

Reflexionar sobre la práctica docente es un aspecto clave para fortalecer la enseñanza. Para ello, puede ser útil descomponer las prácticas en acciones pedagógicas específicas, que puedan ser analizadas y trabajadas de manera intencionada. A continuación destacamos algunas acciones que son relevantes para el aprendizaje matemático:

Usar evidencias de aprendizaje: Para tomar decisiones pedagógicas acertadas, el profesor necesita obtener evidencias del aprendizaje que están alcanzando sus estudiantes, de modo de adecuar su enfoque de enseñanza, en caso de ser necesario.

Seleccionar tareas matemáticas pertinentes: La elección de la tarea es crucial para lograr los propósitos de aprendizaje. Tareas de alta demanda cognitiva basadas en resolución de problemas, ofrecen a los estudiantes mayores oportunidades para involucrarse en razonamientos matemáticos significativos.

Utilizar respuestas de manera estratégica: Hay respuestas de los estudiantes que revelan comprensiones sobre el contenido que son fundamentales abordar en la enseñanza. El profesor debe ser capaz de reconocer y utilizar de manera estratégica este tipo de respuestas para generar instancias de aprendizaje significativas.

No enfocar la discusión en las respuestas correctas: Es usual que las interacciones que se dan en el aula de matemática estén centradas solo en obtener y validar las respuestas correctas, omitiendo la exploración de respuestas incorrectas o de estrategias alternativas, que pueden generar instancias de discusión y aprendizaje entre los estudiantes.

Ubicación: Módulo 1

Taller: Nociones de la probabilidad
Actividad: El juego de los dardos