MAT CON

MATEMÁTICA CONECTADA

¿Por qué la tierra se percibe plana?

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

CMMEdu Laboratorio de Educación Centro de Modelamiento Matemático

Organización de las Naciones Unidas para la Educación la Ciencia y la Cultura · Cátedra UNESCO "Formación de Docentes para Enseñar Matemática en el Siglo XXI" Universidad de Chile

Ministerio de Educación Gobierno de Chile

Plan de Reactivación Educativa Seamos Comunidad

Revisemos la infografía de esta situación:

La forma de nuestro planeta

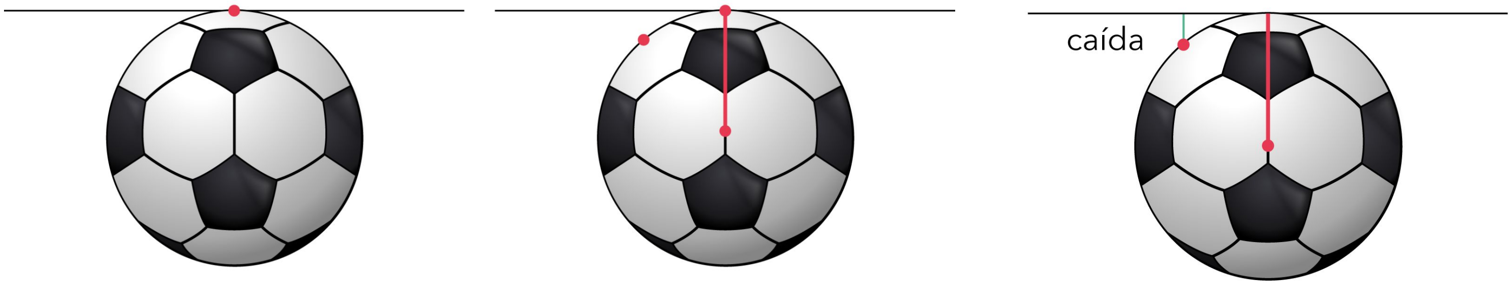
**Imagen referencial de la situación*

A partir del video, respondamos:

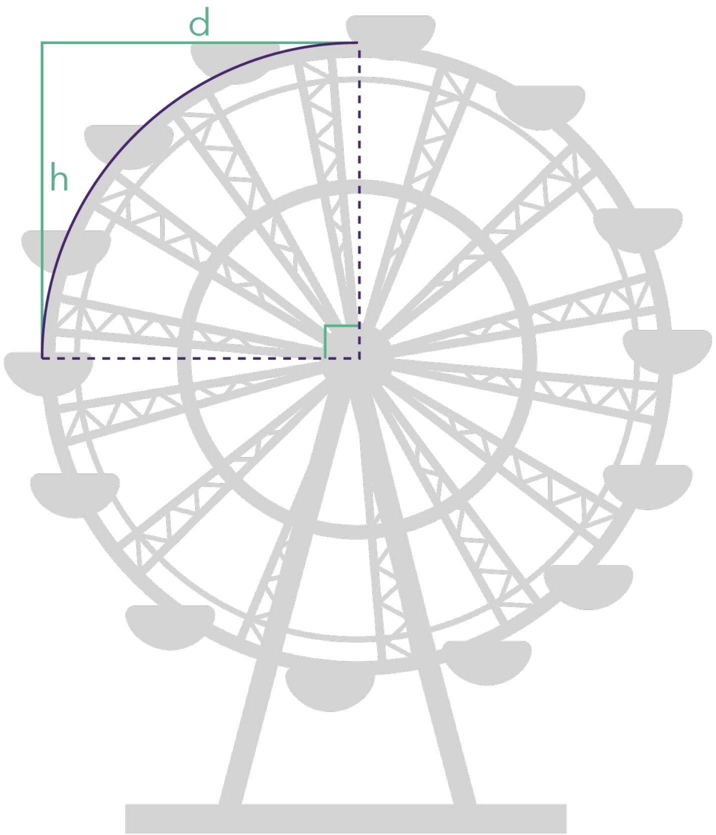
- A través de la historia, ¿cómo se ha comprobado que la tierra no es plana?
- Si la Tierra es esférica, ¿por qué la percibimos como si fuera plana?
- ¿Cómo podríamos probar este hecho?

Definamos el concepto de *caída*

Tomemos el punto más alto de la esfera (pelota, naranja, etc) y tracemos la tangente a ese punto. Al ser curva, si recorremos la pelota se produce una "**caída**" respecto a la tangente que corresponde a la distancia entre el punto final y la tangente.



Definamos el concepto de *caída*

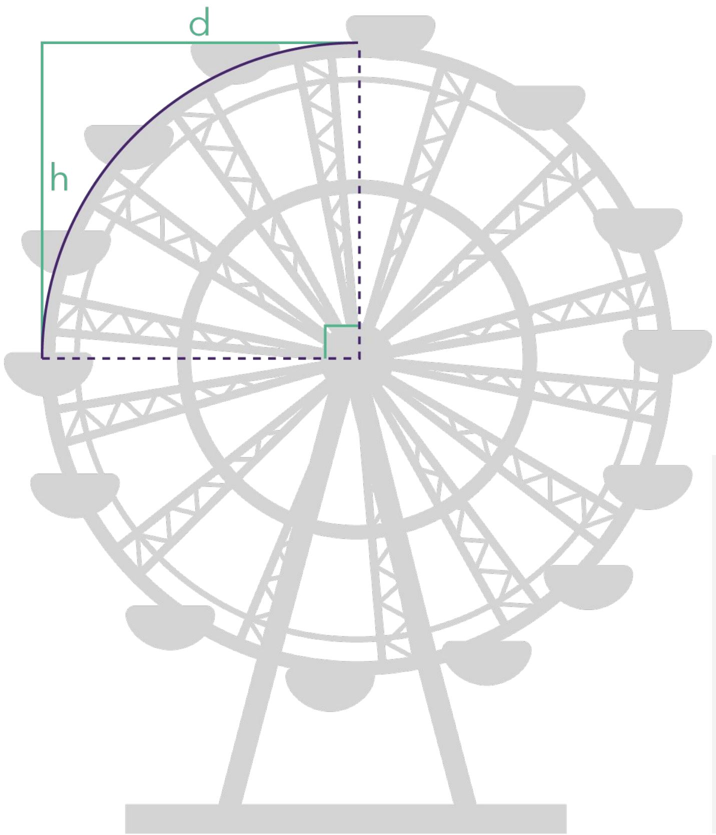


Consideren una rueda de la fortuna cuyo radio es de 60 m.

Suponiendo que estamos en el punto más alto y miramos en línea recta al horizonte (distancia d), el carro que está justo pasando por la mitad de la rueda define una caída (distancia h) también de 60 m.

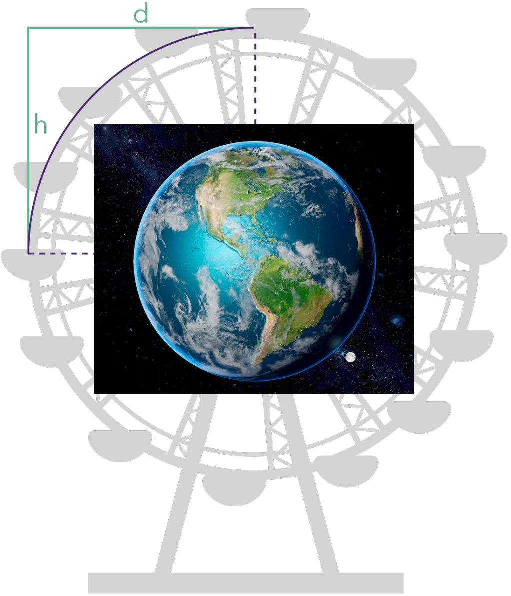
Es decir, esos 60 m representan el 100 % de la distancia d. Notemos que estos 60 m de altura, son fácilmente perceptibles por nosotros.

Definamos el concepto de *caída*

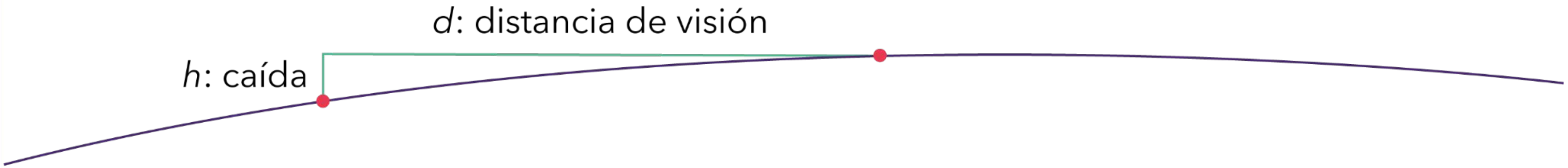


Pensemos ahora en la Tierra. ¿Cuál será la distancia d para la cual se obtiene una caída h igual a 60 m? En este caso, es posible demostrar que en la Tierra, cuando h = 60 m, entonces d es aproximadamente 28 km. Es decir, **para que ocurra una caída de 60 m en la Tierra la distancia d debe ser de 28 km.**

Definamos el concepto de *caída*



De hecho, si tomamos el cociente h/d obtenemos 0.06 km / 22 km ≈ 0,0027, es decir, la caída representa el 0,27% de la distancia d. Lo anterior da cuenta de que la caída de 60 m, que en el ejemplo de la rueda de la fortuna **era fácilmente perceptible, en el caso de la Tierra no percibimos la caída ya que se produce demasiado lejos, lo que se refleja que el cociente h/d tiene un valor muy cercano a cero.**



Presentación del problema

Se estudiará el comportamiento del cociente h/d para una variedad de distancias, incluidas las más cercanas al observador.

Actividad 1

MATCON
MATEMÁTICA CONECTADA

1. **Completa la siguiente tabla con los valores h/d.**

Distancia d (km)	Caída h (km)	Cociente h/d
4000	1414	
2000	322	
1000	79	
500	19	
250	5	
125	1	

Actividad 1

MAT CON
MATEMÁTICA CONECTADA

1. Completa la siguiente tabla con los valores h/d.

Distancia d (km)	Caída h (km)	Cociente h/d
4000	1414	
2000	322	
1000	79	
500	19	
250	5	
125	1	

Actividad 1

MAT CON
MATEMÁTICA CONECTADA

1. **Completa la siguiente tabla con los valores h/d.**

Distancia d (km)	Caída h (km)	Cociente h/d
4000	1414	0,3535
2000	322	0,161
1000	79	0,079
500	19	0,038
250	5	0,02
125	1	0,008

Actividad 1

MAT CON
MATEMÁTICA CONECTADA

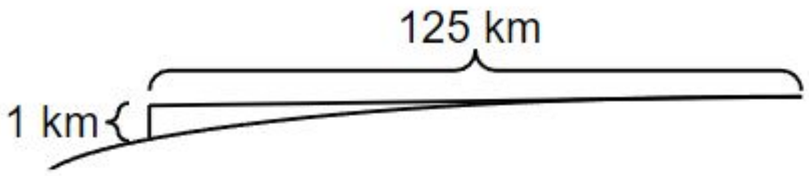
2. Interpreta los valores de la última fila de la tabla.

Distancia d (km)	Caída h (km)	Cociente h/d
4000	1414	0,3535
2000	322	0,161
1000	79	0,079
500	19	0,038
250	5	0,02
125	1	0,008

Actividad 1

2. Interpreta los valores de la última fila de la tabla.

Distancia d (km)	Caída h (km)	Cociente h/d
125	1	0,008



Si pudiéramos ver **125 km** hacia al horizonte, se aprecia una caída de **1 km**, por lo que no seríamos capaces de percibirla, pues la caída es muy pequeña en relación con esa distancia.

Actividad 2

MAT CON
MATEMÁTICA CONECTADA

1. ¿Qué pasa con h a medida que d decrece?

Distancia d (km)	Caída h (km)	Cociente h/d
4000	1414	0,3535
2000	322	0,161
1000	79	0,079
500	19	0,038
250	5	0,02
125	1	0,008

Actividad 2

1. **¿Qué pasa con h a medida que d decrece?**

Distancia d (km)	Caída h (km)	Cociente h/d
4000	1414	0,3535
2000	322	0,161
1000	79	0,079
500	19	0,038
250	5	0,02
125	1	0,008

A medida que ***d* decrece**, ***h* se acerca a cero**.

Actividad 2

MAT CON
MATEMÁTICA CONECTADA

2. ¿Cómo disminuye h en relación a d?

Distancia d (km)	Caída h (km)	Cociente h/d
4000	1414	0,3535
2000	322	0,161
1000	79	0,079
500	19	0,038
250	5	0,02
125	1	0,008

Actividad 2

MATCON
MATEMÁTICA CONECTADA

2. ¿Cómo disminuye h en relación a d?

Distancia d (km)	Caída h (km)	Cociente h/d
4000	1414	0,3535
2000	322	0,161
1000	79	0,079
500	19	0,038
250	5	0,02
125	1	0,008

A medida que ***d*** **va disminuyendo,** ***h*** **también disminuye,** pero a una **tasa más rápida**.

Actividad 2

3. ¿Qué observas respecto al cociente h/d a medida que d decrece?

Distancia d (km)	Caída h (km)	Cociente h/d
4000	1414	0,3535
2000	322	0,161
1000	79	0,079
500	19	0,038
250	5	0,02
125	1	0,008

Actividad 2

3. ¿Qué observas respecto al cociente h/d a medida que d decrece?

Distancia d (km)	Caída h (km)	Cociente h/d
4000	1414	0,3535
2000	322	0,161
1000	79	0,079
500	19	0,038
250	5	0,02
125	1	0,008

A medida que ***d* decrece**, ***h/d* va disminuyendo cada vez más,** por lo que pareciera **tender a cero.**

Actividad 2

4. ¿Qué conjetura podemos plantear para integrar todas las ideas anteriores por medio de un límite?

Distancia d (km)	Caída h (km)	Cociente h/d
4000	1414	0,3535
2000	322	0,161
1000	79	0,079
500	19	0,038
250	5	0,02
125	1	0,008

Actividad 2

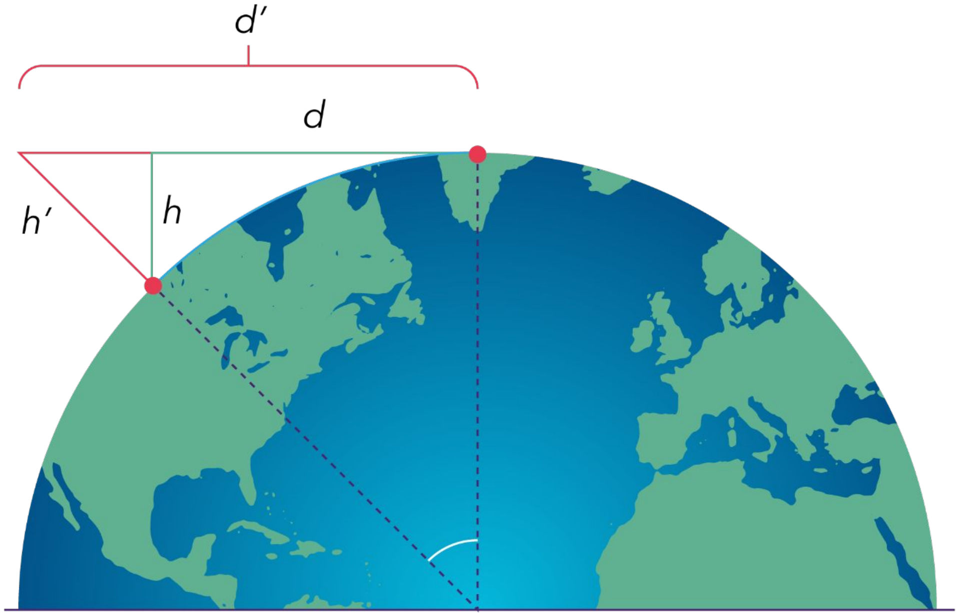
MATCON
MATEMÁTICA CONECTADA

4. ¿Qué conjetura podemos plantear para integrar todas las ideas anteriores por medio de un límite?

Distancia d (km)	Caída h (km)	Cociente h/d
4000	1414	0,3535
2000	322	0,161
1000	79	0,079
500	19	0,038
250	5	0,02
125	1	0,008

$$\lim_{d \to 0} \frac{h}{d} = 0$$

Usemos GeoGebra



- ¿Cuál es el valor de $\lim_{d \to 0} \frac{d'}{d}$?, ¿cómo interpretas ese valor?

- ¿Cuál es el valor de $\lim_{d \to 0} \frac{h}{h'}$?, ¿cómo interpretas ese valor?

- Considerando los límites anteriores, ¿qué podrías conjeturar respecto a los límites $\lim_{d \to 0} \frac{h}{d}$ y $\lim_{d' \to 0} \frac{h'}{d'}$?

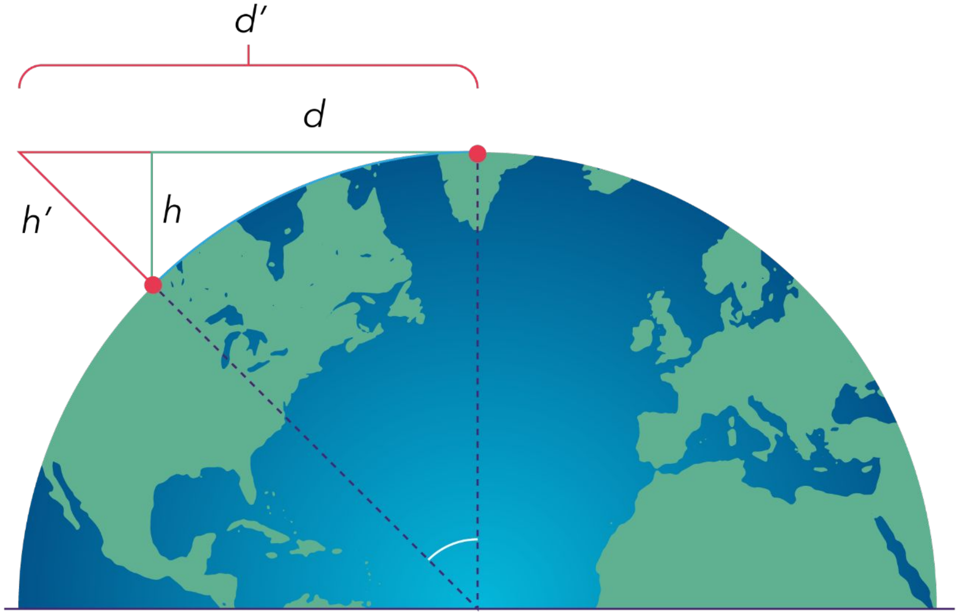
¿Por qué son iguales $\lim_{d \to 0} \frac{h}{d}$ y $\lim_{d' \to 0} \frac{h'}{d'}$?

$$\lim_{d \to 0} \frac{h}{d} = \lim_{d' \to 0} \frac{h}{h'} \cdot \frac{h'}{d'} \cdot \frac{d'}{d}$$

$$= 1 \cdot \lim_{d' \to 0} \frac{h'}{d'} \cdot 1 = \lim_{d' \to 0} \frac{h'}{d'}$$

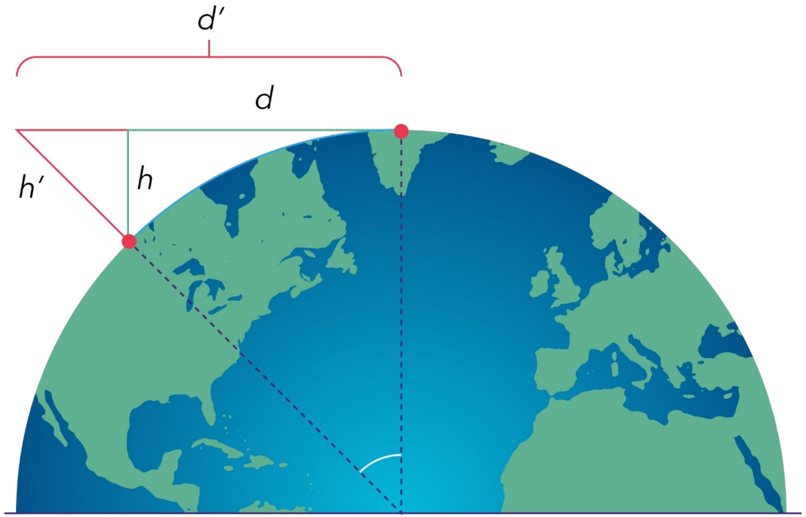
Actividad 3

1. Expresa *h'* en términos de *d'*.



Actividad 3

1. Expresa *h'* en términos de *d'*.

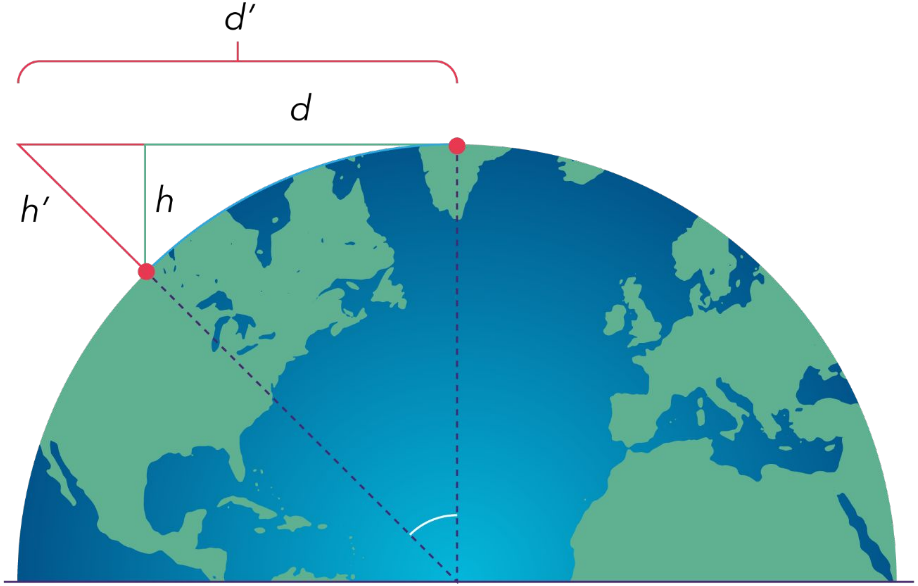


$$r^2 + d'^2 = (h' + r)^2$$

$$h' = -r + \sqrt{r^2 + d'^2}$$

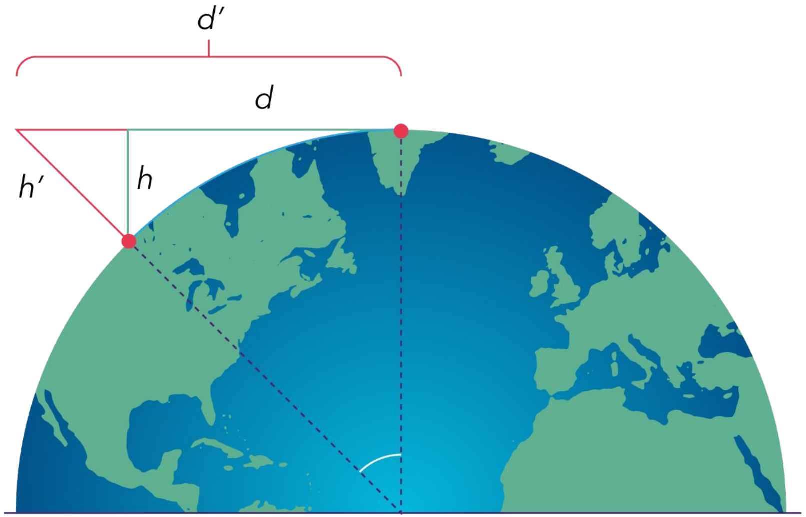
Actividad 3

2. Reescribe la expresión h'/d' en términos de la variable d'.



Actividad 3

2. Reescribe la expresión *h'/d'* en términos de la variable *d'*.



$$\frac{h'}{d'} = \frac{-r + \sqrt{r^2 + d'^2}}{d'}$$

Actividad 3

3. **Determina el límite de la expresión anterior cuando $d' \to 0$.**

Actividad 3

MAT CON
MATEMÁTICA CONECTADA

3. Determina el límite de la expresión anterior cuando *d’* → 0.

$$\lim_{d'\to 0} \frac{-r+\sqrt{r^2+d'^2}}{d'}$$

$$= \lim_{d'\to 0} \frac{-d'}{-r-\sqrt{r^2+d'^2}}$$

$$= 0$$

Actividad 3

4. **Interpreta el valor del** $\lim_{d' \to 0} \frac{h'}{d'}$ **en el contexto del problema de la clase.**

Actividad 3

4. Interpreta el valor del $\lim_{d' \to 0} \frac{h'}{d'}$ en el contexto del problema de la clase.

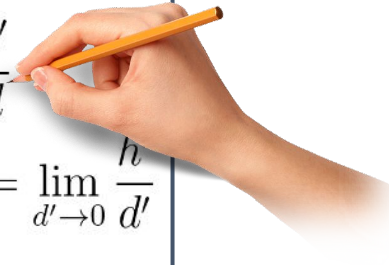
En distancias cortas, el cociente ***h/d* tiende a cero**, indicando que incluso **cuando *d* es muy pequeño, la caída *h* no es perceptible**.

Sistematización

- El trabajo inicial, mediante tablas, nos permitió **conjeturar sobre la existencia y valor de un límite mediante cálculos numéricos**.
- Luego, llevamos a cabo un **análisis algebraico** que nos permitió demostrar que efectivamente dicho límite era igual a cero.

Distancia d (km)	Caída h (km)	Cociente h/d
4000	1414	0,3535
2000	322	0,161
1000	79	0,079
500	19	0,038
250	5	0,02
125	1	0,008

$$\begin{aligned}\lim_{d\to 0}\frac{h}{d} &= \lim_{d'\to 0}\frac{h}{h'}\cdot\frac{h'}{d'}\cdot\frac{d'}{d}\\ &= 1\cdot\lim_{d'\to 0}\frac{h'}{d'}\cdot 1 = \lim_{d'\to 0}\frac{h}{d'}\end{aligned}$$



Sistematización

- Se obtuvo que ***h/d* tiende a cero** cuando *d* tiende a cero.
  Esto implica que *h* se hace mucho más pequeño que *d* en el límite.

Sistematización

- Para determinar el límite de $\lim_{d'\to 0} \frac{h'}{d'}$ fue necesario reescribir la expresión de forma equivalente, de forma de **quitar el cero en el denominador**. Esta es la estrategia más usada para calcular límites de la forma 0/0.

$$\frac{h'}{d'} \rightarrow \frac{-r+\sqrt{r^2+d'^2}}{d'}$$

Sistematización

- Además, para determinar el límite $\lim_{d \to 0} \frac{h}{d}$, recurrimos a un **cambio de variables**. En este contexto, resultó relevante observar que el límite del cociente entre dos variables era 1, indicando que esas dos variables son muy similares en el límite. Concretamente:

$$\lim_{d \to 0} \frac{h}{h'} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{d \to 0} \frac{d'}{d} = 1$$

MATEMÁTICA CONECTADA

¿Por qué la tierra se percibe plana?