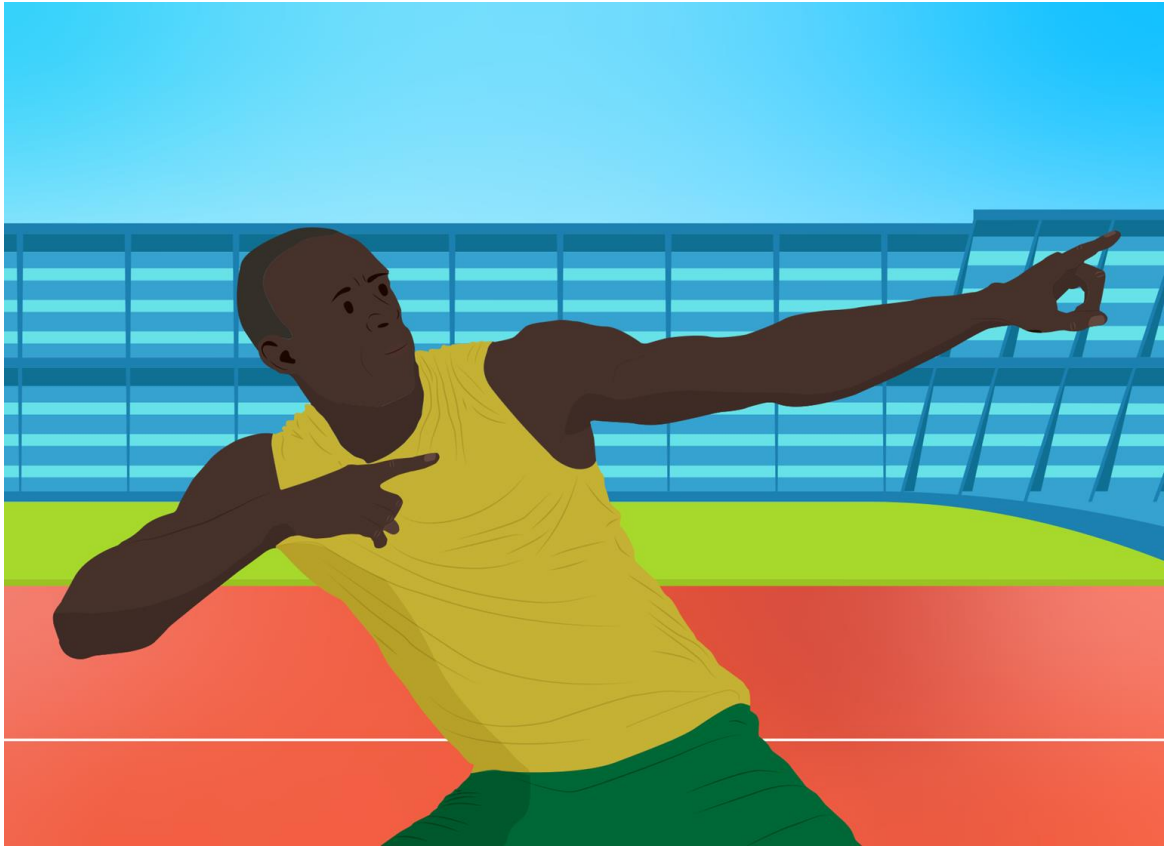
MAT CON
MATEMÁTICA CONECTADA

100 metros planos

fcfm
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE
CMMEdu
Laboratorio de Educación
Centro de Modelamiento Matemático
Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura
Cátedra UNESCO Formación de Docentes para Enseñar Matemática en el Siglo XXI Universidad de Chile
Ministerio de Educación
PLAN DE REACTIVACIÓN EDUCATIVA

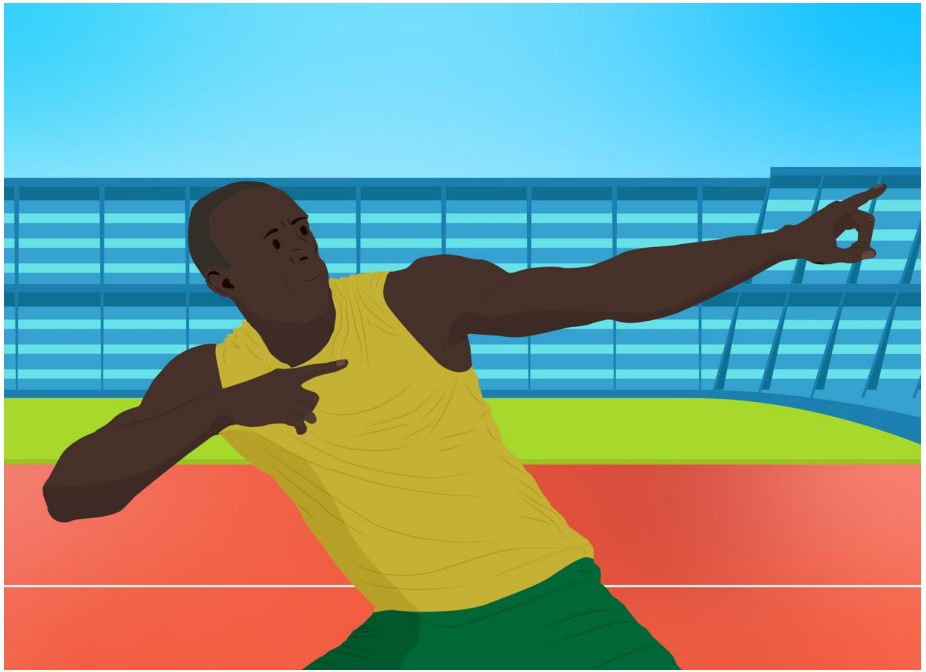
100 metros planos



100 metros planos

- ¿Podrían describir cómo es una carrera de 100 metros planos?

- ¿En qué fase de la carrera un atleta busca incrementar su velocidad y en cuál se esfuerza por mantenerla constante?

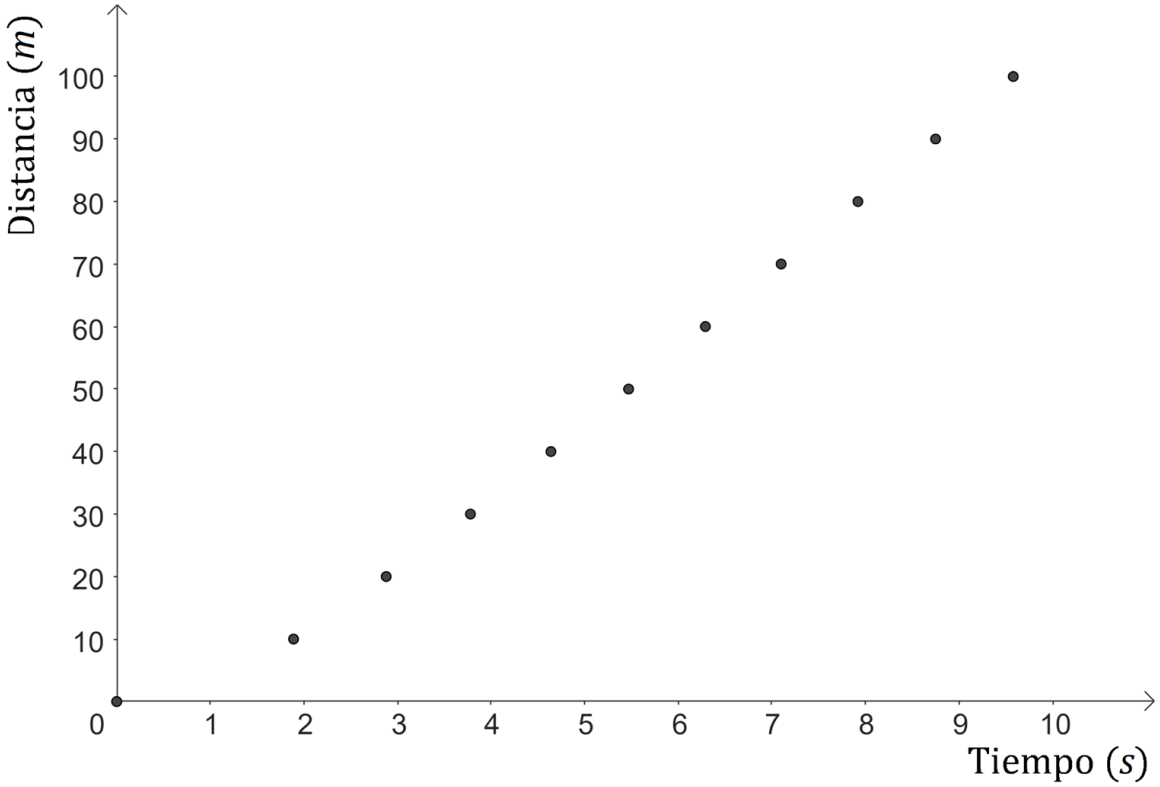


Problema

¿Cómo podemos determinar la aceleración y velocidad del atleta durante la carrera?

Problema

- La carrera tuvo lugar en 2009, en el mundial de atletismo de Berlín.
- Bolt corrió los 100 metros en 9,58 segundos.



100 metros planos

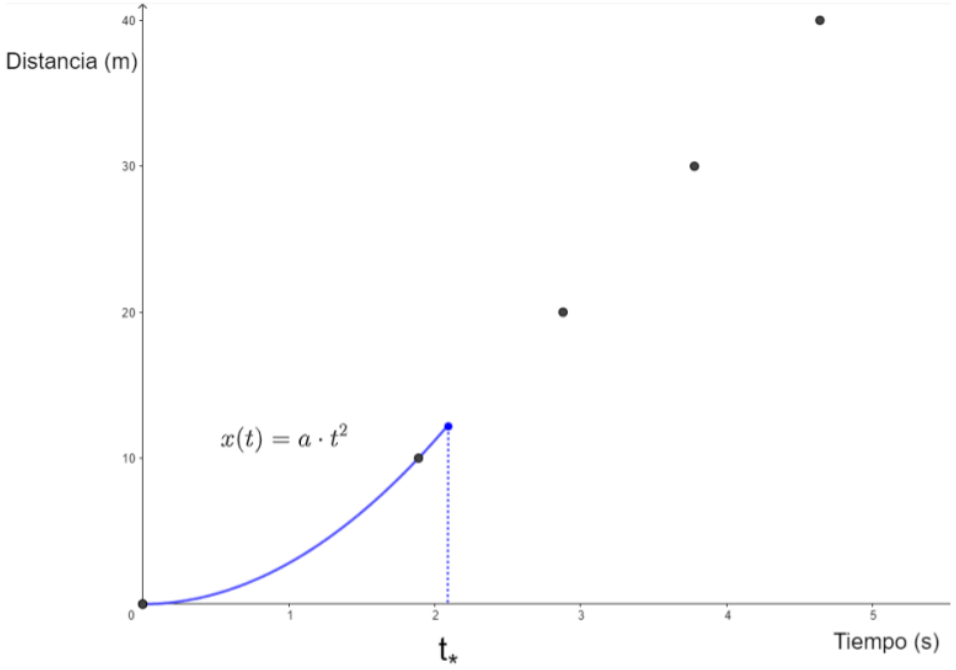
Suponiendo que esta carrera se ajusta a las fases descritas en el video, donde hay un periodo inicial de aceleración, seguido de uno donde se intenta mantener la velocidad constante hasta el final, responde:

- *¿A partir de qué momento crees que el corredor deja de acelerar e intenta mantener una velocidad constante?*

Algunas consideraciones

La primera etapa de la carrera, donde se acelera, se puede representar mediante una función cuadrática de la forma:

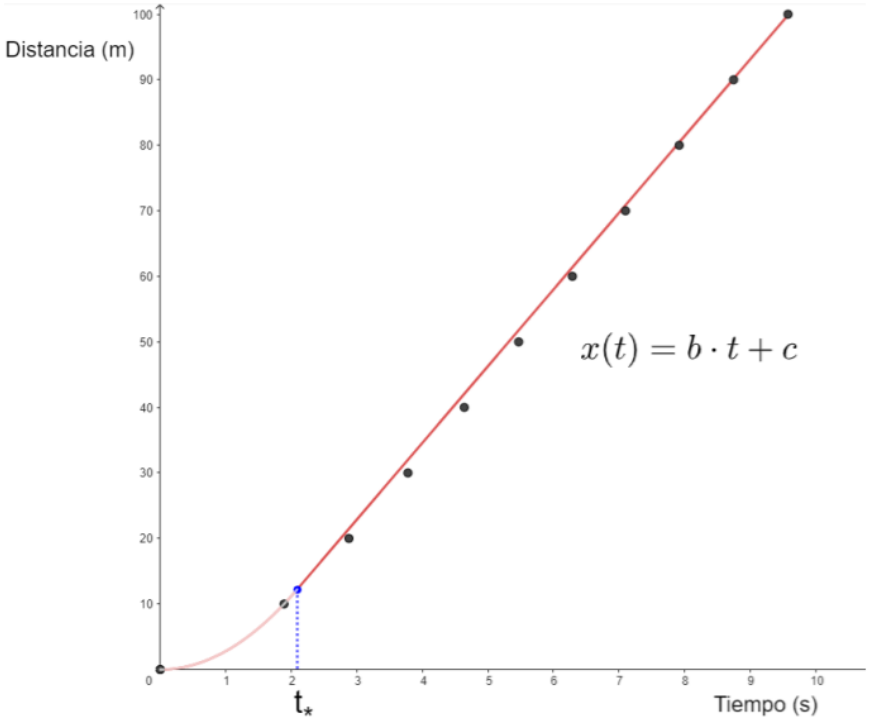
$$x(t) = a \cdot t^2$$



Algunas consideraciones

A partir de un instante , el atleta deja de acelerar. En ese momento, comienza la segunda etapa de la carrera, en la que se mantiene una velocidad constante. Esta etapa puede modelarse como una función afín, mediante la expresión:

$$x(t) = b \cdot t + c$$



Algunas consideraciones

Por lo tanto, la función que relaciona la distancia en el tiempo a lo largo de la carrera se puede modelar como:

$$x(t) = \begin{cases} a \cdot t^2 \; si \; 0 \leq t \leq t_* \\ b \cdot t + c \; si \; t_* < t \leq t_f \end{cases}$$

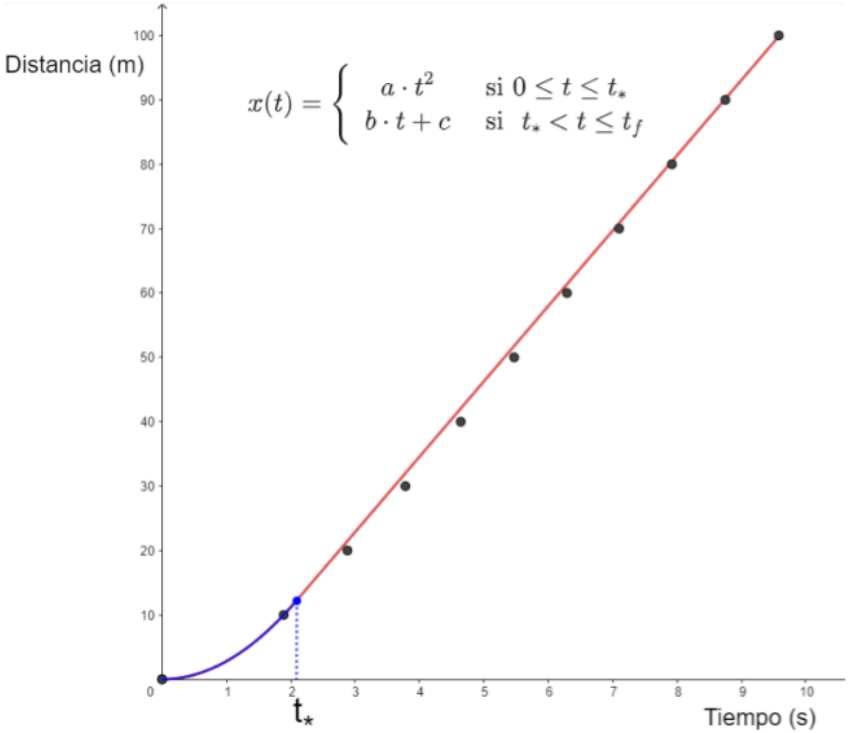
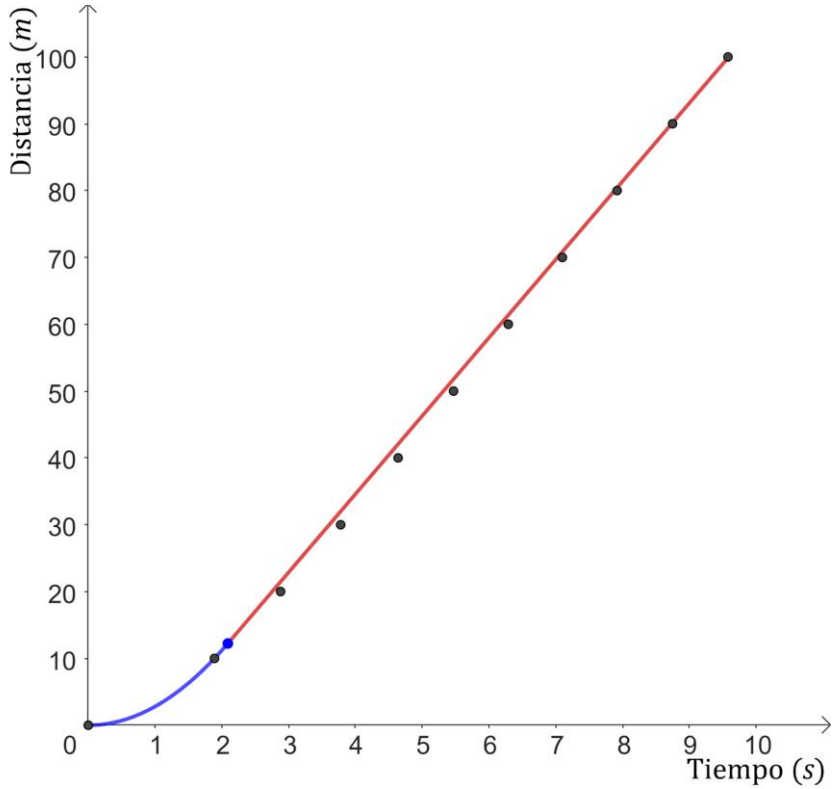


Gráfico de la función por tramos

Es posible encontrar los parámetros a, b, c, t_* y t_f de la función $x(t)$ que modela esta relación:

$$x(t) = \begin{cases} 2{,}8t^2 & si\ 0 \leq t \leq 2{,}09 \\ 11{,}7t - 12{,}22 & si\ 2{,}09 < t \leq 9{,}58 \end{cases}$$

Su gráfico es



100 metros planos

¿Cómo se relaciona la expresión matemática que modela la carrera de Usain Bolt con los aspectos de las carreras de 100 metros planos descritas anteriormente?

Algunas consideraciones

- Si tenemos una función $y = f(t)$, que describe una variable y que está en función del tiempo. Su **primera derivada** $\frac{dy}{dt}$ corresponde a la tasa de cambio de y en el instante t, lo que, en este caso, se interpreta como la **velocidad** a la que cambia y en ese instante.
- Por lo tanto, calcular la velocidad del atleta en cualquier punto es equivalente a calcular la derivada de la función $x(t)$.

Actividad 1

Considera la función $x(t)$, que modela la distancia (en metros) en el tiempo (en segundos) recorrida por Usain Bolt en la carrera de 100 metros del mundial de Berlín de 2009.

$$x(t) = \begin{cases} 2{,}8t^2 & si \quad 0 \leq t \leq 2{,}09 \\ 11{,}7t - 12{,}22 & si \; 2{,}09 < t \leq 9{,}58 \end{cases}$$

1. **Encuentra la derivada de cada tramo de esta función.**
2. **Usa la derivada de $x(t)$ para calcular la velocidad del atleta cuando ha transcurrido 1 segundo de carrera.**
3. **¿En qué instante Usain Bolt alcanza la velocidad máxima y cuál es dicha velocidad?**
4. **¿Cuál es la velocidad de llegada a la meta?**

Respuestas

1. La derivada de $x(t) = 2{,}8\ t^2$,correspondiente al tramo $0 \leq\ t \leq\ 2,09$, es $\frac{dx}{dt} = 2{,}8 \cdot\ 2t = 5{,}6\ t$. La derivada $x(t) = 11{,}7\ t\ -\ 12{,}22$, correspondiente al tramo $2{,}09\ <\ t \leq\ 9{,}58$ es $\frac{dx}{dt} = 11{,}7 \cdot 1 - 0 = 11{,}7$.

2. Cuando ha transcurrido 1 segundo, la velocidad del atleta en ese instante corresponde a la derivada $\frac{dx}{dt} = 5{,}6\ t$ evaluada en $t\ = 1$, que corresponde a $5{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Respuestas

3. De acuerdo con la función, el primer tramo de aceleración llega hasta $t = 2{,}09$, donde el corredor alcanza la velocidad máxima. Al evaluar la derivada $\frac{dx}{dt} = 5{,}6\,t$ en este valor obtenemos que la velocidad máxima es aproximadamente $11{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

4. La llegada a la meta ocurre en el instante $t = 9{,}58$ segundos, por lo que la velocidad del atleta en ese momento corresponde a la derivada $\frac{dx}{dt} = 11{,}7$ evaluada en ese valor. Es decir, la velocidad es constante e igual a $11{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Pregunta

- *¿Cómo podemos, a partir de la función $x(t)$, estimar la aceleración del atleta en cualquier momento?*

Algunas consideraciones

- Cuando tenemos una función $x(t)$ que representa la posición del atleta en función del tiempo, la primera derivada corresponde a la velocidad del atleta.
- Asimismo, la segunda derivada de la posición en función del tiempo corresponde a la aceleración del corredor en cualquier momento.
- Para denotar la segunda derivada de x respecto de t usaremos la notación $\frac{d^2x}{dt^2}$.

Actividad 2

Considera la función $x(t)$, que modela la distancia (en metros) en el tiempo (en segundos) recorrida por Usain Bolt en la carrera de 100 metros del mundial de Berlín de 2009.

$$x(t) = \begin{cases} 2{,}8\,t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 2{,}09 \\ 11{,}7\,t - 12{,}22 & \text{si } 2{,}09 < t \leq 9{,}58 \end{cases}$$

1. Encuentra la segunda derivada de cada tramo de esta función.

2. Calcula la aceleración del atleta en \(t=0\). ¿Qué ocurre en esta parte de la carrera?

3. Calcula la aceleración en el segundo tramo de la carrera. ¿Qué puedes concluir a partir de ese resultado?

Respuestas

1. La segunda derivada de $x(t) = 2{,}8\ t^2$, correspondiente al primer tramo es $\frac{d^2x}{dt^2} = 5{,}6$.

   La derivada $x(t) = 11{,}7\ t - 12{,}22$, correspondiente al tramo $2{,}09 < t \leq 9{,}58$ es igual a $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$.

2. En $t = 0$, la aceleración en esta parte corresponde al primer tramo de la carrera, por lo que es igual a $5{,}6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ y es constante, ya que no depende del tiempo t.

3. En la segunda parte de la carrera, la aceleración en el tiempo del atleta es igual a 0, es decir, no existe aceleración en este tramo, por lo que la velocidad del atleta es constante.

Sistematización

- Para modelar la situación de la carrera de 100 metros planos, fue necesario usar un modelo simplificado de esta carrera, dividiéndola en dos tramos: una en la que el atleta acelera y otra en la que busca mantener su velocidad constante.

- A partir de este modelo simplificado y la representación gráfica de la posición en el tiempo del atleta, se ajustó un modelo matemático a esta situación, expresado algebraicamente.

Sistematización

- Para una función $x(t)$ que relaciona el tiempo t y la distancia recorrida x, la velocidad en cualquier instante t es la primera derivada de la función $x(t)$ respecto al tiempo.

- Asimismo, la aceleración para cualquier tiempo t es la segunda derivada de la función $x(t)$ respecto al tiempo.

MAT CON
MATEMÁTICA CONECTADA

100 metros planos

fcfm
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE
CMMEdu
Laboratorio de Educación
Centro de Modelamiento Matemático
Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura
Cátedra UNESCO Formación de Docentes para Enseñar Matemática en el Siglo XXI Universidad de Chile
Ministerio de Educación
PLAN DE REACTIVACIÓN EDUCATIVA