Germinación de semillas

Germinación de semillas

Revisemos la infografía “¿De qué depende que una semilla se transforme en una planta?”.

Germinación de semillas

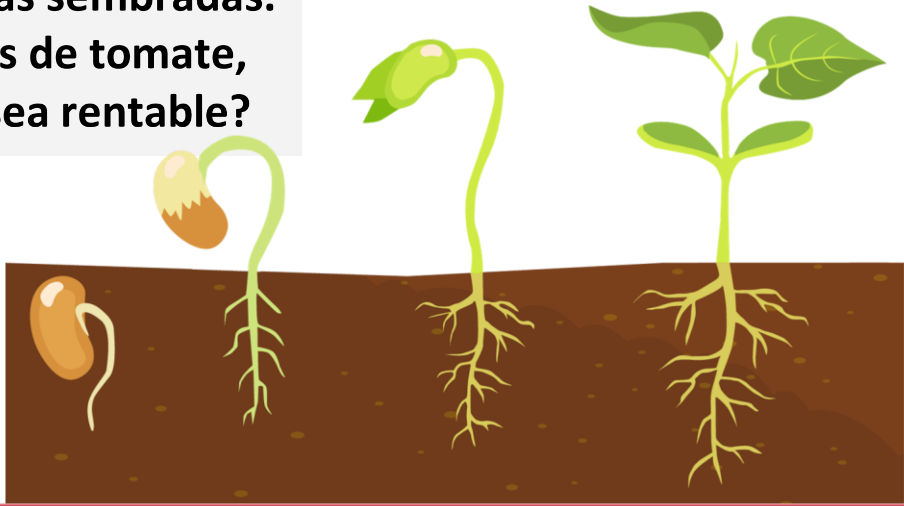
- ¿De qué factores depende la germinación de una semilla?

- ¿Cómo pueden determinar la probabilidad de que una semilla germine?

Problema

Se estima que la probabilidad de que una semilla de tomate germine en clima templado, con un sustrato adecuado y con niveles óptimos de hidratación es de $\frac{5}{6}$.

Para que un cultivo sea rentable, un agricultor necesita que germinen al menos el 80% de las semillas sembradas. Si el agricultor decide sembrar 900 semillas de tomate, ¿cuál es la probabilidad de que su cultivo sea rentable?



Actividad 1

1. **Supongamos que quieres crear un almácigo de tomates, para ello siembras siete semillas de tomate:**

   a. ¿Cuál es la probabilidad de que germinen las siete semillas?

   b. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna semilla germine?

   c. ¿Cuál es la probabilidad de que germinen al menos 5 semillas?

Preguntas a considerar

1. ¿Es posible usar la regla de Laplace para calcular la probabilidad de que las siete semillas germinen?

2. ¿Cuántos casos favorables hay para este evento?

3. ¿Podemos determinar cuántos casos posibles hay?

4. ¿Son todos estos casos equiprobables? (Condición para aplicar la regla de Laplace).

A considerar

Comparemos las probabilidades de dos casos posibles:

- Que todas las semillas germinen.
- Que ninguna germine.

A considerar

Comparemos las probabilidades de dos casos posibles:

- Que todas las semillas germinen.
- Que ninguna germine.

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} \neq \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}$$

Simulemos el experimento

Lanzaremos dados:

- Si el resultado del lanzamiento es 1, la semilla no germinará.

- Si sale cualquier otro número, la semilla sí germinará.

Actividad 1

2. Para simular lo que ocurre con las siete semillas, lanzaremos siete dados. Deben registrar cuántas semillas germinan en cada lanzamiento, y anotar una "X" en la casilla correspondiente en la tabla.

N° de lanzamiento	Número de semillas que germinaron							
	0	1	2	3	4	5	6	7
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
Frecuencia absoluta								
Frecuencia relativa								

MATEMÁTICA CONECTADA

Simulemos el experimento

N° de lanzamiento	Número de semillas que germinaron							
	0	1	2	3	4	5	6	7
1					X			
2							X	
3						X		
4								X
5					X			
6						X		
7							X	
8						X		
9					X			
10						X		
Frecuencia absoluta	0	0	0	0	3	4	2	1
Frecuencia relativa	0	0	0	0	0,3	0,4	0,2	0,1

¿Qué podemos hacer para tener mejores estimaciones de las probabilidades?

Más datos

Frecuencia absoluta	Número de semillas que germinaron							
	0	1	2	3	4	5	6	7
Grupo 1								
Grupo 2								
Grupo 3								
Grupo 4								
Grupo 5								
⋮								
Total								
Frecuencia relativa total								

Actividad 1

3. **Respondan las siguientes preguntas de acuerdo con lo que observan en el siguiente recurso (link de GeoGebra):**

   a. ¿Qué forma tiene el gráfico que describe esta situación?

   b. ¿Cuál podría ser la probabilidad de que las 7 semillas germinen?

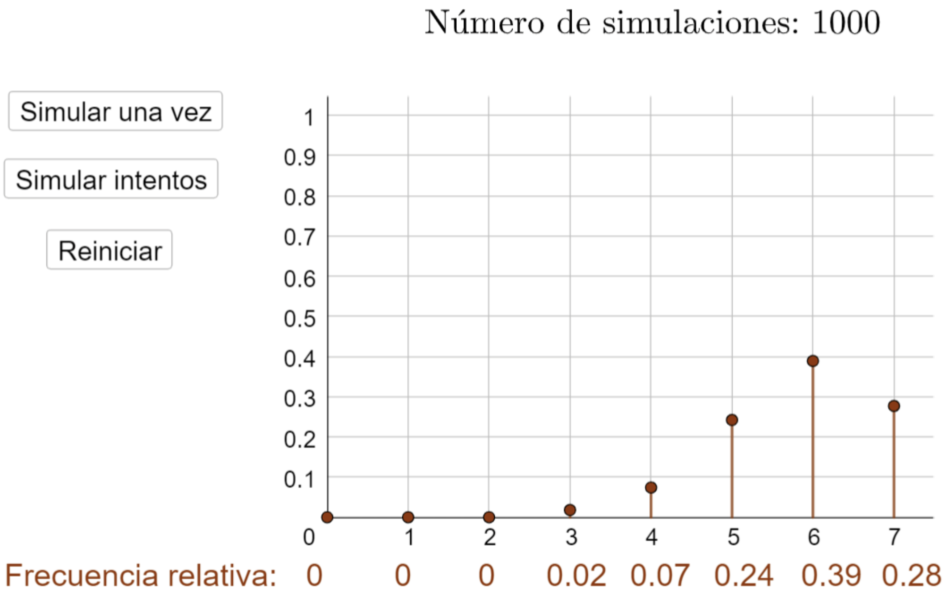
   c. ¿Cuál podría ser la probabilidad de que ninguna de las 7 semillas germine?

   d. ¿Cuápodría ser la probabilidad de que al menos 5 de las 7 semillas germinen?

Veamos las respuestas

3.

a.



b. $P(X = 7) = 0{,}28$

c. $P(X = 0) = 0$

d. $P(X \geq 1) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) = 0{,}24 + 0{,}39 + 0{,}28 = 0{,}91$

Distribución binomial

- Hasta ahora hemos usado frecuencias relativas para estimar las probabilidades.

- Para determinar el valor exacto de estas probabilidades podemos recurrir a la **distribución binomial**.

- La distribución binomial permite calcular las probabilidades de situaciones en las que se repite un experimento dicotómico, donde la probabilidad de cada uno de esos resultados es constante.

Germinación de semillas

1. En la situación de la germinación de las semillas que estamos analizando, ¿cuál sería el experimento aleatorio dicotómico que se repite?

2. ¿Cuáles serían los dos resultados posibles de este experimento?

3. ¿Cuántas veces se repite el experimento?

Germinación de semillas

1. En la situación de la germinación de las semillas que estamos analizando, ¿cuál sería el experimento aleatorio dicotómico que se repite?
2. ¿Cuáles serían los dos resultados posibles de este experimento?
3. ¿Cuántas veces se repite el experimento?

Respuestas:

1. Sembrar una semilla y observar si germina o no.

2. Los dos resultados posibles de este experimento son: la semilla germina - la semilla no germina.

3. El experimento se repite 7 veces, (se siembran 7 semillas).

Distribución binomial

- Por conveniencia, los resultados posibles del experimento aleatorio se consideran como “éxito” y el otro como “fracaso”.

- Cada vez que se realiza el experimento la probabilidad de éxito p es siempre la misma.

- La probabilidad de fracaso $1 - p$ también es constante en cada repetición.

- Las n repeticiones del experimento son independientes.

Germinación de semillas

4. En la situación de las semillas, ¿cuál sería el éxito y cuál el fracaso?

5. ¿Cuál es la probabilidad de éxito y la de fracaso?

6. ¿Qué significa, en el caso de las semillas, suponer que las repeticiones del experimento son independientes?

Germinación de semillas

4. En la situación de las semillas, ¿cuál sería el éxito y cuál el fracaso?
5. ¿Cuál es la probabilidad de éxito y la de fracaso?
6. ¿Qué significa, en el caso de las semillas, suponer que las repeticiones del experimento son independientes?

Respuestas:

4. Éxito: la semilla germina.
   Fracaso: la semilla no germina.

5. Probabilidad de éxito es $\frac{5}{6}$. Probabilidad de fracaso es $\frac{1}{6}$.

6. La probabilidad de que una semilla germine no depende de las otras semillas.

Distribución binomial

- Consideremos que X es la variable aleatoria que representa el número de éxitos en las n repeticiones.

- La **distribución binomial** permite calcular la probabilidad de obtener exactamente x éxitos en las n repeticiones del experimento. Esto es:

$$P(X = x) = \binom{\mathrm{n}}{x} \cdot p^{x} \cdot (1-p)^{n-x}$$

donde $x = 0,1,2, \ldots, n$, $0 \leq p \leq 1$ y n es un entero no negativo.

- Recordemos que, $\binom{\mathrm{n}}{x} = \frac{n!}{x! \cdot (n-x)!}$ es el número de maneras que se pueden escoger x elementos de n sin importar el orden.

Germinación de semillas

7. ¿Cuál sería la variable aleatoria que deberíamos considerar en la situación de las semillas?

8. ¿Qué representa $P(X = 1)$ en esta situación?

9. ¿Cómo se expresa esta probabilidad usando la fórmula de la distribución binomial?

10. ¿Cuánto vale $P(X = 1)$? ¿Cómo se interpreta?

Germinación de semillas

Respuestas:

7. X: número de semillas que germinan dentro de las 7 semillas sembradas.

8. $P(X\ =\ 1)$ es la probabilidad de que 1 de las 7 semillas germine.

9. $P(X\ =\ 1) = \binom{1}{1} \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{7-1}$

10. $P(X = 1\ \approx\ 0{,}000125)$ se puede interpretar que la probabilidad de que germine una sola semilla en un almácigo de 7 semillas es casi nula.

Actividad 2

1. **Asocia cada concepto con su respectiva interpretación en la situación de las semillas. Une los recuadros correspondientes con una línea.**

Experimento aleatorio	n
Éxito	p
Fracaso	La semilla germinó
Probabilidad de éxito	Plantar una semilla y observar si germinó
Probabilidad de fracaso	$P(X = k)$
Número de repeticiones del experimento	X
Variable aleatoria	$1 - p$
Probabilidad de obtener k éxitos en n repeticiones	La semilla no germinó

Actividad 2

1. **Asocia cada concepto con su respectiva interpretación en la situación de las semillas. Une los recuadros correspondientes con una línea.**

Experimento aleatorio	n
Éxito	p
Fracaso	La semilla germinó
Probabilidad de éxito	Plantar una semilla y observar si germinó
Probabilidad de fracaso	$P(X = k)$
Número de repeticiones del experimento	X
Variable aleatoria	$1 - p$
Probabilidad de obtener k éxitos en n repeticiones	La semilla no germinó

Germinación de semillas

- La probabilidad p del resultado que es considerado "éxito" se mantiene constante en cada realización del experimento.

- Las n repeticiones del experimento son independientes entre sí.

11. ¿Cuáles son los dos supuestos que tuvimos que hacer para poder usar la distribución binomial en el caso de las semillas?

12. ¿Es razonable hacer estos supuestos en este caso?

Germinación de semillas
Respuestas:

11. Los dos supuestos son:

- La probabilidad de que una semilla germine no depende de si otra semilla germinó o no.
- La probabilidad de éxito $p = \frac{5}{6}$ para cada semilla es siempre la misma.

12. Parece razonable suponer que la probabilidad de que una semilla germine puede ser siempre la misma. Y que esta probabilidad no depende de si las otras semillas germinan o no.

Actividad 2

MATEMÁTICA CONECTADA

2. Expresa las siguientes probabilidades usando la notación de variable aleatoria:

   a. La probabilidad de que ninguna semilla germine:

   b. La probabilidad de que todas las semillas germinen:

   c. La probabilidad de que germinen al menos cinco semillas:

Actividad 2

2. Expresa las siguientes probabilidades usando la notación de variable aleatoria:

   a. La probabilidad de que ninguna semilla germinen:

   b. La probabilidad de que todas las semillas germinen:

   c. La probabilidad de que germinen al menos cinco semillas:

a. $P(X = 0)$
b. $P(X = 7)$
c. $P(X \geq 5)$

Actividad 2

3. Calcula las probabilidades del ítem 2 usando la fórmula de la distribución binomial. Comparen estos resultados con las probabilidades estimadas a partir de la simulación con dados.

Actividad 2

a. $P(X=0)=\binom{7}{0}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{7}\approx 0{,}0000036$

b. $P(X=0)=\binom{7}{7}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{7}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\approx 0{,}28$

c. $$P(X\geq 5)=P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)$$
$$=\binom{7}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2}+\binom{7}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{1}+\binom{7}{7}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{7}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{0}$$

$P(X\geq 5)\approx 0{,}904$

Actividad 3

1. Ahora consideremos 30 eventos, es decir, que se siembran 30 semillas. Calcula las siguiente probabilidades:

    a. Probabilidad de que germinen 20 semillas.

    b. Probabilidad de que germinen al menos 20 semillas.

    c. Probabilidad de que germinen más de 20 semillas.

Actividad 3

1. Ahora consideremos 30 eventos, es decir, que se siembran 30 semillas. Calcula las siguientes probabilidades:

   a. Probabilidad de que germinen 20 semillas. $P(X = 0)$

   a. Probabilidad de que germinen al menos 20 semillas. $P(X \geq 0)$

   b. Probabilidad de que germinen más de 20 semillas. $P(X > 0)$

¿Cómo calcular?

a. $P(X=20)=\binom{30}{20}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{20}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$

b. ¿Cómo se puede plantear el cálculo de $P(X\geq 0)$?

c. ¿Cómo se puede plantear el cálculo de $P(X>0)$?

¿Cómo calcular?

a. $P(X = 20) = \binom{30}{20} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{20} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{10}$

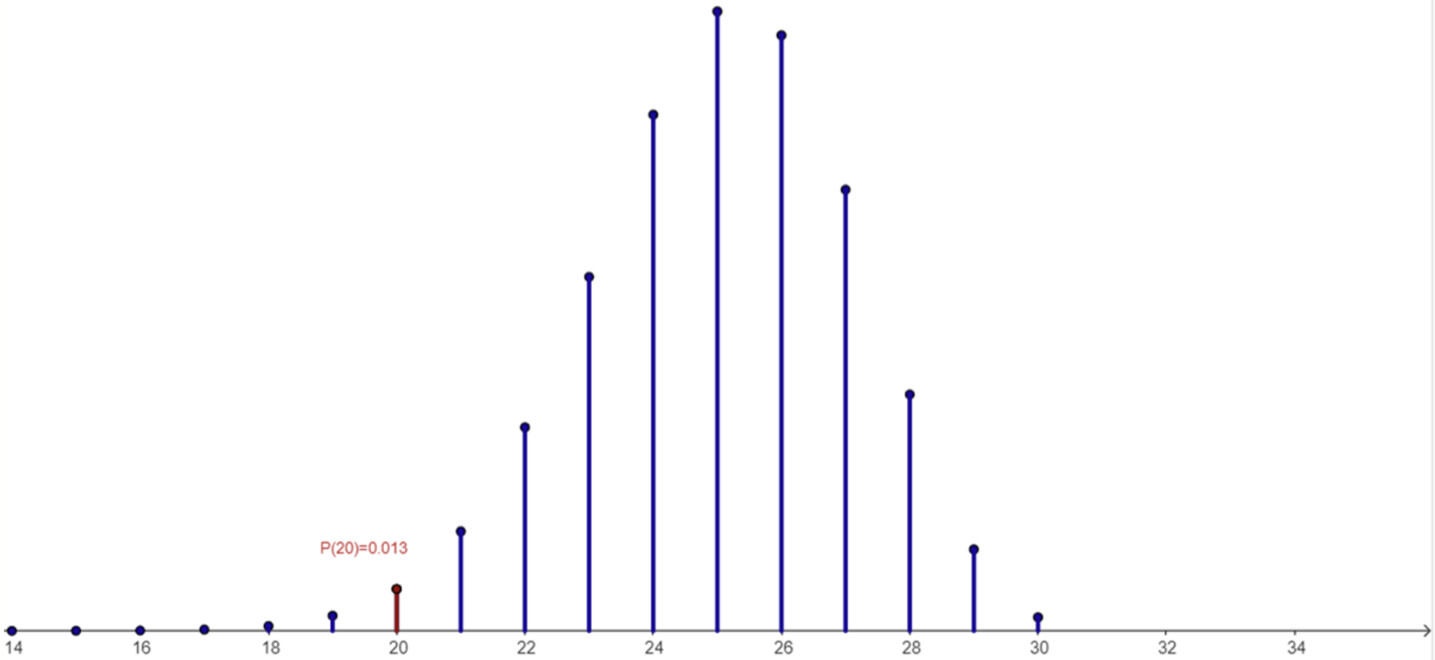
b. ¿ Cómo se puede plantear el cálculo de $P(X \geq 0)$?

$$P(X \geq 0) = P(X = 20) + P(X = 21) + P(X = 22) + P(X = 23) + P(X = 24) + P(X = 25) + P(X = 26) + P(X = 27) + P(X = 28) + P(X = 29) + P(X = 30)$$

c. ¿Cómo se puede plantear el cálculo de $P(X > 0)$?

$$P(X \geq 0) = P(X = 21) + P(X = 22) + P(X = 23) + P(X = 24) + P(X = 25) + P(X = 26) + P(X = 27) + P(X = 28) + P(X = 29) + P(X = 30)$$

Actividad 3



Distribución binomial

- [x] Mostrar P (X=k)

$\mathbf{P}(X = 20) = 0.013$

- [ ] Mostrar P (X≤k) y P (X>k)

- [ ] Mostrar P(X≥k)

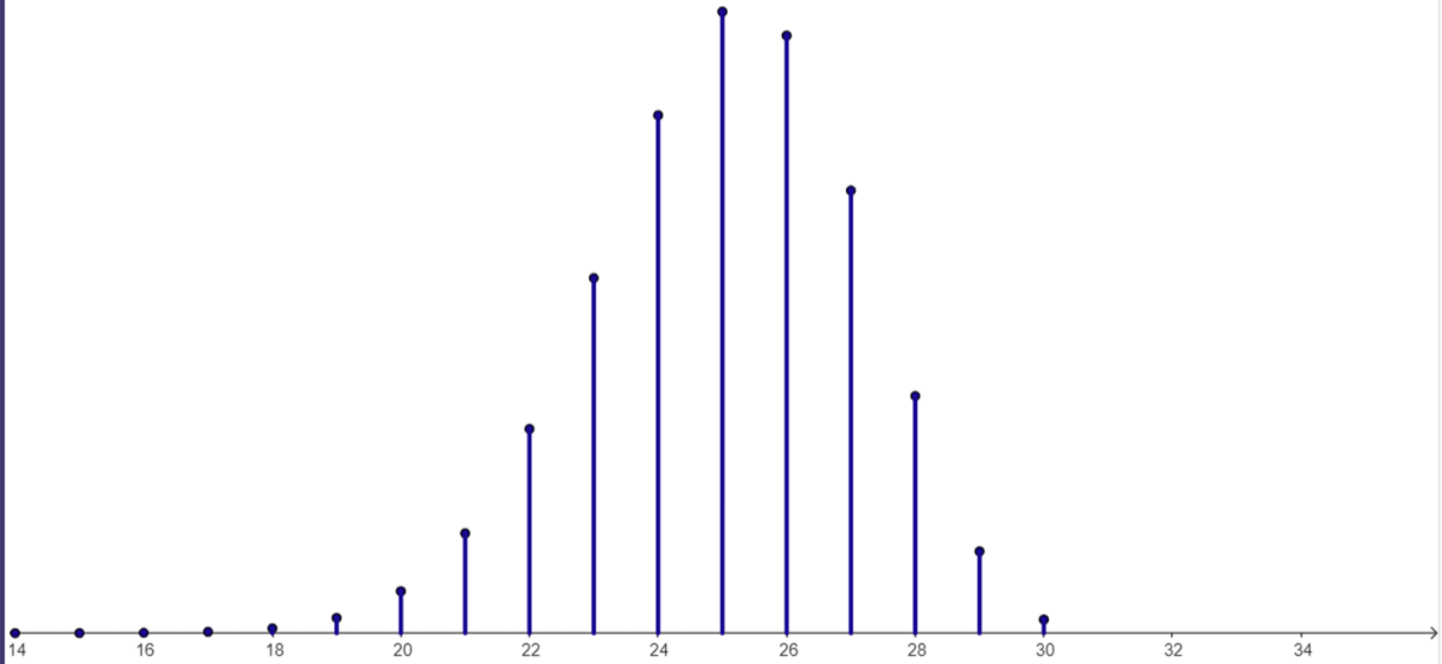
n: 30

p: $\frac{5}{6}$

k: 20

k = 20

Actividad 3



Distribución binomial

- [ ] Mostrar P (X=k)
- [ ] Mostrar P (X≤k) y P (X>k)
- [x] Mostrar P(X≥k)

$P(X \geq 20) = 0.993$

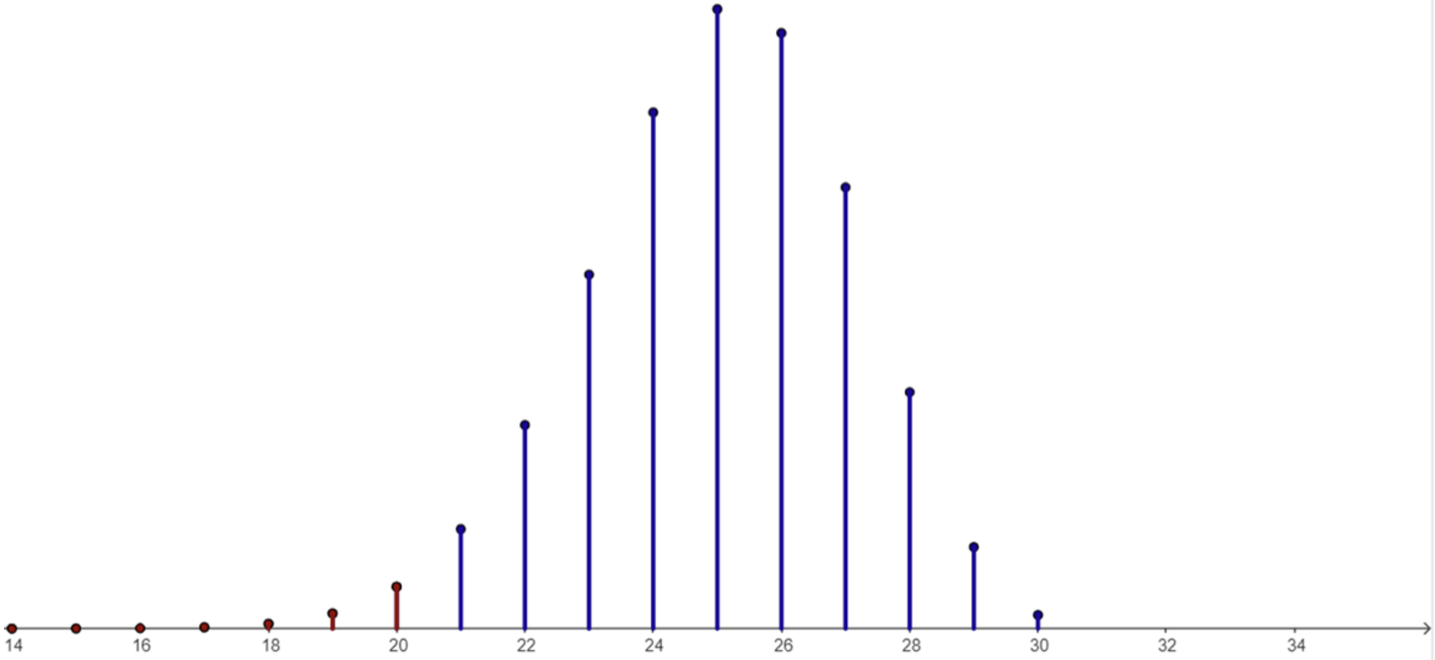
n: 30

p: $\frac{5}{6}$

k: 20

k = 20

Actividad 3



Distribución binomial

- [ ] Mostrar P (X=k)
- [x] Mostrar P (X≤k) y P (X>k)

$\mathbf{P}(X \leq 20) = 0.02$

$\mathbf{P}(X > 20) = 0.98$

- [ ] Mostrar P(X≥k)

n: 30

p: $\frac{5}{6}$

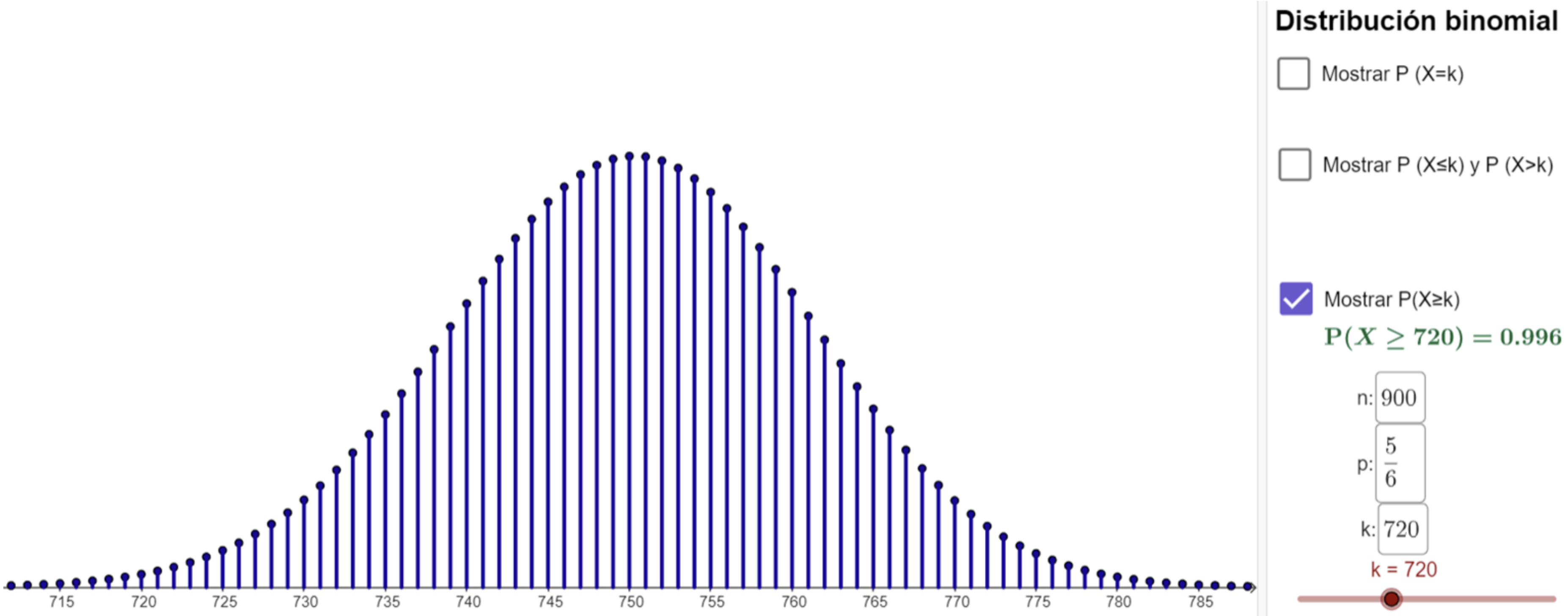
k: 20

k = 20

Actividad 3

2. Recordemos que, para que un cultivo sea rentable, el agricultor requiere que germinen al menos el 80% de las semillas sembradas. Si el agricultor decide plantar 900 semillas de tomate, ¿cuál es la probabilidad de que germinen al menos 80% de las 900 semillas?

P (X ≥ 720)



715
720
725
730
735
740
745
750
755
760
765
770
775
780
785
Distribución binomial
Mostrar P (X=k)
Mostrar P (X≤k) y P (X>k)
Mostrar P(X≥k)
$P(X \geq 720) = 0.996$
n: 900
p: $\frac{5}{6}$
k: 720
k = 720

Conclusiones

- La distribución binomial se aplica cuando se realizan repeticiones de un experimento dicotómico, donde:
  - Todas las repeticiones son independientes entre sí.
  - La probabilidad de éxito en cada repetición es siempre la misma.

- La distribución binomial nos permite determinar la probabilidad de tener exactamente x éxitos en n repeticiones del experimento dicotómico.

- Es importante tener en cuenta que la probabilidad teórica y las estimaciones obtenidas a partir de las frecuencias relativas pueden diferir bastante, debido a factores como el número de repeticiones del experimento o el número de simulaciones realizadas, por lo que es necesario tener precaución al interpretar los resultados.

Germinación de semillas